Fiche exercices

EXERCICE 1

1. Déterminer le reste de la division euclidienne par 11 du nombre $A=251139^{44}$
2. Déterminer le reste de la division euclidienne de $B=10^{100}+100^{10}$ par 27
3. Démontrer que quel que soit l'entier naturel n le nombre $C=3^{2n+1}+2^{n+2}$ est divisible par 7
4. Démontrer que quel que soit l'entier naturel n le nombre $D=3^{n+3}-4^{4n+2}$ est divisible par 11.

EXERCICE 2

1. Dans le système de numération de base 6, énoncer un critère de divisibilité par 5.
2. a=5 876 324 509 (en base 10)

Le nombre a est-il divisible par 11? Justifier (il ne faut pas utiliser la calculatrice)

EXERCICE 3

Dans le système décimal, on étudie la divisibilité par 13.

1. Soit un entier naturel n tel que: $n=10a+b$ avec $a\in\mathbb{N}$ et $b\in\mathbb{N}$

Prouver que n est divisible par 13 si et seulement si $a+4b$ est divisible par 13.

2. Exemples:

Sans utiliser la calculatrice, déterminer les multiples de 13 parmi les nombres suivants:
140 582; 7 374; 6357

EXERCICE 4

1. Déterminer les restes de la division euclidienne par 13 de 3^k avec $k\in\mathbb{N}$.
2. Déterminer les entiers naturels n tels que $A_n=3^n+3^{2n}+3^{3n}$ soit divisible par 13.
3. Les nombres $a=\overline{1110}$; $b=\overline{1010100}$; $c=\overline{1001001000}$ sont écrits dans le système de numération de base 3. Sont-ils divisibles par 13?

EXERCICE 5

Démontrer que l'ensemble des nombres premiers est infini.

EXERCICE 6

1. Soit x un entier relatif.

a) Démontrer que: $3x\equiv 8(mod\ 10)\Leftrightarrow x\equiv 6(mod\ 10)$

b) Démontrer que: $x^2\equiv 6(mod\ 10)\Leftrightarrow (x\equiv 4(mod\ 10)\text{ou } x\equiv 6(mod\ 10))$

2. Soit n un entier naturel

a) Démontrer que: $n^2+(n+1)^2+(n+2)^2\equiv 0(mod\ 10)$ est équivalent à: $(n+1)^2\equiv 6(mod\ 10)$

b) En déduire les entiers naturels, multiples de 10 et inférieurs à 5000 qui sont la somme des carrés de trois nombres consécutifs.

EXERCICE 7

1. Déterminer les restes de la division euclidienne par 97 de 23104 et de 15231 et de 6462113.
2. Déterminer les restes de la division euclidienne par 97 de 10^2 et de 10^{12} et de 10^{13} et de 10^{18} .

Application : Clé RIB (relevé d'identité bancaire).

Un numéro de compte bancaire **N** est un nombre de 23 chiffres.
Le nombre **A** constitué des 5 premiers chiffres correspond au code de la banque.
Le nombre **B** constitué des 5 chiffres suivants correspond au code de l'agence de cette banque.
Le nombre **C** constitué des 11 chiffres suivant correspond au numéro de compte du client pour la banque considérée.
Le nombre **R** constitué des deux derniers chiffres st la **« Clé RIB ».**
La **« Clé RIB »** est un nombre de 2 chiffres compris entre 01 et 97 (on écrit le zéro pour obtenir un numéro de compte **N** de 23 chiffres.
On détermine **R** en imposant au nombre **N** d'être divisible par 97 c'est à dire $\mathrm{N}\equiv 0(97)$.

Exemple :

Code Banque	Code Agence	n° de compte	Clé RIB
23104	15231	00006462113	
A	B	C	R

3.a. Déterminer les entiers naturels n, p et k tels que :
$\mathrm{N}=\mathrm{A}\times 10^{n}+\mathrm{B}\times 10^{p}+\mathrm{C}\times 10^{k}+\mathrm{R}$
b. Déterminer la « **Clé de RIB** » pour l'exemple considéré.

EXERCICE 8

1. Démontrer que, quel que soit l'entier naturel non nul n , le nombre A défini par: $A=3^{2n}+2^{6n-5}$ est divisible par 11.

2. Démontrer que, quel que soit l'entier naturel n , le nombre B défini par: $B=16^{2n+1}+18^{n}$ est divisible par 17.

3. Pour tout entier naturel n , déterminer le reste de la division euclidienne de 10^{3n} par 37.

Application:

Quel est le reste de la division euclidienne du nombre a=1 001 001 037 par 37

4. Dans le système de numération de base 6 énoncer un critère de divisibilité par 3.

EXERCICE 9

1. Soit un entier naturel n qui s'écrit: $n=10a+b$ avec $a\in\mathbb{N}$ et $b\in\mathbb{N}$.

Démontrer que n est divisible par 17 si et seulement si $a-5b$ est divisible par 17.

