Division euclidienne.

PPCM-PGCD.

1. Division euclidienne dans $\mathbb{N}$

1.1. Définition

Soit a un entier naturel et b un entier naturel non nul alors il existe un unique couple $(q;r)$ d'entiers naturels vérifiant: $\boxed{a=bq+r}$ avec $0\leqslant r<b$

q est **le quotient** et r est **le reste** de la division euclidienne de a par b

1.2. Exemple

Si $a=31$ et $b=5$ alors $q=6$ et $r=1$

$31=6\times 5+1$

1.3. Propriétés

$a\in\mathbb{N}$ $b\in\mathbb{N}^*$

b divise a $\Leftrightarrow$ (le reste de la division euclidienne de a par b est nul)

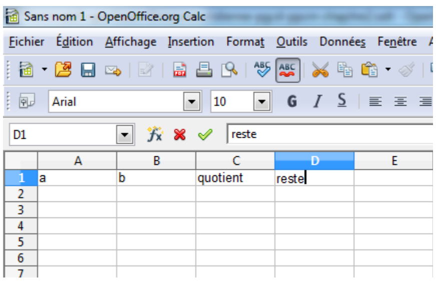
Si q est le quotient de la division euclidienne de a par b alors: $\boxed{bq\leqslant a<b(q+1)}$

1.4. Utilisation d'un tableur

Avec le tableur d'openoffice.

Taper:

En A1:a En B1=b En C1: quotient En D1: reste



Taper:

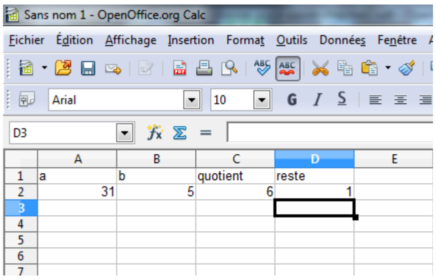
En A2:31 En B2 :5

On va programmer le tableur pour qu'il calcule le quotient et le reste de la division euclidienne de 31 par 5.

En C2, on saisit: «=quotient(A2;B2) », on tape sur entrée

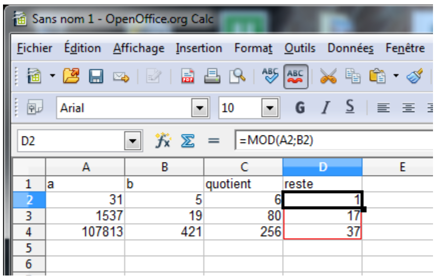
En D2, on saisit: «=mod(A2;B2) », on tape sur entrée

On obtient:



On peut effectuer d'autres divisions euclidiennes en donnant de nouvelles valeurs à a et b et en étirant les deux formules.

Exemple:



2. Systèmes de numération

2.1. Introduction

Soit le nombre a que l'on représente dans le système décimal par 8 239.

Ceci veut dire:

$a=8\times 10^3+2\times 10^2+3\times 10^1+9\times 10^0$

9 est le chiffre des unités

3 est le chiffre des dizaines

2 est le chiffre des centaines

8 est le chiffre des milliers

On représente tous les entiers naturels en utilisant 10 chiffres: 0; 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9

Si m; c; d; u sont des chiffres et $m\neq 0$, note $\overline{mcdu}=m\times 10^3+c\times 10^2+d\times 10^1+u\times 10^0$

2.2. Base quelconque

$b\in\mathbb{N}\quad b\geqslant 2$

La numération en base b nécessite l'emploi de b symboles.

Si $b\leqslant 10$, on utilise les symboles (chiffres) du système décimal, si b>10 on doit faire intervenir d'autres symboles.

<u>Exemples:</u>

en base2: les symboles sont: 0; 1

en base 6: les symboles sont: 0; 1; 2; 3; 4; 5

en base 12: les symboles sont: 0; 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9; α; β

Le nombre noté $\overline{mcdu}$ en base b est égal à $a=m\times b^3+c\times b^2+d\times b^1+u\times b^0$

<u>Exemples:</u>

a s'écrit $\overline{2035}$ en base 6.

$a=2\times6^3+0\times6^2+3\times6^1+5\times6^0$

$a=2\times216+3\times6+5\times1$

$a=432+18+5$

$a=455$

a s'écrit $\overline{10\ 011\ 011}$ en base 2.

$a=1\times2^7+0\times2^6+0\times2^5+1\times2^4+1\times2^3+0\times2^2+1\times2^1+1\times2^0$

$\alpha=1\times128+1\times16+1\times8+1\times2+1\times1$

$a=128+16+8+2+1$

$a=155$

a s'écrit $\overline{85\alpha2\beta}$ en base 12.

$a=8\times12^4+5\times12^3+\alpha\times12^2+2\times12^1+\beta\times12^0$

$a=8\times20736+5\times1728+10\times144+2\times12+11\times1$

$a=165888+8640+1440+24+11$

$a=176003$

Le nombre a s'écrit 1461 en base 10. L'écrire en base 6.

