Fiche exercices

EXERCICE 1

1. Un entier naturel N s'écrit $\overline{34027}$ en base 8. Écrire N en base 10.
2. Un entier naturel N s'écrit $\overline{xy}$ en base 5 et $\overline{yx}$ en base 7. Déterminer ce nombre en base 10.
3. Écrire 28 et 78 en base 2.
4. Les chiffres en base 12 sont: 0; 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9; α (dix); β (onze)

a) Écrire 345 et 1726 en base 12.

b) N s'écrit $\overline{\alpha\beta\alpha\beta}$ en base 12. L'écrire en base 10.

5. Effectuer les opérations suivantes en base 2:

$\overline{1100101} + \overline{1011111} =$

$\overline{111000} - \overline{1010} =$

EXERCICE 2

a et b sont deux entiers naturels non nuls tels que $a > b$. Leur somme est 444 et la division euclidienne de a par b donne 4 pour quotient et 24 pour reste. Déterminer a et b.

EXERCICE 3

n est un entier naturel non nul et on désigne respectivement par q et r le quotient et le reste de la division euclidienne de n par 125.
Déterminer les entiers naturels n tels que $q^3 = r$.

EXERCICE 4

Pour chacune des affirmations de 1. à 5., dire si elle est vraie ou si elle est fausse.

1. Si un nombre est divisible par 4 alors il est divisible par 8.
2. Si un nombre est divisible par 2 et 3 alors il est divisible par 6.
3. Si un nombre est divisible par 4 et 6 alors il est divisible par 24.
4. Si deux entiers a et b sont premiers entre eux alors les entiers $a+b$ et $a-b$ sont premiers entre eux.
5. Si deux entiers a et b sont premiers entre eux alors les entiers $2a+b$ et $3a+2b$ sont premiers entre eux.

EXERCICE 5

x et y sont des entiers naturels non nuls, vérifiant $x < y$.
S est l'ensemble des couples $(x\,;y)$ tels que $\mathscr{P}$gcd $(x\,;y) = y-x$

1. a) Calculer $\mathscr{P}$gcd(363;484)

b) Le couple (363;484) appartient-il à S?

2. Soit n un entier naturel non nul. Le couple $(n\,;n+1)$ appartient-il à S? Justifier la réponse.

3. a) Montrer que $(x\,;y)$ appartient à S si et seulement si il existe un entier naturel non nul k tel que $x = k(y-x)$ et $y = (k+1)(y-x)$

b) En déduire que pour tout couple $(x\,;y)$ de S, on a $\mathscr{P}$pcm $(x\,;y) = k(k+1)(y-x)$

4. a) Déterminer l'ensemble des entiers naturels diviseurs de 228.

b) En déduire l'ensemble des couples $(x\,;y)$ de S tels que $\mathscr{P}$pcm $(x\,;y) = 228$.

EXERCICE 6

1. a s'écrit 68425 dans le système décimal. Écrire ce nombre dans le système de base 8 puis dans le système de base 12.

2. b s'écrit $\overline{16524}$ dans le système de base 7. Écrire ce nombre dans le système décimal.

EXERCICE 7

Déterminer de $\mathscr{P}$gcd des nombres:

$a=13230$ et $b=2100$

EXERCICE 8

Soit n un entier naturel strictement supérieur à 3. a et b sont respectivement définis par:

$a=n^2-7n+15$ et $b=n-3$

1. Déterminer trois entiers relatifs $\alpha;\beta;\gamma$ tels que, quel que soit n , on ait:

$n^2-7n+15=(\alpha n+\beta)(n-3)+\gamma$

2. En déduire le quotient et le reste de la division euclidienne de a par b.

EXERCICE 9

p et q sont deux entiers naturels non nuls premiers entre eux.

1. Montrer que les entiers naturels:

$a=9p+4q$ et $b=2p+q$ sont premiers entre eux.

2. Déterminer le $\mathscr{P}$pcm des entiers naturels:

$c=9p+4$ et $d=2p+1$

EXERCICE 10

n est un entier naturel.