2. Exemples:

Les nombres 40 273; 95 611; 10 676 sont-ils divisibles par 17? (calculatrice interdite)

EXERCICE 10

1. Le nombre $2^{11}-1$ est-il un nombre premier?
2. p et q sont deux entiers naturels non nuls. On considère $S=1+2^{p}+2^{2p}+2^{3p}+...+2^{p(q-1)}$
a) Exprimer S en fonction de 2^{pq}
b) Démontrer que $2^{pq}\equiv 1\left(2^{p}-1\right)$
c) En déduire que $2^{pq}-1$ est divisible par $2^{p}-1$

3. Démontrer que si 2^n-1 $(n\in\mathbb{N})$ est un nombre premier alors n est un nombre premier.
La réciproque est-elle vraie?
Les nombres premiers de la forme 2^n-1 sont appelés nombres de MERSENNE.

EXERCICE 11

1. Soit x en entier relatif. En considérant un tableau, déterminer le reste de la division euclidienne de x^3 par 9 suivant les valeurs de x modulo 9.
En déduire que l'on a pour tout entier relatif x :
$x^3\equiv 0(9)\Leftrightarrow x\equiv 0(3)$
$x^3\equiv 1(9)\Leftrightarrow x\equiv 1(3)$
$x^3\equiv 8(9)\Leftrightarrow x\equiv 2(3)$
2. On considère trois entiers relatifs $x\,;y\,;z$ tels que la somme $x^3+y^3+z^3$ soit divisible par 9. Démontrer que l'un des trois entiers $x\,;y\,;z$ est divisible par 3.

EXERCICE 12

1. Démontrer que, pour tout entier naturel n: $2^{3n}-1$ est un multiple de 7. En déduire que $2^{3n+1}-2$ est un multiple de 7 et que $2^{3n+2}-4$ est un multiple de 7.
2. Déterminer les restes de la division par 7 des puissances de 2.
3. Le nombre p étant un entier naturel, on considère le nombre $A_p=2^p+2^{2p}+2^{3p}$
a) Si $p=3n$, quel est le reste de la division de A_p par 7?
b) Démontrer que si $p=3n+1$ alors A_p est divisible par 7.
c) Étudier le cas $p=3n+2$
4. On considère les nombres entiers a et b écrits dans le système binaire:
$a=\overline{1001001000}$ et $b=\overline{1000100010000}$
Vérifier que ces nombres sont des nombres de la forme A_p. Sont-ils divisibles par 7?

CORRECTION

EXERCICE 1

1.

$251139 = 11 \times 22830 + 9$

$251139 \equiv 9(11)$

Donc $A \equiv 9^{44}(11)$

$9^2 = 81 = 11 \times 7 + 4$ donc $9^2 \equiv 4(11)$

$9^3 = 9 \times 9^2 \equiv 9 \times 4(11)$ donc $9^3 \equiv 36(11)$. Or $36 = 11 \times 3 + 3$, donc $9^3 \equiv 3(11)$

$9^4 = 9 \times 9^3 \equiv 9 \times 3(11)$ donc $9^4 \equiv 27(11)$. Or $27 = 11 \times 2 + 5$, donc $9^4 \equiv 5(11)$

$9^5 = 9 \times 9^4 \equiv 9 \times 5(11)$ donc $9^5 \equiv 45(11)$. Or $45 = 11 \times 4 + 1$, donc $9^5 \equiv 1(11)$

$44 = 5 \times 8 + 4$

$9^{44} = 9^{5 \times 8 + 4} = (9^5)^8 \times 9^4$

Par suite,

$9^{44} \equiv 1^8 \times 5(11)$

$9^{44} \equiv 5(11)$

Donc, $A \equiv 9^{44}(11)$

Le reste de la division euclidienne de A par 11 est 5.

2.

$10 \equiv 10(27)$

$10^2 = 100 = 27 \times 3 + 19$ donc $10^2 \equiv 19(27)$

$10^3 = 10 \times 10^2 \equiv 10 \times 19(27)$ donc $10^3 \equiv 190(27)$. Or $190 = 27 \times 7 + 1$, donc $10^3 \equiv 1(27)$

$100 = 3 \times 33 + 1$

$10^{100} = 10^{3 \times 33 + 1} = (10^3)^{33} \times 10^1$

Par suite,

$10^{100} \equiv 1^{33} \times 10(27)$

$10^{100} \equiv 10(27)$

$100^{10} = (10^2)^{10} = 10^{20}$

$20 = 3 \times 6 + 2$

$10^{20} = 10^{3 \times 6 + 2} = (10^3)^6 \times 10^2$

Par suite,

$10^{20} \equiv 1^6 \times 19(27)$

$100^{10} \equiv 19(27)$

Donc:

$B = 10^{100} + 100^{10} \equiv 10 + 19(27)$

$B \equiv 29(27)$

$29 = 27 \times 1 + 2$

Par suite,

$B \equiv 2(27)$

Le reste de la division euclidienne de B par 27 est 2.