Pour cela, il suffit d'effectuer une suite de division euclidienne dont le diviseur est 6.

$$\begin{array}{cccc|l} 1&4&6&1&\underline{\ 6\ } \\ &2&6&&2\ 4\ 3 \\ &&2&1& \\ &&&3& \end{array} \qquad \begin{array}{ccc|l} 2&4&3&\underline{\ 6\ } \\ &0&3&4\ 0 \\ &&3& \end{array} \qquad \begin{array}{cc|l} 4&0&\underline{\ 6\ } \\ &4&6 \end{array} \qquad \begin{array}{c|l} 6&\underline{\ 6\ } \\ 0&1 \end{array} \qquad \begin{array}{c|l} 1&\underline{\ 6\ } \\ 1&0 \end{array}$$

On continue les divisions jusque l'obtention d'un quotient égal à zéro (et non d'un reste nul)

On obtient $a=1\times6^4+0\times6^3+4\times6^2+3\times6^1+3\times6^0$

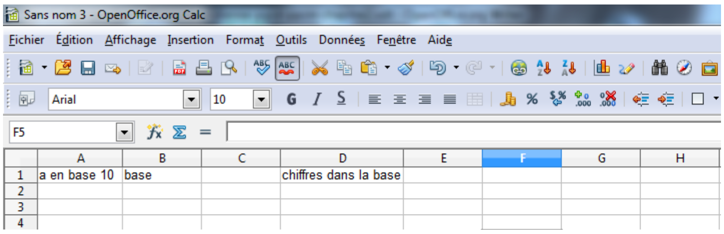
Donc $a=\overline{10433}$ en base 6

2.3. Utilisation d'un logiciel

Avec le tableur d'openoffice.

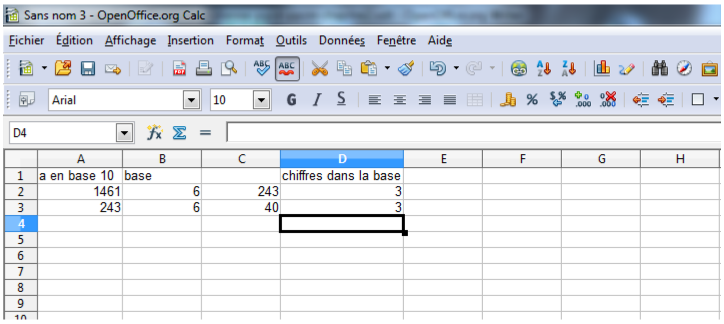
Taper:

En A1: a en base 10 En B1: base En D1: chiffres dans la base

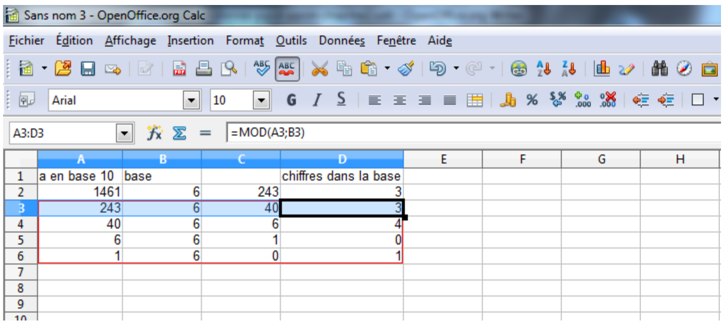


En A2: 1461 En B2: 6 En C2: « =quotient(A2;B2) » En D2: « =mod(A2;B2) »

En A3: « =C2 » En B3: « =$B2 » En C3: « =quotient(A3;B3) » En D3: « =mod(A3:B3) »



Puis on étire la ligne jusqu'à obtention d'un quotient égal à 0.



3. *Algorithme d'Euclide*

$a \in \mathbb{N}^* \quad b \in \mathbb{N}^*$

On se propose de déterminer l'ensemble des diviseurs communs de a et b.

3.1. Activités

a) 1er exemple

$a=252$ et $b=18$

On effectue la division euclidienne de a par b

$252=14\times18$

donc 18 est un diviseur de 252

Tout diviseur de 18 est un diviseur de 252

Conclusion: tous les diviseurs communs de 252 et 18 sont les diviseurs de 18

b) 2ième exemple

$a=963$ et $b=153$

On effectue la division euclidienne de a par b

$963=153\times6+45 \qquad 0\leqslant45<153$

Soit d un diviseur commun de 963 et 153 alors d divise 153 et $963-153\times6=45$

De même si d divise 153 et 45 alors d divise 153 et $153\times6+45=963$ donc d est un diviseur commun de 963 et 153

Conclusion: L'ensemble des diviseurs communs de 963 et 153 est l'ensemble des diviseurs communs de 153 et 45.

3.2. Théorème

a et b sont deux entiers naturels non nuls. On note r le reste de la division euclidienne de a par b.

- Si $r=0$ alors $a=bq$
  L'ensemble des diviseurs communs de a et b est **l'ensemble des diviseurs de b.**
- Si $r\neq0$ alors $a=bq+r \qquad 0<r<b$
  L'ensemble des diviseurs communs de a et b est **l'ensemble des diviseurs communs de b et r.**

3.3. Activité

$a=963 \qquad b=153$

$963=6\times153+45 \qquad 0<45<153$

L'ensemble des diviseurs communs de 963 et 153 est l'ensemble des diviseurs communs de 153 et 45.

$153 = 3 \times 45 + 18$ $\quad\quad$ $0 < 18 < 45$

L'ensemble des diviseurs communs de 963 et 153 est l'ensemble des diviseurs communs de 45 et 18.

$45 = 18 \times 2 + 9$ $\quad\quad$ $0 < 9 < 18$

L'ensemble des diviseurs communs de 963 et 153 est l'ensemble des diviseurs communs de 18 et 9.