On considère les entiers naturels $N=n^3-2n+5$ et $Q=n+1$. (On ne demande pas de justifier que le nombre N est un entiers naturel)

1. Démontrer que le $\mathscr{P}$gcd(N;Q)=$\mathscr{P}$gcd(Q;6)

2. Pour quelles valeurs de n a-t-on $\mathscr{P}$gcd(N; Q)=3

3. Déterminer les valeurs de n pour lesquelles $\frac{N}{Q}$ est un entier naturel.

EXERCICE 11

Pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 5, on considère les nombres:

$a=n^3-n^2-12n$ et $b=2n^2-7n-4$

1. Montrer, après factorisation, que a et b sont des entiers naturels divisibles par $n-4$.

2. On pose $\alpha=2n+1$ et $\beta=n+3$. On note d le pgcd de α et β .

a) Établir une relation entre α et β indépendante de n.

b) Démontrer que d est un diviseur de 5.

c) Démontrer que les nombres α et β sont multiples de 5 si et seulement si $n-2$ est multiple de 5.

3. Montrer que: $2n+1$ et n sont premiers entre eux.

4. a) Déterminer suivant les valeurs de n et en fonction de n le $\mathscr{P}$gcd de a et b.

b) Vérifier les résultats obtenus dans les cas particuliers $n=11$ et $n=12$

CORRECTION

EXERCICE 1

1.
$N=3\times 8^4+4\times 8^3+0\times 8^2+2\times 8^1+7\times 8^0$
$N=3\times 4096+4\times 512+0\times 64+2\times 8+7\times 1$
$N=12288+2048+16+7$
$\boxed{N=14359}$

2.
N s'écrit $\overline{xy}$ en base 5, donc
$x\in\mathbb{N}$ $\quad 1\leqslant x\leqslant 4$
$y\in\mathbb{N}$ $\quad 0\leqslant y\leqslant 4$
et $N=x\times 5^1+y\times 5^0$
$\boxed{N=5x+y}$

N s'écrit $\overline{yx}$ en base 7, donc
$y\in\mathbb{N}$ $\quad 1\leqslant y\leqslant 7$
$x\in\mathbb{N}$ $\quad 0\leqslant x\leqslant 7$
et $N=y\times 7^1+x\times 7^0$
$\boxed{N=7y+x}$

<u>Conséquence:</u>
$x\in\mathbb{N}$ $\quad 1\leqslant x\leqslant 4$
$y\in\mathbb{N}$ $\quad 1\leqslant y\leqslant 4$
et $5x+y=7y+x$
$4x=6y$

Si $x=1$ alors $y=\frac{2}{3}\notin\mathbb{N}$

Si $x=2$ alors $y=\frac{4}{3}\notin\mathbb{N}$

Si $x=3$ alors $y=2\in\mathbb{N}$

Si $x=4$ alors $y=\frac{8}{3}\notin\mathbb{N}$

Donc: $x=3$ et $y=2$ et $\boxed{N=5\times 3+2=17}$

3.
On effectue des division euclidiennes successives par 2.

$$\begin{array}{llllll}
28 & \underline{|\,2} & & & & \\
08 & |\,14 & \underline{|\,2} & & & \\
0 & 0 & |\,7 & \underline{|\,2} & & \\
 & & 1 & |\,3 & \underline{|\,2} & \\
 & & & 1 & |\,1 & \underline{|\,2} \\
 & & & & 1 & |\,0
\end{array}$$

28 s'écrit $\overline{11100}$ en base 2

$$\begin{array}{r|r|r|r|r|r|r|l}
78 & 2 \\
18 & 39 & 2 \\
0 & 19 & 19 & 2 \\
 & 1 & 1 & 9 & 2 \\
 & & & 1 & 4 & 2 \\
 & & & & 0 & 2 & 2 \\
 & & & & & 0 & 1 & 2 \\
 & & & & & & 1 & 0
\end{array}$$

78 s'écrit $\overline{\mathbf{1001110}}$ en base 2

4.
a)
On effectue des division euclidiennes successives par 12.

$$\begin{array}{r|r|r|l}
345 & 12 \\
105 & 28 & 12 \\
9 & 4 & 2 & 12 \\
 & & 2 & 0
\end{array}$$