3.

$3^{2n+1} = (3^2)^n \times 3 = 9^n \times 3$

$9 = 7 \times 1 + 2$

$9 \equiv 2(7)$

Par suite,

$3^{2n+1} \equiv 2^n \times 3(7)$

$2^{n+2}=2^n\times 2^2$
$2^{n+2}=2^n\times 4$
Donc
$3^{2n+1}+2^{n+2}\equiv 2^n\times 3+2^n\times 4(7)$
$3^{2n+1}+2^{n+2}\equiv 2^n\times(3+4)(7)$
$3^{2n+1}+2^{n+2}\equiv 2^n\times 7(7)$
$3^{2n+1}+2^{n+2}\equiv 0(7)$
$C\equiv 0(7)$
Donc C est **divisible par 7**.
4.
$3^{n+3}=3^n\times 3^3$
$3^3=27=11\times 2+5$
$3^3\equiv 5(11)$
Par suite,
$3^{n+3}\equiv 5\times 3^n(11)$

$4^{4n+2}=(4^4)^n\times 4^2$
$4^2=16=11\times 1+5$
$4^2\equiv 5(11)$
$4^3=4\times 4^2\equiv 4\times 5(11)$
$4^3\equiv 20(11)$
$20=11\times 1+9$
Donc:
$4^3\equiv 9(11)$
$4^4=4\times 4^3\equiv 4\times 9(11)$
$4^4\equiv 36(11)$
$36=11\times 3+3$
Donc:
$4^4\equiv 3(11)$
Donc:
$4^{4n+2}=(4^4)^n\times 4^2\equiv 3^n\times 5(11)$
$D=3^{n+3}-4^{4n+2}\equiv 5\times 3^n-3^n\times 5(11)$
$D\equiv 0(11)$
Donc D **est divisible par 11**.

EXERCICE 2

1.
$6\equiv 1(5)$
Pour tout $n\in\mathbb{N}$, $6^n\equiv 1^n(5)$
a s'écrit $\overline{mcdu}$ en base 6
$a=m\times 6^3+c\times 6^2+d\times 6^1+u\times 6^0$
$a\equiv m+c+d+u(5)$
Un entier naturel non nul est **divisible par 5** si et seulement si **la somme de ses chiffres en base 6 est divisible par 5**.

2.
$a\equiv 9+5+2+6+8-(0+4+3+7+5)(11)$
$a\equiv 30-19(11)$
$a\equiv 11(11)$
$a\equiv 0(11)$ **donc** a est **divisible par 11**.

EXERCICE 3

1.

- On suppose que $n=10a+b$ est divisible par 13

$10a+b\equiv 0(13)$
$4(10a+b)\equiv 4\times 0(13)$
$40a+4b\equiv 0(13)$
Or, $40=13\times 3+1$
$40\equiv 1(13)$
Donc $a+4b\equiv 0(13)$
$a+4b$ est **divisible par 13**.

- On suppose que $a+4b$ est divisible par 13

$a+4b\equiv 0(13)$
$10(a+4b)\equiv 10\times 0(13)$
$10a+40b\equiv 0(13)$
Or, $40\equiv 1(13)$
$10a+b\equiv 0(13)$
n est **divisible par 13**

2.

On suppose connu les multiples de 13 inférieurs à 100.
$13=1\times 13$ $26=2\times 13$ $39=3\times 13$ $52=4\times 13$ $65=5\times 13$ $78=6\times 13$ $91=7\times 13$

- $n_1=140582=10\times 14058+2$

On pose $a=14058$ et $b=2$
n_1 est divisible par 13 si et seulement si $a+4b$ est divisible par 13.
$a+4b=14066$

$14066=10\times 1406+6$
On pose $a=1406$ et $b=6$
14 066 est divisible par 13 si et seulement si $a+4b$ est divisible par 13.
$a+4b=1430$

$1430=10\times 143+0$
On pose $a=143$ et $b=0$
1430 est divisible par 13 si et seulement si $a+4b$ est divisible par 13.
$a+4b=143$

$143=10\times 14+3$
On pose $a=14$ et $b=3$
143 est divisible par 13 si et seulement si $a+4b$ est divisible par 13.
$a+4b=26$

Or 26 est divisible par 13.
Conclusion: **140 582 est divisible par 13**.

- $n_2=7374=10\times 737+4$

On pose $a=737$ et $b=4$
n_2 est divisible par 13 si et seulement si $a+4b$ est divisible par 13.
$a+4b=753$

$753=10\times 75+3$
On pose $a=75$ et $b=3$

753 est divisible par 13 si et seulement si $a+4b$ est divisible par 13.
$a+4b=87$

Or 87 n'est pas divisible par 13, par conséquent **7 374 n'est pas divisible par 13**.