$18 = 9 \times 2 + 0$

L'ensemble des diviseurs communs de 963 et 153 est l'ensemble des diviseurs communs de 9.

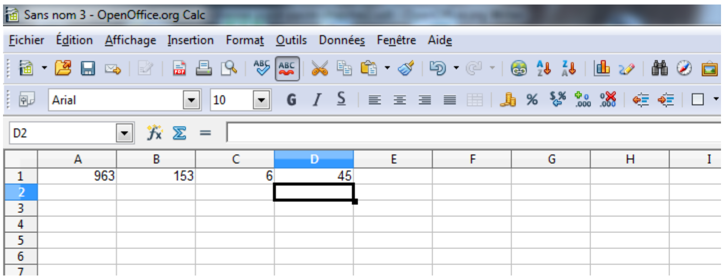
On effectue donc des divisions euclidiennes successives, le suite des restes est strictement décroissante. Le nombre important est le dernier reste non nul, ici 9.

On peut aussi utiliser un tableur:

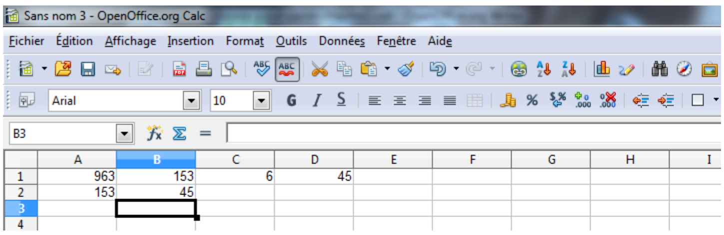
Avec le tableur d'openoffice.

Taper:

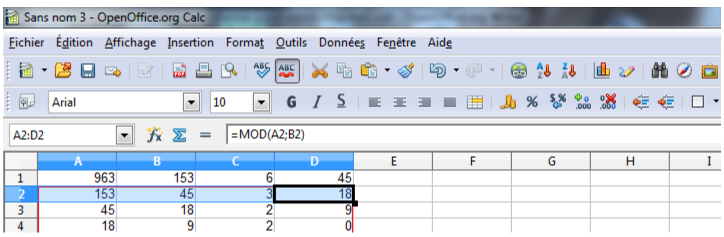
En A1: 963 $\quad\quad$ En B1: 153 $\quad\quad$ En C1: « =quotient(A1;B1) » $\quad\quad$ En D1: « =mod(A1;B1)



En A2: « =B1 » $\quad\quad$ En B2: « =D1 »



Puis on étire les différentes formules



2.4. Algorithme d'Euclide

a et b étant 2 entiers naturels non nuls.

On note r_1 et q_1 les reste et quotient de la division euclidienne de a par b.

$a=bq_1+r_1 \quad 0\leqslant r_1<b$

- Si $r_1=0$ alors l'ensemble des diviseurs communs de a et b est l'ensemble des diviseurs de b.

- Si $r_1\neq 0$, on note r_2 et q_2 les reste et quotient de la division euclidienne de b par r_1 .

$b=r_1q_2+r_2 \quad 0\leqslant r_2<r_1$

- Si $r_2=0$ alors l'ensemble des diviseurs communs de b et r_1 est l'ensemble des diviseurs de r_1 .

- Si $r_2\neq 0$, on note r_3 et q_3 les reste et quotient de la division euclidienne de r_1 par r_2 .

$r_1=r_2q_3+r_3 \qquad 0\leqslant r_3<r_2$

On réitère le procédé, …

La suite des restes est strictement décroissante donc il existe $n\in\mathbb{N}$, $n\geqslant 2$ tel que $r_n=0$

Donc, $r_{n-2}=r_{n-1}\times q_n+0$

<u>Conclusion:</u>

L'ensemble des diviseurs communs de a et b est l'ensemble des diviseurs de r_{n-1} (dernier reste non nul)

4. Plus grand commun diviseur

4.1. Remarque

Si $a=bq$ alors le plus grand diviseur commun de a et b est b.

<u>Exemple:</u>

$252=18\times 14$

$D_{18}=1;2;3;6;9;18$

Le plus grand diviseur commun de 252 et 18 est 18.

Si $r_{n-1}\neq 0$ et $r_n=0$

Le plus grand diviseur commun de a et b est r_{n-1} .

<u>Exemple:</u>

a=963 et b=153

$r_3=9$ et $r_4=0$

Le plus grand diviseur commun de 963 et 153 est 9.

4.2. Notation

On note $\mathcal{P}\text{gcd}(a;b)$ ou $(a \wedge b)$ **le plus grand diviseur commun de a et b.**

4.3. Conséquence

L'ensemble des diviseurs communs de a et b est l'ensemble des diviseurs de $\mathcal{P}\text{gcd}(a;b)$.

4.4. Propriété 1

a et b étant 2 entiers naturels non nuls.

$\boxed{\mathcal{P}\text{gcd}(a;b)=\mathcal{P}\text{gcd}(b;a)}$ ou $\boxed{a \wedge b = b \wedge a}$

Exemple:

$a=963$ et $b=153$ $\mathcal{P}\text{gcd}(a;b)=9$

$\mathcal{P}\text{gcd}(b;a)$?

$153=0\times 963+153$ $0 \leqslant 153 < 963$

4.5. Propriété 2

a, b et k étant 3 entiers naturels non nuls.