345 s'écrit $\overline{\mathbf{249}}$ en base 12

$$\begin{array}{r|r|r|l}
1726 & 12 \\
52 & 143 & 12 \\
46 & 23 & 11 & 12 \\
10 & 11 & 11 & 0 \\
\uparrow & \uparrow & \uparrow & \\
\alpha & \beta & \beta &
\end{array}$$

1726 s'écrit $\overline{\beta\beta\alpha}$ en base 12

b)
$N=10\times 12^3+11\times 12^2+10\times 12^1+11\times 12^0$
$N=10\times 1728+11\times 144+10\times 12+11\times 1$
$N=17280+1584+120+11$
$\boxed{N=18995}$

5.
1+1=2 (en base 10)

$$\begin{array}{r|r|l}
2 & 2 \\
0 & 1 & 2 \\
 & 1 & 0
\end{array}$$

2 s'écrit en base 2: $\overline{10}$
On pose 0 et on retient 1

$$\begin{array}{r}
{\scriptstyle +1+1} \\
1100101 \\
+1011111 \\
\hline
= \qquad 00
\end{array}$$

1+1+1=3 (en base 10)

$$\begin{array}{l|l}
3 & 2 \\ \hline
1 & 1 \;\begin{array}{|l}2 \\ \hline 0\end{array} \\
 & 1
\end{array}$$

3 s'écrit en base 2: $\overline{11}$

$$\begin{array}{r}
{\scriptstyle +1+1+1+1+1+1} \\
1100101 \\
+\ 1011111 \\ \hline
=\mathbf{11000100}
\end{array}$$

$$\begin{array}{r}
{\scriptstyle +2+2+2} \\
111000 \\
-\quad 1010 \\
{\scriptstyle +1+1+1} \\ \hline
=\mathbf{101110}
\end{array}$$

EXERCICE 2

$a+b=444$ et $a=4b+24$ avec $0\leqslant 24<b$

$a=444-b$ et $a=4b+24$ avec $0\leqslant 24<b$

Donc,

$444-b=4b+24$

$5b=420$

$\boxed{b=\frac{420}{5}=84}$

$\boxed{a=444-84=360}$

EXERCICE 3

$n\in\mathbb{N}^*$ $n=125q+r$ avec $0\leqslant r<125$

$q^3=r<125=5^3$

donc $q<5$

Si $q=0$ alors $r=0$ et $n=0$ non solution

Si $q=1$ alors $r=1$ et $n=126$

Si $q=2$ alors $r=8$ et $n=258$

Si $q=3$ alors $r=27$ et $n=402$

Si $q=4$ alors $r=64$ et $n=564$

Donc:

$\boxed{n=126}$ ou $\boxed{n=258}$ ou $\boxed{n=402}$ ou $\boxed{n=564}$

EXERCICE 4

1. Si un nombre est divisible par 4 alors il est divisible par 8.

FAUX

20 est divisible par 4 mais 20 n'est pas divisible par 8.

2. Si un nombre est divisible par 2 et 3 alors il est divisible par 6.

VRAI

Soit n divisible par 2 et 3

Donc: $n=2k$ et $n=3k'$ avec $k\in\mathbb{N}$ et $k'\in\mathbb{N}$

$2k=3k'$

3 divise $2k$
$\mathcal{P}$gcd(2;3)=1
D'après le théorème de Gauss, 3 divise k
Il existe $q\in\mathbb{N}$ tel que $k=3q$

Par suite,
$n=2\times 3q$
$n=6q$
Donc, n est divisible par 6.

3. Si un nombre est divisible par 4 et 6 alors il est divisible par 24.

FAUX
12 est divisible par 4 et 6 mais 12 n'est pas divisible par 24.

4. Si deux entiers a et b sont premiers entre eux alors les entiers $a+b$ et $a-b$ sont premiers entre eux.

FAUX
$a=7$ et $b=3$
$\mathcal{P}$gcd(a;b)=1

$a+b=10$ et $a-b=4$
$\mathcal{P}$gcd(a+b;a-b)=2

Pour trouver un autre contre exemple, il suffit de considérer 2 nombres premiers entre eux et impairs.