- $n_3=6357=10\times 635+7$

On pose $a=635$ et $b=7$
n_3 est divisible par 13 si et seulement si $a+4b$ est divisible par 13.
$a+4b=663$

$663=10\times 66+3$
On pose $a=66$ et $b=3$
663 est divisible par 13 si et seulement si $a+4b$ est divisible par 13.
$a+4b=78$

Or 78 est divisible par 13.
Conclusion: **6 357 est divisible par 13**.

EXERCICE 4

1.
$3^0\equiv 1(13)$
$3^1\equiv 3(13)$
$3^2\equiv 9(13)$
$3^3\equiv 1(13)$ car $27=13\times 2+1$

- si $k=3p$ $p\in\mathbb{N}$, $3^k=3^{3p}=(3^3)^p\equiv 1(13)$
- si $k=3p+1$ $p\in\mathbb{N}$, $3^k=3^{3p+1}=(3^3)^p\times 3\equiv 3(13)$
- si $k=3p+2$ $p\in\mathbb{N}$, $3^k=3^{3p+2}=(3^3)^p\times 3^2\equiv 9(13)$

2.
- si $n=3p$ $p\in\mathbb{N}$, $3^n\equiv 1(13)$
  $3^{2n}=(3^n)^2\equiv 1(13)$
  $3^{3n}=(3^n)^3\equiv 1(13)$
  et, donc $A_n\equiv 3(13)$
- si $n=3p+1$ $p\in\mathbb{N}$, $3^n=(3^3)^p\times 3^1\equiv 3(13)$
  $3^{2n}=(3^n)^2\times 3^2\equiv 9(13)$
  $3^{3n}=(3^n)^3\times 3^3(13)\equiv 1(13)$
  et, donc $A_n\equiv 3+9+1(13)$
  et, donc $A_n\equiv 0(13)$
- si $n=3p+2$ $p\in\mathbb{N}$, $3^n=(3^3)^p\times 3^2\equiv 9(13)$
  $3^{2n}=(3^n)^2\equiv 81(13)$ $81=13\times 6+3$ $3^{2n}\equiv 3(13)$
  $3^{3n}=(3^n)^3\equiv 9^3(13)$ $9^3=(3^2)^3=3^6\equiv 1(13)$ $3^{3n}\equiv 1(13)$
  et, donc $A_n\equiv 9+3+1(13)$
  et, donc $A_n\equiv 0(13)$

Conclusion: A_n est **divisible par 13** si et seulement si $\boxed{n=3p+1}$ ou $\boxed{n=3p+2}$ avec $p\in\mathbb{N}$

3.

- $a=\overline{1110}$

$a=1\times3^3+1\times3^2+1\times3^1+0\times3^0$
$a=3^1+3^2+3^3$
$a=A_1$

$n=1=3\times0+1$ donc a est **divisible par 13**.

- $b=\overline{1010100}$

$b=3^2+3^4+3^6$
$b=A_2$

$n=2=3\times0+2$ donc b est **divisible par 13**.

- $c=\overline{1001001000}$

$b=3^3+3^6+3^9$
$b=A_3$

$n=3$, n ne peut pas s'écrire $3p+1$ ou $n=3p+2$ avec $p\in\mathbb{N}$ donc c **n'est pas divisible par 13**.

EXERCICE 5

On suppose que l'ensemble des nombres premiers est fini.
On note g le plus grand de tous les nombres premiers.
On classe les nombres premiers dans l'ordre croissant:
$p_1<p_2<\ldots<p_k<\ldots<g$
$p_1=2;p_2=3;\ldots$
On considère le nombre $N=1\times2\times3\times\ldots\times g+1$, que l'on note $N=(g!)+1$
N est un entier naturel strictement supérieur à 1 donc N admet au moins un diviseur qui est un nombre premier.
Or pour tout nombre premier p_k ,on a: $(g!)\equiv0(p_k)$
Par suite, $N\equiv1(p_k)$
N n'est donc divisible par aucun nombre premier, il y a contradiction avec le résultat.
Donc l'hypothèse faite est fausse et l'ensemble des nombres premiers est infini.

EXERCICE 6

1.
a)

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$3x$	0	3	6	9		$45\equiv5(10)$	$18\equiv8(10)$	$21\equiv1(10)$	$24\equiv4(10)$	$27\equiv7(10)$

Il y a **une seule possibilité** pour avoir $3x\equiv8(10)$ c'est d'avoir $\boxed{x\equiv6(10)}$

Remarque: on obtient de même $3x\equiv4(10)\Leftrightarrow x\equiv8(10)$
Les nombres 3 et 10 étant premiers entre eux, pour chaque valeur de $3x$, il y aura une et une seule valeur pour x.
b)

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
x^2	0	1	4	9	$16\equiv6(10)$	$25\equiv5(10)$	$36\equiv6(10)$	$49\equiv9(10)$	$64\equiv4(10)$	$81\equiv1(10)$