$\boxed{\mathcal{P}\text{gcd}(ka;kb)=k\mathcal{P}\text{gcd}(b;a)}$

Exemple:

$a=963$ et $b=153$ $\mathcal{P}\text{gcd}(a;b)=9$

$k=5$

$5a=4815$ $5b=765$

$4815=6\times 765+225$

$765=3\times 225+90$

$225=2\times 90+45$

$90=2\times 45+0$

$\mathcal{P}\text{gcd}(4815;765)=45=5\times 9$

4.6. Propriété 3

Si d est un diviseur commun de a et b.On note $a=da'$ et $b=db'$ ($a'\in\mathbb{N}^*$ et $b'\in\mathbb{N}^*$)
$\mathcal{P}\text{gcd}(a;b)=\delta$ et $\mathcal{P}\text{gcd}(a';b')=\delta'$
Alors $\boxed{\delta=d\,\delta'}$

Démonstration:
$\mathcal{P}\text{gcd}(a;b)=\mathcal{P}\text{gcd}(da';db')=d\,\mathcal{P}\text{gcd}(a';b')$
$a\wedge b=(da')\wedge(db')=d\,(a'\wedge b')$

4.7. Activité

$a=963$ $b=153$ $\mathcal{P}\text{gcd}(a;b)=9$

On veut écrire 9 comme combinaison linéaire de a et b c'est à dire on veut trouver 2 entiers relatifs u et v tels que: $ua+vb=9$

$963=6\times153+45$ $a=6\times b+45$

On exprime le reste en fonction de a et b

$45=a-6b$

$153=3\times45+18$ $b=3\times(a-6b)+18$

$18=-3a+19b$

$45=2\times18+9$ $a-6b=2\times(-3a+19b)+9$

Donc

$9=7a-44b$

Attention cette écriture n'est pas unique.

4.8. Théorème

Pour tous entiers naturels non nuls a et b il existe 2 entiers relatifs u et v tels que:

$$\boxed{au+bv=\mathcal{P}\text{gcd}(a;b)}$$

Démonstration:

- Si b divise a

$a=bq$ et $\mathcal{P}\text{gcd}(a;b)=b$
On peut écrire $0a+1b=b$
($u=0$ et $v=1$)

- Si b ne divise pas a, on considère l'algorithme d'Euclide:

$a=bq_1+r_1$

Donc, $r_1=a-bq_1$

$b = r_1 q_2 + r_2$

$b = (a - bq_1) q_2 + r_2$

$b = aq_2 - bq_1 q_2 + r_2$

Donc, $r_2 = -aq_2 + (1 + q_1 q_2) b$

$r_1 = r_2 q_3 + r_3$

$r_1 = (-aq_2 + (1 + q_1 q_2) b) q_3 + r_3$

$a - bq_1 = (-aq_2 + (1 + q_1 q_2) b) q_3 + r_3$

$a - bq_1 = -aq_2 q_3 + (1 + q_1 q_2) bq_3 + r_3$

$a - bq_1 = -aq_2 q_3 + bq_3 + q_1 q_2 bq_3 + r_3$

Donc, $r_3 = a - bq_1 + aq_2 q_3 - bq_3 - q_1 q_2 bq_3$

$r_3 = (1 + q_2 q_3) a - (q_1 + q_3 + q_1 q_2 q_3) b$

On réitère un nombre fini de fois ce procédé, et on trouve 2 entiers relatifs u et v tels que: $au+bv=\mathscr{P}\mathrm{gcd}(a;b)$

4.9. Exercices

Pour les exemples suivants, calculer $\mathscr{P}\mathrm{gcd}(a;b)$ et déterminer des entiers relatifs u et v tels que $au+bv=\mathscr{P}\mathrm{gcd}(a;b)$

a) $a = 11222 \quad b = 279$

a	b	Quotient	reste
11222	279	40	62
279	62	4	31
62	31	2	0

$\mathscr{P}\mathrm{gcd}(a;b)=31$

$a = 40b + 62$

Donc, $62 = a - 40b$

$b = 4 \times 62 + 31$

$b = 4(a - 40b) + 31$

$b = 4a - 160b + 31$

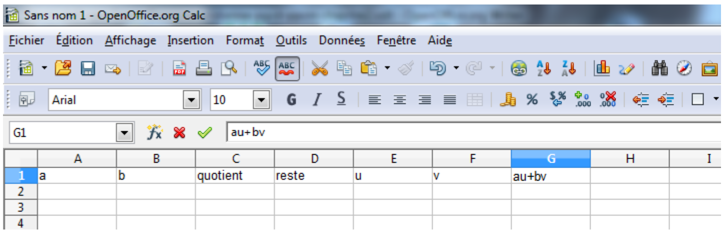
Donc, $31 = -4a + 161b$

$u=-4$ et $v=161$

On peut utiliser un tableur:

En A1: a En B1: b En C1: quotient En D1: reste En E1: u En F1: v

En G1: $au+bv$



	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1	a	b	quotient	reste	u	v	au+bv		
2									
3									
4									

En A2: 11222 En B2: 279 En C2: «=quotient(A2;B2) » En D2: «=mod(A2;B2) »

En E2: « =1 » En F2: « =-C2 » En G2: « =A$2*E2+B$2*F2 »