5. Si deux entiers a et b sont premiers entre eux alors les entiers $2a+b$ et $3a+2b$ sont premiers entre eux.

VRAI
On pose:
$A=2a+b$ (1)
$B=3a+2b$ (2)

D'après (1): $b=A-2a$
On remplace dans (2):
$B=3a+2(A-2a)$
$B=3a+2A-4a$
$a=2A-B$

On remplace dans (1):
$A=2(2A-B)+b$
$A=4A-2B+b$
$b=-3A+2B$

Pour montrer que A et B sont premiers entre eux, nous allons utiliser le théorème de Bezout.

a et b sont premiers entre eux, donc d'après le théorème de Bezout, il existe deux entiers relatifs u et v tels que:
$\boxed{au+bv=1}$

donc:
$(2A-B)u+(-3A+2B)v=1$
$A(2u-3v)+B(-u+2v)=1$

On pose $U=2u-3v$ et $V=-u+2v$
$U\in\mathbb{Z}$ et $V\in\mathbb{Z}$

D'après le théorème de Bezout, les nombres A et B sont **premiers entre eux**.

EXERCICE 5

x et y sont des entiers naturels non nuls, vérifiant $x<y$.
S est l'ensemble des couples $(x;y)$ tels que $\mathscr{P}$gcd $(x;y)=y-x$

1. a) Calculer $\mathscr{P}$gcd(363;484)

b) Le couple (363;484) appartient-il à S?

2. Soit n un entier naturel non nul. Le couple $(n;n+1)$ appartient-il à S? Justifier la réponse.

3. a) Montrer que $(x;y)$ appartient à S si et seulement si il existe un entier naturel non nul k tel que $x=k(y-x)$ et $y=(k+1)(y-x)$

b) En déduire que pour tout couple $(x;y)$ de S, on a $\mathscr{P}$pcm $(x;y)=k(k+1)(y-x)$

4. a) Déterminer l'ensemble des entiers naturels diviseurs de 228.

b) En déduire l'ensemble des couples $(x;y)$ de S tels que $\mathscr{P}$pcm $(x;y)=228$

EXERCICE 6

1.

$$\begin{array}{r|l|l|l|l|l|l}
68425 & 8 & & & & & \\
44 & 8553 & 8 & & & & \\
42 & 05 & 1069 & 8 & & & \\
25 & 55 & 26 & 133 & 8 & & \\
1 & 73 & 29 & 53 & 16 & 8 & \\
 & 1 & 5 & 5 & 0 & 2 & 8 \\
 & & & & & 2 & 0
\end{array}$$

a s'écrit $\overline{205511}$ en base 8.

$$\begin{array}{r|l|l|l|l|l}
68425 & 12 & & & & \\
84 & 5702 & 12 & & & \\
02 & 90 & 475 & 12 & & \\
25 & 62 & 115 & 39 & 12 & \\
1 & 2 & 7 & 3 & 3 & 12 \\
 & & & & 3 & 0
\end{array}$$

a s'écrit $\overline{33721}$ en base 12.

2.

$b=1\times 7^4+6\times 7^3+5\times 7^2+2\times 7^1+4\times 7^0$

$b=2401+2058+245+14+4$

$b=4722$

EXERCICE 7

Déterminer de $\mathscr{P}$gcd des nombres:

$a=13230$ et $b=2100$

a	b	quotient	reste
13230	2100	6	630
2100	630	3	210
630	210	3	0

.$\mathscr{P}$gcd(13230;2100)=210

EXERCICE 8

1.

✔ méthode par identification

$n^2-7n+15=(\alpha n+\beta)(n-3)+\gamma$

$n^2-7n+15=\alpha n^2+\beta n-3\alpha n+\gamma-3\beta$

$n^2-7n+15=\alpha n^2+(\beta-3\alpha)n+\gamma-3\beta$

On a l'égalité pour tout n si et seulement si tous les coefficients sont égaux:

$$\begin{cases} 1=\alpha \\ -7=\beta-3\alpha \\ 15=\gamma-3\beta \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha=1 \\ \beta=-4 \\ \gamma=3 \end{cases}$$

Donc, $n^2-7n+15=(n-4)(n-3)+3$

Les valeurs trouvées sont bien des entiers relatifs.