Il y a **deux possibilités** et deux seulement d'avoir $x^2\equiv6(10)$, c'est d'avoir $x\equiv4(10)$ ou $\boxed{x\equiv6(10)}$

Donc: $\boxed{x^2\equiv6(10)\Leftrightarrow(x\equiv4(10)\text{ou }x\equiv6(10))}$

Remarque:
on ne peut pas avoir par exemple: $x^2 \equiv 7(10)$

2. a)

$$n^2+(n+1)^2+(n+2)^2$$
$$=n^2+n^2+2n+1+n^2+4n+4$$
$$=3n^2+6n+5$$
$$=3(n^2+2n)+5$$
$$=3[(n+1)^2-1]+5$$
$$=3(n+1)^2-3+5$$
$$=3(n+1)^2+2$$
$$n^2+(n+1)^2+(n+2)^2 \equiv 0(10)$$
$$\Leftrightarrow 3(n+1)^2+2 \equiv 0(10)$$
$$\Leftrightarrow 3(n+1)^2 \equiv -2(10) \qquad \text{Or } -2=10\times(-1)+8$$
$$\Leftrightarrow 3(n+1)^2 \equiv 8(10)$$
$$\boxed{\Leftrightarrow (n+1)^2 \equiv 6(10)} \qquad \text{d'après 1. a)}$$

b)

D'après 1. b) $(n+1)^2 \equiv 6(10) \Leftrightarrow (n+1 \equiv 4(10) \text{ ou } n+1 \equiv 6(10)) \Leftrightarrow (n \equiv 3(10) \text{ ou } n \equiv 5(10))$

$n=3$ 9+16+25=**50**
$n=5$ 25+36+49=**110**
$n=13$ 169+196+225=**590**
$n=15$ 225+256+289=**770**
$n=23$ 529+576+625=**1730**
$n=25$ 625+676+729=**2030**
$n=33$ 1089+1156+1225=**3470**
$n=35$ 1225+1296+1369=**3890**
$n=43$ 1849+1936+2025=~~5810~~

EXERCICE 7

1. $23104=97\times 238+18$
Le reste de la division euclidienne de 23104 par 97 est **18**.
$15231=97\times 157+2$
Le reste de la division euclidienne de 15231 par 97 est **2**.
$64621113=97\times 66619+70$
Le reste de la division euclidienne de 6462113 par 97 est **70**.

2. $10^2=100=97\times 1+3$
Le reste de la division euclidienne de 10^2 par 97 est **3** et $\boxed{10^2 \equiv 3(97)}$.
$10^{12}=(10^2)^6 \equiv 3^6(97)$
$3^6=729=97\times 7+50$
donc $\boxed{10^{12} \equiv 50(97)}$.
Le reste de la division euclidienne de 10^{12} par 97 est **50**
$10^{13}=10^{12}\times 10 \equiv 50\times 10(97)$
donc $\boxed{10^{13} \equiv 500(97)}$
$500=97\times 5+15$
Le reste de la division euclidienne de 10^{13} par 97 est **15**.
$10^{18}=(10^2)^9 \equiv 3^9(97)$
$3^9=3^6\times 3^3$
$\boxed{3^9 \equiv 50\times 27(97)}$
$50\times 27=1350=97\times 13+89$
donc $\boxed{10^{18} \equiv 89(97)}$

Le reste de la division euclidienne de 10^{18} par 97 est **89**

3.a. En utilisant la définition de la numération dans le système décimal, on obtient :
$N = A \times 10^n + B \times 10^p + C \times 10^k + R$
donc $n = 18$ et $p = 13$ et $k = 2$
b. Pour l'exemple

$A \equiv 18(97)$	$B \equiv 2(97)$	$C \equiv 70(97)$
$10^{18} \equiv 89(97)$	$10^{13} \equiv 15(97)$	$10^2 \equiv 3(97)$

et $R \equiv R(97)$.
On pose $N \equiv 0(97)$ donc
$0 \equiv 18 \times 89 + 2 \times 15 + 70 \times 3 + R\,(97)$
$0 \equiv 1602 + 30 + 210 + R\,(97)$
$0 \equiv 1842 + R\,(97)$
Or, $1842 = 97 \times 18 + 96$
$0 \equiv 96 + R\,(97)$
donc $\boxed{R \equiv -96(97)}$
$-96 = 97 \times (-1) + 1$
$\boxed{R \equiv 1(97)}$
R contient deux chiffres **R=01**.
On complète le tableau

Code Banque	Code Agence	n° de compte	Clé RIB
23104	15231	00006462113	01

Remarques :
. Si $R \equiv 0(97)$ alors **R=97** et non **00.**
. On utilise le nombre 97 car les restes des divisions euclidiennes de 10^k par 97, pour k compris entre 0 et 22 sont distincts deux à deux et tous les chiffres de **N** interviennent pour la congruence modulo 97.
Si on se trompe pour un chiffre (et un seul) des 23 chiffres de **N,** le nouveau nombre obtenu **N'** n'est pas divisible par 97 (l'ordinateur vérifie immédiatement ce résultat).
S'il y a plusieurs erreurs alors le nouveau nombre obtenu peut-être lui aussi divisible par 97.