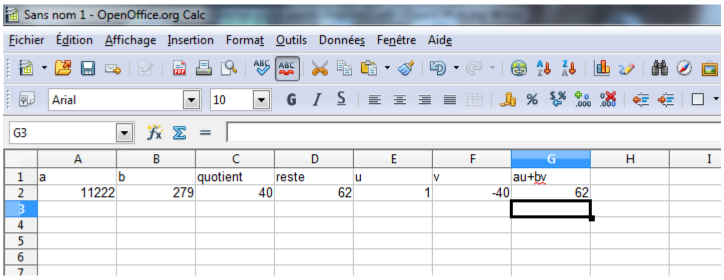
car:

$a=bq_1+r_1$

$r_1=a-bq_1$

Donc, $u=1$ et $v=-q_1$

$r_1=E2\times a+F2\times b$



	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1	a	b	quotient	reste	u	v	au+bv		
2	11222	279	40	62	1	-40	62		
3									
4									
5									
6									
7									

En A3: « =B2 » En B3: « =D2 »

Pour C3 et D3, on étire les formules C2 et D2

En E3: « =-E2*C3 » En F3: « =1-F2*C3 »

car:

$b=r_1q_2+r_2$

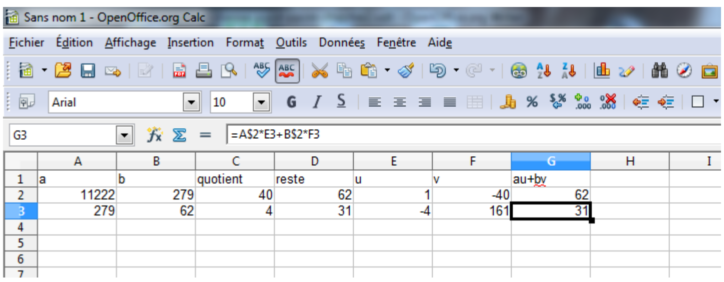
$b=(E2\times a+F2\times b)\times C3+r_2$

donc:

$r_2=(-E2\times C3)\times a+(1-F2\times C3)\times b$

$r_2=E3\times a+F3\times b$

Pour G3, on étire la formule de G2.



	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1	a	b	quotient	reste	u	v	au+bv		
2	11222	279	40	62	1	-40	62		
3	279	62	4	31	-4	161	31		
4									
5									
6									
7									

Pour E4; B4; C4; Da, on étire les formules des cellules A3; B3; C3 et D3.

En E4: « =E2-E3∗C4 » En F4: « F2-F3∗C4 »

car:

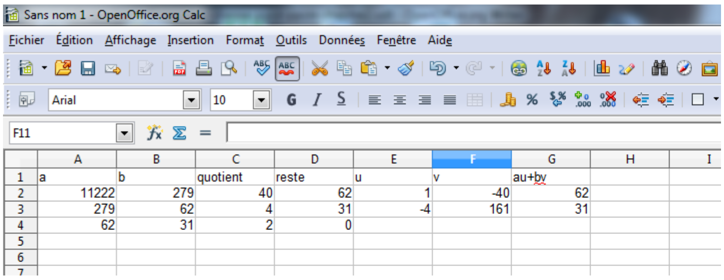
$r_1=r_2 q_3+r_3$

$E2\times a+F2\times b=(E3\times a+F3\times b)\times C4+r_3$

$r_3=(E2-E3\times C4)\times a+(F2-F3\times C4)\times b$

Pour G4, on étire la formule de G3.

On continue autant que nécessaire, on arrête lorsque l'on obtient 0 dans la colonne reste.



	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1	a	b	quotient	reste	u	v	au+bv		
2	11222	279	40	62	1	-40	62		
3	279	62	4	31	-4	161	31		
4	62	31	2	0					
5									
6									

On retrouve $\mathscr{P}$gcd$(a;b)=31=-4a+161b$

b) $a=6157$ $b=1645$

a	b	Quotient	reste
6157	1645	3	1222
1645	1222	1	423
1222	423	2	376
423	376	1	47
376	47	8	0

$\mathscr{P}$gcd$(a;b)=47$

$a=3b+1222$

Donc, $1222=a-3b$

$b=1\times 1222+423$

$b=1(a-3b)+423$

$b=a-3b+423$

Donc, $423=-a+4b$

$1222=2\times 423+376$

$a-3b=2(-a+4b)+376$

$a-3b=-2a+8b+376$

Donc, $376=3a-11b$

$423=1\times 376+47$

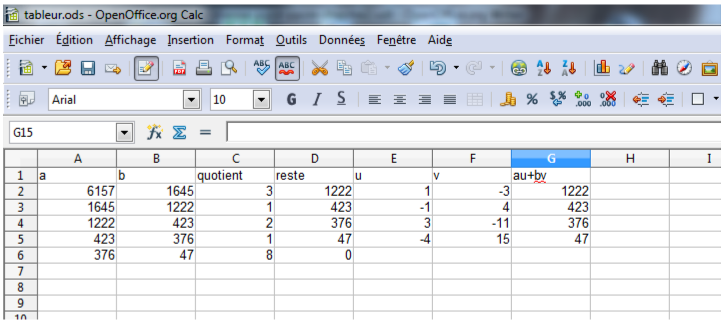
$-a+4b=1(3a-11b)+47$

$-a+4b=3a-11b+47$

Donc, $47=-4a+15b$

$u=-4$ et $v=15$

On peut aussi utiliser le tableur:



	A	B	C	D	E	F	G
1	a	b	quotient	reste	u	v	au+bv
2	6157	1645	3	1222	1	-3	1222
3	1645	1222	1	423	-1	4	423
4	1222	423	2	376	3	-11	376
5	423	376	1	47	-4	15	47
6	376	47	8	0			

c) $a=1027$ $b=181$

a	b	Quotient	reste
1027	181	5	122
181	122	1	59
122	59	2	4
59	4	14	3
4	3	1	1
1	1	1	0

$\mathscr{P}$gcd(a;b)=1

$a=5b+122$

Donc, $122=a-5b$

$b=1\times 122+59$

$b=1(a-5b)+59$

$b=a-5b+59$

Donc, $59=-a+6b$

$122=2\times 59+4$

$a-5b=2(-a+6b)+4$

$a-5b=-2a+12b+4$

Donc, $4=3a-17b$

$59=14\times4+3$

$-a+6b=14(3a-17b)+3$

$-a+6b=42a-238b+3$

Donc, $3=-43a+244b$

$4=1\times3+1$

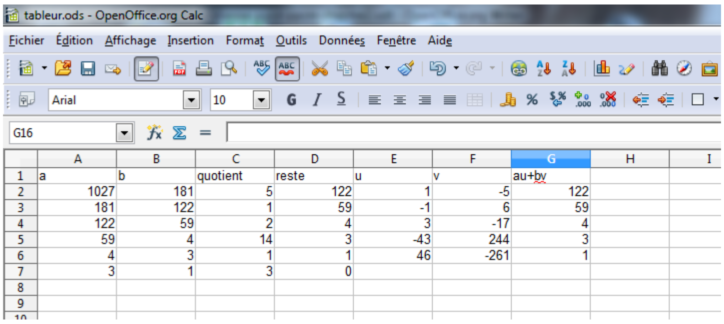
$3a-17b=1(-43a+244b)+1$

$3a-17b=-43a+244b+1$

Donc, $1=46a-261b$

$u=46$ et $v=-261$

On peut aussi utiliser le tableur:



tableur.ods - OpenOffice.org Calc

	A	B	C	D	E	F	G
1	a	b	quotient	reste	u	v	au+bv
2	1027	181	5	122	1	-5	122
3	181	122	1	59	-1	6	59
4	122	59	2	4	3	-17	4
5	59	4	14	3	-43	244	3
6	4	3	1	1	46	-261	1
7	3	1	3	0			

4.10. Plus grand diviseur commun de *n* nombres

a, b, c Sont 3 entiers non nuls.

$\mathscr{P}\text{gcd}(a;b)=\delta_1$ $\mathscr{P}\text{gcd}(a;c)=\delta_2$ $\mathscr{P}\text{gcd}(b;c)=\delta_3$

Alors, $\mathscr{P}\text{gcd}(a;b;c)=\mathscr{P}\text{gcd}(\delta_1;c)=\mathscr{P}\text{gcd}(\delta_2;b)=\mathscr{P}\text{gcd}(\delta_3;a)$

Si $n\in\mathbb{N}$, $n\geqslant2$.

On peut définir par récurrence le $\mathscr{P}$gcd de n entiers naturels non nuls.

Si $\mathscr{P}\text{gcd}(a_1;a_2;\ldots;a_n)=\delta_n$

Alors, $\mathscr{P}\text{gcd}(a_1;a_2;\ldots;a_n;a_{n+1})=\mathscr{P}\text{gcd}(\delta_n;a_{n+1})=\delta_{n+1}$

4.11. Remarque

Après avoir décomposé les deux entiers naturels non nuls a et b en produit de facteurs premiers, pour calculer le $\mathscr{P}$gcd de a et b, on effectue le produit des facteurs premiers communs à a et b, chacun étant affecté de son plus petit exposant.

Exemple:

$a = 5282200$ $b = 5505500$

$a = 2^3 \times 5^2 \times 7^4 \times 11$ $b = 2^2 \times 5^3 \times 7 \times 11^2 \times 13$

$\mathscr{P}$gcd(a;b)= $2^2 \times 5^2 \times 7 \times 11 = 7700$

5. Nombres premiers entre eux

5.1. Définitions

Deux entiers naturels non nuls a et b sont **premiers entre eux** si et seulement si leur $\mathscr{P}$gcd est égal à 1.

Des entiers naturels non nuls $a_1 ; a_2 ; \ldots ; a_n$ sont **premiers entre eux dans leur ensemble** si et seulement si leur $\mathscr{P}$gcd est égal à 1.

5.2. Théorème

Les quotients de deux entiers naturels non nuls par leur $\mathscr{P}$gcd sont deux nombres premiers entre eux.

Démonstration:
a et b sont deux entiers naturels non nuls.
$\mathscr{P}\text{gcd}(a ; b) = \delta$
$a = \delta a'$ $b = \delta b'$
$\mathscr{P}\text{gcd}(a ; b) = \delta = \mathscr{P}\text{gcd}(\delta a' ; \delta b') = \delta\, \mathscr{P}\text{gcd}(a' ; b')$
Donc $\mathscr{P}\text{gcd}(a' ; b') = 1$
Donc, a' et b' sont donc premiers entre eux.

5.3. Théorème de Bezout

Deux entiers naturels non nuls a et b sont **premiers entre eux** si et seulement si il existe des entiers relatifs u et v vérifiant $au+bv=1$.