✔ On peut donner à n trois valeurs distinctes pour obtenir un système de trois équations à trois inconnues $\alpha;\beta;\gamma$ que l'on résout, puis il faut vérifier pour tout n.

$n=0 \quad 15=-3\beta+\gamma \ (1)$

$n=1 \quad 9=-2\alpha-2\beta+\gamma \ (2)$

$n=2 \quad 5=-2\alpha-\beta+\gamma \ (3)$

On fait (3)-(2), on trouve: $\beta=-4$

On remplace dans (1), on trouve $\gamma=3$

On remplace dans (2) ou dans (3), on trouve $\alpha=1$

Maintenant, il faut vérifier pour tout n.

$(n-4)(n-3)+3$

$=n^2-3n-4n+12+3$

$=n^2-7n+15$

- On peut aussi faire le raisonnement suivant:

On veut l'égalité, pour tout n :

$n^2-7n+15=(\alpha n+\beta)(n-3)+\gamma$

Donc, en particulier pour $n=3$

$3^2-7\times3+15=(3\alpha+\beta)(3-3)+\gamma$

$\gamma=3$

On doit déterminer α et β tels que:

$n^2-7n+15=(\alpha n+\beta)(n-3)+3$

$n^2-7n+12=(\alpha n+\beta)(n-3)$

On factorise $n^2-7n+12$

$\Delta=49-4\times12$

$\Delta=49-48$

$\Delta=1$

$n_1=\dfrac{7-1}{2}=3 \quad n_2=\dfrac{7+1}{2}=4$

$n^2-7n+12=(n-4)(n-3)=(\alpha n+\beta)(n-3)$

D'où, $\alpha=1$ et $\beta=-4$

2.

$n^2-7n+15=(n-4)(n-3)+3$

$a=n^2-7n+15$ et $b=n-3$

$n>3$ alors $n-3>0$

$a=b(n-4)+3$

- Si $3<b=n-3$ c'est à dire $n>6$ alors le quotient de la division euclidienne de a par b est $n-4$ et le reste est 3.
- Si $n=4$, $a=4^2-7\times4+15=3$ et $b=1$ $3=1\times3+0$ le quotient est 3 et le reste est 0.
- Si $n=5$, $a=5^2-7\times5+15=5$ et $b=2$ $5=2\times2+1$ le quotient est 2 et le reste est 1.
- Si $n=6$, $a=6^2-7\times6+15=9$ et $b=3$ $9=3\times3+0$ le quotient est 3 et le reste est 0.

EXERCICE 9

1.

- On exprime p et q en fonction de a et b.

$\begin{cases} a=9p+4q \\ b=2p+q \end{cases}$

$\begin{cases} a=9p+4q \\ 4b=8p+4q \end{cases}$

On fait (1)-(2), on obtient:

$p=a-4b$

$b=2p+q$

$b=2(a-4b)+q$

$b=2a-8b+q$

$q=-2a+9b$

On a donc:

$p=a-4b$

$q=-2a+9b$

On veut montrer que $\mathscr{P}$gcd(a;b)=$\mathscr{P}$gcd(p;q)

Pour cela, il suffit de démontrer que l'ensemble des diviseurs communs à a et b est égal à l'ensemble des diviseurs communs à p et q.

Si d divise a et b alors d divise $a-4b$ et $-2a+9b$ donc d divise p et q.
Si d divise p et q alors d divise $9p+4q$ et $2p+q$ donc d divise a et b.

Par suite, l'ensemble des diviseurs communs à a et b est égal à l'ensemble des diviseurs communs à p et q et donc:
$\mathscr{P}$gcd(a;b)=$\mathscr{P}$gcd(p;q). p et q sont premiers entre eux donc a et b sont premiers entre eux.