EXERCICE 8

1.
$2^{6n-5} = 2^{6(n-1)+1} = 2^{6(n-1)} \times 2$
$2^6 = 64 \equiv 9(11)$
$2^{6(n-1)} \equiv 9^{n-1}(11)$
$2^{6n-5} \equiv 2 \times 9^{n-1}(11)$

$3^{2n} = (3^2)^n = 9^n$
Par suite,
$A = 3^{2n} + 2^{6n-5} \equiv 9^n + 2 \times 9^{n-1}(11)$
$A \equiv 9^{n-1}[9 + 2](11)$
$A \equiv 9^{n-1} \times 11(11)$
$A \equiv 0(11)$
Donc A est divisible par 11.

2.
$16 \equiv -1(17)$ car: $-1 = -1 \times 17 + 16$
$16^{2n+1} = (16^2)^n \times 16$
Donc:
$16^{2n+1} \equiv [(-1)^2]^n \times (-1)(17)$
$16^{2n+1} \equiv -1(17)$

$18 \equiv 1(17)$
$18^n \equiv 1(17)$

Donc, $B = 16^{2n+1} + 18^n \equiv -1 + 1(17)$
$B \equiv 0(17)$ donc B est divisible par 17.
3.
$10 \equiv 10(37)$
$10^2 = 100 \equiv 26(37)$ car $100 = 37 \times 2 + 26$
$10^3 = 10 \times 10^2 \equiv 10 \times 26(37)$
$10^3 \equiv 260(37)$ Or $260 = 37 \times 7 + 1$
$10^3 \equiv 1(37)$

Pour $n \in \mathbb{N}$, $10^{3n} \equiv 1(37)$
Le reste de la division euclidienne de 10^{3n} est 1.

Application:
$a = 37 + 10^3 + 10^6 + 10^9$

$10^3 \equiv 1(37)$
$10^6 = 10^{3 \times 2} \equiv 1(37)$
$10^9 = 10^{3 \times 3} \equiv 1(37)$
$37 \equiv 0(37)$
Donc, $a \equiv 0 + 1 + 1 + 1(37)$
$a \equiv 3(37)$
Le reste de la division euclidienne de a par 37 est 3.
4.
$6 = 2 \times 3$
$6 \equiv 0(3)$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $6^n \equiv 0(3)$

Si $a = \overline{mcdu}$ en base 6 avec $0 < m < 6 ; 0 \leqslant c < 6 ; 0 \leqslant d < 6 ; 0 \leqslant u < 6$
$a = m \times 6^3 + c \times 62 + d \times 6^1 + u \times 6^0$
donc, $a \equiv u(3)$
Par conséquent, a est divisible par 3 $\Leftrightarrow$ $u \equiv 0(3)$ $\Leftrightarrow$ $u=0$ ou $u=3$
En base 6, un nombre est divisible par 3 si et seulement si le dernier chiffre à droite est 0 ou 3.

EXERCICE 9
1.
- On suppose que n est divisible par 17

$n = 10a + b \equiv 0(17)$
$5(10a + b) \equiv 5 \times 0(17)$
$50a + 5b \equiv 0(17)$

Or $51 = 17 \times 3$
50=51-1 donc $50 \equiv -1(17)$

Par suite:

$-a+5b\equiv 0(17)$

$-1(-a+5b)\equiv -1\times 0(17)$

$a-5b\equiv 0(17)$

Donc $a-5b$ est divisible par 17.

- On suppose que $a-5b$ est divisible par 17

$a-5b\equiv 0(17)$

$10(a-5b)\equiv 0(17)$

$10a-50b\equiv 10\times 0(17)$

$10a-50b\equiv 0(17)$

Or, $-50=17\times(-3)+1$

$-50\equiv 1(17)$

Par suite,

$10a+b\equiv 0(17)$

Donc n est divisible par 17.

2.

On suppose connu les multiples de 17 inférieurs à 100.

$1\times 17=17 \quad 2\times 17=34 \quad 3\times 17=51 \quad 4\times 17=68 \quad 5\times 17=85$

$n_1=40273=10\times 4027+3$

n_1 est divisible par 17 si et seulement si $4027-5\times 3=4012$ est divisible par 17.

$4012=10\times 401+2$

4012 est divisible par 17 si et seulement si $401-5\times 2=391$ est divisible par 17.

$391=10\times 39+1$

391 est divisible par 17 si et seulement si $39-5\times 1=34$ est divisible par 17.

Or 34 est divisible par 17.

Conclusion: 40 273 est divisible par 17.