Démonstration:

- On suppose que $\mathscr{P}\text{gcd}(a ; b) = 1$

Or, il existe des entiers relatifs u et v tels que $au + bv = \mathscr{P}\text{gcd}(a ; b) = 1$

- On suppose qu'il existe des entiers relatifs u et v tels que $au + bv = 1$

Soit d un diviseur commun de a et b. Il faut montrer que $d = 1$.

d divise a et b donc donc d divise $au + bv$.

C'est à dire d divise 1 donc $d = 1$.

5.4. Théorème de Gauss

a; b et *c* sont trois entiers naturels non nuls.

Si *a* divise le produit *bc* et si *a* est premier avec *b* alors *a* divise *c.*

C'est à dire:

Si *a* divise *bc*

Si $\mathscr{P}$gcd(*a;b*)=1

Alors *a* divise *c*.

<u>Démonstration:</u>

a et *b* sont premiers entre eux. D'après le théorème de Bezout, il existe deux entiers relatifs *u* et *v* tels que $au+bv=1$

On multiplie par *c* les deux membres de cette égalité. On obtient:

$acu+bcv=c$

a divise *ac* et *a* divise *bc* alors *a* divise *acu+bcv*

Donc *a* divise *c*

5.5. Conséquences

$a_1;a_2;b$ sont des entiers naturels non nuls. Si $a_1;a_2$ divisent *b* et si $a_1;a_2$ *sont* premiers entre eux alors $a_1\times a_2$ divise *b*

C'est à dire:

Si a_1 divise *b*

Si a_2 divise *b*

Si $\mathscr{P}$gcd $(a_1;a_2)=1$

Alors $a_1\times a_2$ divise *b*.

<u>Démonstration:</u>

a_1 divise *b* donc il existe $q\in\mathbb{N}^*$ tel que $a_1q=b$

Comme a_2 divise b , a_2 divise a_1q .
$\mathscr{P}$gcd $(a_1;a_2)=1$

Donc, d'après le théorème de Gauss: a_2 divise q.

Il existe $q'\in\mathbb{N}^*$ tel que $a_2q'=q$

Ainsi, $b=a_1a_2q'$

Donc, $a_1\times a_2$ divise *b*.

$n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$. $a ; b_1 ; b_2 ; ... ; b_n$ et c sont des entiers naturels non nuls.
Si a divise $b_1 b_2 \dots b_n c$
Si $\mathcal{P}\text{gcd}\,(a ; b_1) = 1$
Si $\mathcal{P}\text{gcd}\,(a ; b_2) = 1$
...
Si $\mathcal{P}\text{gcd}\,(a ; b_n) = 1$
Alors a divise c.

Pour démontrer ce résultat, on peut effectuer un raisonnement par récurrence.

$a ; b ; n$ et m sont des entiers naturels non nuls.
Si $\mathcal{P}$gcd(a;b)=1
Alors $\mathcal{P}\text{gcd}\,(a^n ; b^m) = 1$

6. Plus petit commun multiple

6.1. Exemple

On considère les multiples entiers naturels non nuls de 9 et 12.

$M_9 = \{9k , k \in \mathbb{N}\} = \{9 ; 18 ; 27 ; 36 ; 45 ; 54 ; 63 ; 72 ; 81 ; 90 ; 99 ; 108 ; 117 ; ... \}$

$M_{12} = \{12k , k \in \mathbb{N}\} = \{12 ; 24 ; 36 ; 48 ; 60 ; 72 ; 84 ; 96 ; 108 ; 120 ; ... \}$

L'ensemble des multiples communs non nuls de 9 et 12 est:

$M_9 \cap M_{12} = \{36 ; 72 ; 108 ; ... \}$

36 est le plus petit multiple commun non nul de 9 et 12.

<u>Remarque:</u>

$108 = 9 \times 12$

6.2. Définition

a et b sont des entiers naturels non nuls. $M_a \cap M_b$ contient ab donc admet un plus petit élément m .

Le plus petit élément de $M_a \cap M_b$ se nomme **le plus petit multiple commun de *a* et *b***
et se note $\mathcal{P}$pcm(a;b) ou $a \vee b$.

6.3. Remarque

L'ensemble des multiples communs des deux entiers naturels non nuls a et b est l'ensemble des multiples de leur $\mathcal{P}$pcm

6.4. Propriété

$\mathscr{P}$pcm(a ;b)=$\mathscr{P}$pcm(b ;a)

6.5. $\mathscr{P}$pcm de deux nombres premiers entre eux

a ; b sont des entiers naturels non nuls.
Si $\mathscr{P}$gcd(a ;b)=1 alors $\mathscr{P}$pcm(a ;b)=ab

<u>Démonstration:</u>

Soit m un multiple commun de a et b.

$m=qa=q'b$ avec $q\in\mathbb{N}^*$ et $q'\in\mathbb{N}^*$.

a divise qa donc a divise $q'b$

a divise $q'b$

$\mathscr{P}$gcd(a ;b)=1

Donc, d'après le théorème de Gauss: a divise q'

Donc il existe $k\in\mathbb{N}^*$ tel que $q'=ka$

Donc $m=q'b=kab\geqslant ab$

Par suite,

$\mathscr{P}$pcm(a ;b)=ab

6.6. $\mathscr{P}$pcm de deux entiers naturels non nuls

a ; b sont deux entiers naturels non nuls.
Si $\mathscr{P}$gcd $(a;b)=\delta$ alors $\mathscr{P}$pcm $(a;b)=\delta a'b'$ avec $a=\delta a'$ et $b=\delta b'$.