- ✔ On peut aussi utiliser le théorème de Bezout.

p et q sont premiers entre eux donc il existe deux entiers relatifs u et v tels que: $pu+qv=1$

Donc:

$(a-4b)u+(-2a+9b)v=1$

$(u-2v)a+(-4u+9v)b=1$

On pose $U=u-2v$ et $V=-4u+9v$.

U et V sont des entiers relatifs.

$Ua+Vb=1$

D'après le théorème de Bezout, les nombres a et b sont premiers entre eux.

2.

$c=9p+4$ et $d=2p+1$

p est un entier naturel non nul, on choisit $q=1$ alors p et q sont premiers entre eux. On utilise le résultat de la question précédente alors c et d sont premiers entre eux donc $\mathscr{P}$pcm(c;d)=cd

$\mathscr{P}$pcm(c;d)=cd=(9p+4)(2p+1)

EXERCICE 10

1.

On veut déterminer des entiers relatifs $\alpha;\beta;\gamma;\delta$ vérifiant pour tout $n\in\mathbb{N}$:

$n^3-2n+5=(\alpha n^2+\beta n+\gamma)(n+1)+\delta$

$n^3-2n+5=\alpha n^3+\beta n^2+\gamma n+\alpha n^2+\beta n+\gamma+\delta$

$n^3-2n+5=\alpha n^3+(\alpha+\beta)n^2+(\beta+\gamma)n+\gamma+\delta$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}\alpha=1\\ \alpha+\beta=0\\ \beta+\gamma=-2\\ \gamma+\delta=5\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \alpha=1 \\ \beta=-1 \\ \gamma=-1 \\ \delta=6 \end{cases}$$

Donc, pour tout $n\in\mathbb{N}$, $n^3-2n+5=(n^2-n-1)(n+1)+6$

$6=n^3-2n+5-(n^2-n-1)(n+1)$

$6=N-(n^2-n+1)Q$

Tout diviseur commun de N et Q est un diviseur commun de Q et de 6.

De même, tout diviseur commun de Q et 6 est un diviseur commun de N et Q

Donc, $\mathcal{P}$gcd(N;Q)=$\mathcal{P}$gcd(Q;6)

2.

$\mathcal{P}$gcd(N;Q)=$\mathcal{P}$gcd(Q;6)=3

D_6={1; 2; 3; 6}

$\mathcal{P}$gcd(Q;6)=3

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \text{Q est un multiple de 3} \\ \text{Q n'est pas un nombre pair} \end{cases}$$

$\Leftrightarrow$ Q est un multiple impair de 3

$Q=n+1=3k$ avec $k\in\mathbb{N}$

Q n'est pas un nombre pair donc Q est impair, donc $k=2p+1$ avec $p\in\mathbb{N}$

$\mathcal{P}$gcd(Q;6)=3

$\Leftrightarrow n+1=3(2p+1) \quad p\in\mathbb{N}$

$\Leftrightarrow n=6p+2 \quad p\in\mathbb{N}$

S={6p+2; $p\in\mathbb{N}$ }

3.

$\mathcal{P}$gcd(N;Q)=$\mathcal{P}$gcd(Q;6)

$\frac{N}{Q}$ est un entier naturel

$\Leftrightarrow$ $\mathcal{P}$gcd(N;Q)=Q

$\Leftrightarrow$ $\mathcal{P}$gcd(Q;6)=Q

$\Leftrightarrow$ Q est un diviseur de 6

$Q=1 \quad n=0 \quad N=5 \qquad \frac{N}{Q}=5$

$Q=2 \quad n=1 \quad N=4 \qquad \frac{N}{Q}=2$

$Q=3 \quad n=2 \quad N=9 \qquad \frac{N}{Q}=3$

$Q=6 \quad n=5 \quad N=120 \qquad \frac{N}{Q}=20$

On obtient donc $n=0$ ou $n=1$ ou $n=2$ ou $n=5$

EXERCICE 11

1.