$n_2=95611=10\times 9561+1$

n_2 est divisible par 17 si et seulement si $9561-5\times 1=9556$ est divisible par 17.

$9556=10\times 955+6$

9556 est divisible par 17 si et seulement si $955-5\times 6=925$ est divisible par 17.

$925=10\times 92+5$

925 est divisible par 17 si et seulement si $92-5\times 5=67$ est divisible par 17.

Or 67 n'est pas divisible par 17.

Conclusion: 95 611 n'est pas divisible par 17.

$n_3=10676=10\times 1067+6$

n_3 est divisible par 17 si et seulement si $1067-5\times 6=1037$ est divisible par 17.

$1037=10\times 103+7$

1037 est divisible par 17 si et seulement si $103-5\times 7=68$ est divisible par 17.

Or 68 est divisible par 17.

Conclusion: 10 676 est divisible par 17.

EXERCICE 10

1.

$2^{11}-1=2048-1=2047$

On regarde si 2047 est divisible par un nombre premier p tel que $p^2\leqslant 2047$

On trouve que 2047 est divisible par 23: $2047=23\times 89$ avec $23^2=529\leqslant 2047$

Donc $2^{11}-1$ n'est pas un nombre premier.

2.a)
$S=1+2^p+2^{2p}+2^{3p}+...+2^{p(q-1)}$
S est la somme des q premiers nombres de la suite géométrique de premier terme 1 et de raison 2^p.

Donc: $S=\frac{1-(2^p)^q}{1-2^p}$ $(p\neq 0 \text{ donc } 2^p\neq 1)$

b)
$S=\frac{1-(2^p)^q}{1-2^p}$ donc $(2^p-1)S=(2^p)^q-1$
Par suite,
$(2^p)^q-1\equiv 0(2^p-1)$
$2^{pq}\equiv 1(2^p-1)$

c)
$(2^p)^q-1\equiv 0(2^p-1)$
Donc, $(2^p)^q-1$ est divisible par (2^p-1).
3.
On suppose que 2^n-1 $(n\in\mathbb{N})$ est un nombre premier et que n n'est pas un nombre premier.
n n'est pas un nombre premier donc il existe $p\neq 1$ et $p\neq n$ et $q\neq 1$ et $q\neq n$ tels que $n=pq$
D'après la question 2. c), 2^p-1 est un diviseur de $2^{pq}-1$, c'est à dire:
2^p-1 est un diviseur de 2^n-1
Or, 2^n-1 est un nombre premier.
Donc $2^p-1=1$ ou $2^p-1=2^n-1$
C'est à dire: $2^p=2$ ou $2^p=2^n$
$p=1$ ou $p=n$
On arrive à une contradiction.
Conséquence: si 2^n-1 $(n\in\mathbb{N})$ est un nombre premier alors n est un nombre premier.
11 est un nombre premier et 2^{11}-1 n'est pas un nombre premier donc la réciproque de la propriété est fausse.

EXERCICE 11

1.
$x^3\equiv 0(9)\Leftrightarrow x\equiv 0(3)$
$x^3\equiv 1(9)\Leftrightarrow x\equiv 1(3)$
$x^3\equiv 8(9)\Leftrightarrow x\equiv 2(3)$

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8
x^3	0	1	8	$27\equiv 0(9)$	$64\equiv 1(9)$	8	0	1	8

$5^2=25\equiv 7(9)$ $5^3\equiv 5\times 7(9)$ $5^3\equiv 35(9)$ $5^3\equiv 8(9)$
$6^2=36\equiv 0(9)$ $6^3\equiv 6\times 0(9)$ $6^3\equiv 0(9)$
$7^2=49\equiv 4(9)$ $7^3\equiv 7\times 4(9)$ $7^3\equiv 28(9)$ $7^3\equiv 1(9)$
$8^2=64\equiv 1(9)$ $8^3\equiv 8\times 1(9)$ $8^3\equiv 8(9)$

D'après le tableau:
$x^3\equiv 0(9)\Leftrightarrow(x\equiv 0(9) \text{ ou } x\equiv 3(9) \text{ ou } x\equiv 6(9))$
Or $0\equiv 0(3); 3\equiv 0(3), 6\equiv 0(3)$
Donc:
$x^3\equiv 0(9)\Leftrightarrow x\equiv 0(3)$

$x^3\equiv 1(9)\Leftrightarrow(x\equiv 1(9) \text{ ou } x\equiv 4(9) \text{ ou } x\equiv 7(9))$

Or, $1\equiv 1(3);4\equiv 1(3),7\equiv 1(3)$
Donc:
$x^3\equiv 1(9)\Leftrightarrow x\equiv 1(3)$

$x^3\equiv 8(9)\Leftrightarrow (x\equiv 2(9)\text{ou } x\equiv 5(9)\text{ ou } x\equiv 8(9))$
Or, $2\equiv 2(3);5\equiv 2(3),8\equiv 2(3)$
Donc:
$x^3\equiv 8(9)\Leftrightarrow x\equiv 2(3)$