<u>Démonstration:</u>
$\mathscr{P}$gcd $(a';b')=1$

$\delta a'b'=ab'=ba'$

Donc $\delta a'b'$ est un multiple commun de a et b.

Soit m un multiple commun de a et b

$m=qa=q'b$ avec $q\in\mathbb{N}^*$ et $q'\in\mathbb{N}^*$.

$m=q\delta a'=q'\delta b'$

Donc $qa'=q'b'$

a' divise $q'b'$

$\mathscr{P}$gcd(a' ;b')=1

Donc, d'après le théorème de Gauss

a' divise q'

Il existe $k \in \mathbb{N}^*$ tel que $q' = a'k$

Donc: $qa' = q'b' = ka'b'$

$m = q\delta a' = \delta k a'b' \geq \delta a'b'$

Donc, $\mathscr{P}$pcm $(a;b) = \delta a'b'$

6.7. Relation entre le $\mathscr{P}$pcm et le $\mathscr{P}$gcd de deux entiers naturels non nuls

Si a et b sont deux entiers naturels non nuls.

alors $\mathscr{P}$gcd$(a\ ;b) \times \mathscr{P}pcm(a\ ;b)=ab$

Démonstration:

$\mathscr{P}$gcd $(a;b) = \delta$

$\mathscr{P}$pcm $(a;b) = \delta a'b'$ avec $a = \delta a'$ et $b = \delta b'$

Donc:

$\mathscr{P}$gcd$(a\ ;b) \times \mathscr{P}pcm(a\ ;b) = \delta \times \delta a'b' = (\delta a')(\delta b') = ab$

6.8. Conséquence

Si a; b et k sont des entiers naturels non nuls

alors $\mathscr{P}$pcm$(ka\ ;kb)=k\mathscr{P}$pcm$(a\ ;b)$

Démonstration:

$\mathscr{P}$gcd$(ka\ ;kb) \times \mathscr{P}pcm(ka;kb)=(ka) \times (kb)$

$k\mathscr{P}$gcd$(a\ ;b) \times \mathscr{P}pcm(ka;kb)=k^2ab$

$\mathscr{P}$gcd$(a\ ;b) \times \mathscr{P}pcm(ka;kb)=kab$

Or $\mathscr{P}$gcd$(a\ ;b) \times \mathscr{P}pcm(a\ ;b)=ab$

Donc: $\mathscr{P}$gcd$(a\ ;b) \times \mathscr{P}pcm(ka;kb)=k\mathscr{P}gcd(a\ ;b) \times \mathscr{P}pcm(a\ ;b)$

Et: $\mathscr{P}$pcm$(ka;kb)=k\mathscr{P}$pcm$(a\ ;b)$

6.9. Remarque

Après avoir décomposé les deux entiers naturels non nuls a et b en produit de facteurs premiers, pour calculer le $\mathscr{P}$pcm de a et b, on effectue le produit de tous les facteurs premiers figurant dans a ou dans b chacun affecté de son plus grand exposant.

Exemple:

$a = 5282200$	$b = 5505500$
$a = 2^3 \times 5^2 \times 7^4 \times 11$	$b = 2^2 \times 5^3 \times 7 \times 11^2 \times 13$

$\mathscr{P}pcm(a;b) = 2^3 \times 5^3 \times 7^4 \times 11^2 \times 13$

7. Utilisation d'un logiciel

7.1. Géogébra

Pour la division euclidienne, on a les instructions suivantes :

quotient[a,b] et reste[a,b]

b est un entier naturel non nul et a est un entier relatif.

Exemple

$a=10213$ et $b=57$

On entre dans la barre de saisie : q=quotient[10213,57]

Le résultat s'affiche dans la partie algèbre : q=179.

On entre dans la barre de saisie : r=reste[10213,57]

Le résultat s'affiche dans la partie algèbre : r=10.

Pour le pgcd de deux entiers naturels non nuls, on a l'instruction suivante :

pgcd[a,b]

Exemple

$a=10213$ et $b=714$

On entre dans la barre de saisie : d=pgcd[10213,714]

Le résultat s'affiche dans la partie algèbre : d=7

Pour le ppcm de deux entiers naturels non nuls, on a l'instruction suivante :

ppcm[a,b]

Exemple

$a=10213$ et $b=714$

On entre dans la barre de saisie : m=ppcm[10213,714]

Le résultat s'affiche dans la partie algèbre : m=10 471 726

7.2. Xcas

Dans l'application arithmétique.

Pour la division euclidienne, on a les instructions suivantes :

iquo(a,b) pour le quotient.

irem(a,b) pour le reste.

Exemple

$a=10213$ et $b=57$

On entre dans la barre de saisie : iquo(10213,57)

Le résultat affiché est 179.

On entre dans la barre de saisie : irem(10213,57)

Le résultat affiché est 10.

Pour le pgcd de deux entiers naturels non nuls, on a l'instruction suivante :

gcd(a,b)

Exemple

$a=10213$ et $b=714$

On entre dans la barre de saisie : gcd(10213,714)

Le résultat affiché est 7.

Pour le ppcm de deux entiers naturels non nuls, on a l'instruction suivante :

lcm(a,b)

Exemple

$a=10213$ et $b=714$

On entre dans la barre de saisie : lcm(10213,714)

Le résultat affiché est 1 041 726.