$a=n^3-n^2-12n$

$a=n(n^2-n-12)$

$\Delta=1+4\times12$

$\Delta=1+48$

$\Delta=49$

$n_1=\frac{1-7}{2}=-3 \qquad n_2=\frac{1+7}{2}=4$

$a=n(n+3)(n-4)$

$b=2n^2-7n-4$

$\Delta=49+4\times8$

$\Delta=49+32$

$\Delta=81$

$n_1=\frac{7-9}{4}=\frac{-2}{4}=-0,5 \quad n_2=\frac{7+9}{4}=4$

$b=2(n+0,5)(n-4)$

$b=(2n+1)(n-4)$

Pour $n\geqslant5$

$a=k(n-4)$ avec $k=n(n+3)\in\mathbb{N}$ donc a est divisible par $n-4$

$b=k'(n-4)$ avec $k'=(2n+1)\in\mathbb{N}$ donc b est divisible par $n-4$

2.

a)

$2\beta=2n+6$

$2\beta-\alpha=(2n+6)-(2n+1)$

$2\beta-\alpha=5$

b)

d=Pgcd(α ; β) donc d est un diviseur de α et β

$5=2\beta-\alpha$

Donc, d est un diviseur de 5.

c)

Si α et β sont multiples de 5:

$\beta=n+3=5k$ avec $k\in\mathbb{N}$

$\alpha=2n+1=5k'$ avec $k'\in\mathbb{N}$

$\alpha-\beta=n-2=5(k'-k)$ $\quad k'-k>0$ car $n\geqslant 5$

Donc $n-2$ est un multiple de 5

Si $n-2$ est un multiple de 5

$n-2=5K$ avec $K\in\mathbb{N}$

$n=5K+2$

$\beta=n+3=5K+5=5(K+1)$

$\alpha=2v+1=10K+4+1=10K+5=5(2K+1)$

Donc, α et β sont multiples de 5.

3.

Tout diviseur commun de $2n+1$ et n divise $(2n+1)-2n=1$ donc le seul diviseur commun de $2n+1$ et n est 1. $(2n+1)$ et n sont des nombres premiers entre eux.

4. a)

d est un diviseur de 5.

$D_5=\{1;5\}$

$\mathscr{P}$gcd $(\alpha;\beta)=5\Leftrightarrow n=5K+2$ avec $K\in\mathbb{N}$

$\mathscr{P}$gcd $(\alpha;\beta)=1\Leftrightarrow n\neq 5K+2$ avec $K\in\mathbb{N}$

- Si $n\neq 5K+2$ avec $K\in\mathbb{N}$, alors $\mathscr{P}$gcd $(\alpha;\beta)=1$, c'est à dire $\mathscr{P}$gcd($2n+1;n+3$)=1

Or $\mathscr{P}$gcd($2n+1;n$)=1

Donc:

$\mathscr{P}$gcd($2n+1;n(n+3)$)=1

et $\mathscr{P}$gcd($a;b$)=(n-4)$\mathscr{P}$gcd($2n+1;n(n+3)$)=n-4

- Si $n=5K+2$ avec $K\in\mathbb{N}$, alors $\mathscr{P}$gcd $(\alpha;\beta)=5$, c'est à dire $\mathscr{P}$gcd($2n+1;n+3$)=5

Or $\mathscr{P}$gcd($2n+1;n$)=1

Donc: $\mathscr{P}$gcd($2n+1;n(n+3)$)=5

et $\mathscr{P}$gcd($a;b$)=(n-4)$\mathscr{P}$gcd($2n+1;n(n+3)$)=5(n-4)

b)

$n=11=5\times 2+1$ $\qquad\mathscr{P}$gcd($a;b$)=11-4=7

$a=n^3-n^2-12n$ et $b=2n^2-7n-4$

$a = 1078$ et $b = 161$

a	b	quotient	reste
1078	161	6	112
161	112	1	49
112	49	2	14
49	14	3	7
14	7	2	0

$n = 12 = 5 \times 2 + 2$ $\mathscr{P}\text{gcd}(a;b)=5(12\text{-}4)=40$

$a = n^3 - n^2 - 12n$ et $b = 2n^2 - 7n - 4$

$a = 1440$ et $b = 200$

a	b	quotient	reste
1440	200	7	**40**
200	40	5	0