2.
On veut que $x^3+y^3+z^3$ soit divisible par 9, c'est à dire: $x^3+y^3+z^3\equiv 0(9)$
En utilisant le tableau, les différentes possibilités sont:

- $x^3=y^3=z^3\equiv 0(9)$ donc $x\equiv 0(3)$ $y\equiv 0(3)$ $z\equiv 0(3)$
- $x^3\equiv 0(9)$ $y^3\equiv 1(9)$ $z^3\equiv 8(9)$ donc $x\equiv 0(3)$
- $x^3\equiv 0(9)$ $y^3\equiv 8(9)$ $z^3\equiv 1(9)$ donc $x\equiv 0(3)$
- $x^3\equiv 1(9)$ $y^3\equiv 0(9)$ $z^3\equiv 8(9)$ donc $y\equiv 0(3)$
- $x^3\equiv 1(9)$ $y^3\equiv 8(9)$ $z^3\equiv 0(9)$ donc $z\equiv 0(3)$
- $x^3\equiv 8(9)$ $y^3\equiv 0(9)$ $z^3\equiv 1(9)$ donc $y\equiv 0(3)$
- $x^3\equiv 8(9)$ $y^3\equiv 1(9)$ $z^3\equiv 0(9)$ donc $z\equiv 0(3)$

Conclusion: si la somme $x^3+y^3+z^3$ est divisible par 9 alors l'un des trois entiers x ; y ou z est divisible par 3.
La réciproque est fausse.

EXERCICE 12

1.
$2^3=8\equiv 1(7)$
Donc pour tout $n\in\mathbb{N}$, $2^{3n}\equiv 1(7)$
Par suite, $2^{3n}-1\equiv 0(7)$
Donc, $2^{3n}-1$ est un multiple de 7.

Pour tout $n\in\mathbb{N}$, $2^{3n+1}=2^{3n}\times 2\equiv 1\times 2(7)$
$2^{3n+1}\equiv 2(7)$
$2^{3n+1}-2\equiv 0(7)$
Donc, $2^{3n+1}-2$ est un multiple de 7

Pour tout $n\in\mathbb{N}$, $2^{3n+2}=2^{3n}\times 2^2\equiv 1\times 2^2(7)$
$2^{3n+2}\equiv 4(7)$
$2^{3n+2}-4\equiv 0(7)$
Donc, $2^{3n+2}-4$ est un multiple de 7.

2.
$2^0\equiv 1(7)$ $2^1\equiv 2(7)$ $2^2\equiv 4(7)$ $2^3\equiv 1(7)$

Si $p\in\mathbb{N}$ alors $p=3n$ ou $p=3n+1$ ou $p=3n+2$

- si $p=3n$, $2^p=2^{3n}=(2^3)^n$

Donc, $2^p\equiv 1(7)$, le reste de la division euclidienne de 2^p par 7 est 1.

- si $p=3n+1$, $2^p=2^{3n+1}=(2^3)^n\times 2\equiv 1\times 2(7)$

Donc, $2^p\equiv 2(7)$, le reste de la division euclidienne de 2^p par 7 est 2.

- si $p=3n+2$, $2^p=2^{3n+2}=(2^3)^n\times 2^2\equiv 1\times 4(7)$

Donc, $2^p\equiv 4(7)$, le reste de la division euclidienne de 2^p par 7 est 4.

3. a)
$2^p \equiv 1(7)$
$2^{2p} = (2^p)^2 \equiv 1^2(7) \equiv 1(7)$
$2^{3p} = (2^p)^3 \equiv 1^3(7) \equiv 1(7)$
Donc, $A_p \equiv 1+1+1(7)$
$A_p \equiv 3(7)$
Si $p=3n$, le reste de la division de A_p par 7 est 3.

b)
$2^p \equiv 2(7)$
$2^{2p} = (2^p)^2 \equiv 2^2(7) \equiv 4(7)$
$2^{3p} = (2^p)^3 \equiv 2^3(7) \equiv 8(7) \equiv 1(7)$
Donc, $A_p \equiv 2+4+1(7) \equiv 7(7)$
$A_p \equiv 0(7)$
Si $p=3n+1$, le reste de la division de A_p par 7 est 0, donc A_p est divisible par 7.

c)
$2^p \equiv 4(7)$
$2^{2p} = (2^p)^2 \equiv 4^2(7) \equiv 16(7) \equiv 2(7)$
$2^{3p} = (2^p)^3 \equiv 4^3(7) \equiv 4 \times 2(7) \equiv 8(7) \equiv 1(7)$
Donc, $A_p \equiv 4+2+1(7) \equiv 7(7)$
$A_p \equiv 0(7)$
Si $p=3n+2$, le reste de la division de A_p par 7 est 0, donc A_p est divisible par 7.