

Équations du type $ax+by=c$

1. Généralités.....	p2	5. Exemple 4	p4
2. Exemple 1.....	p2	6. Exemple 5	p6
3. Exemple 2.....	p3	7. Utilisation du logiciel Xcas.....	p6
4. Exemple 3.....	p4		

1. Généralités

a et b sont des entiers relatifs non nuls donnés. c est un entier relatif.

On se propose de déterminer les entiers relatifs x et y tels que $ax+by=c$. (équations diophantiennes)

Remarque:

$(O; \vec{i}, \vec{j})$ est un repère du plan, on considère la droite (d) d'équation: $y=mx+ p$

Si m et p sont des nombres rationnels:

$$m = \frac{k}{l} \quad k \in \mathbb{Z} \text{ et } l \in \mathbb{N}^*$$

$$p = \frac{q}{r} \quad q \in \mathbb{Z} \text{ et } r \in \mathbb{N}^*$$

$$(d): y = \frac{k}{l}x + \frac{q}{r}$$

Soit:

$$lry = r kx + lq$$

$$-r kx + lry = lq$$

On pose:

$$-rk = a \in \mathbb{Z}$$

$$lr = b \in \mathbb{Z}$$

$$lq = c \in \mathbb{Z}$$

On obtient: $ax+by=c$

Déterminer les entiers relatifs x et y tels que $ax+by=c$, c'est déterminer les points de coordonnées entières de la droite (d) .

2. Exemple 1

$$7x+12y=1$$

7 et 12 sont premiers entre eux d'après le théorème de Bezout, il existe des solutions à l'équation: $7x+12y=1$

Pour résoudre cette équation, on doit déterminer une solution particulière de l'équation (on peut utiliser l'algorithme d'Euclide)

$$b=12 \quad a=7$$

b	a	Quotient	reste
12	7	1	5
7	5	1	2
5	2	2	1
2	1	2	1

$$b=a \times 1 + 5 \text{ donc } 5=b-a$$

$$a=5 \times 1 + 2$$

$$a=(b-a) \times 1 + 2$$

$$a=b-a+2 \text{ donc } 2=2a-b$$

$$5=2 \times 2 + 1$$

$$b-a=(2a-b) \times 2 + 1$$

$$b-a=4a-2b+1 \text{ donc } 1=-5a+3b$$

Donc le couple $(-5;3)$ est une solution particulière de l'équation $7x+12y=1$.

$$7x+12y=1$$

$$\Leftrightarrow 7x+12y=7 \times (-5) + 12 \times 3$$

$$\Leftrightarrow 7(x+5)=12(-y+3)$$

$$7 \text{ divise } (-y+3)$$

$$\mathcal{P}\text{gcd}(7; 12)=1$$

D'après le théorème de Gauss, 7 divise $-y+3$

Donc il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $-y+3=7k$

Pour tout $k \in \mathbb{Z}$, si $-y+3=7k$ alors:

$$7(x+5)=12(-y+3)$$

$$\Leftrightarrow 7(x+5)=12 \times 7k$$

$$\Leftrightarrow x+5=12k$$

Conclusion:

Pour tout $k \in \mathbb{Z}$, $x+5=12k$ et $-y+3=7k$

$$\text{et: } \begin{cases} x=12k-5 \\ y=-7k+3 \end{cases} \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$S = \{(12k-5; -7k+3), k \in \mathbb{Z}\}$$

3. Exemple 2

$$\boxed{9x+12y=3}$$

$$\mathcal{P}\text{gcd}(9; 12)=3$$

On peut diviser les trois coefficients de l'équation par 3.

$$9x+12y=3$$

$$\Leftrightarrow 3x+4y=1$$

$$\text{Or, } \mathcal{P}\text{gcd}(3; 4)=1$$

On remarque que $(-1;1)$ est une solution particulière de cette équation.

$$3x+4y=1$$

$$\Leftrightarrow 3x+4y=3 \times (-1) + 4 \times 1$$

$$\Leftrightarrow 3(x+1)=4(-y+1)$$

$$3 \text{ divise } (-y+1)$$

$$\mathcal{P}\text{gcd}(3; 4)=1$$

D'après le théorème de Gauss, 3 divise $-y+1$

Donc il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $-y+1=3k$

Pour tout $k \in \mathbb{Z}$, si $-y+1=3k$ alors:

$$3(x+1)=4(-y+1)$$

$$\Leftrightarrow 3(x+1)=4 \times 3k$$

$$\Leftrightarrow x+1=4k$$

Conclusion:

Pour tout $k \in \mathbb{Z}$, $x+1=4k$ et $-y+1=3k$

$$\text{et: } \begin{cases} x=4k-1 \\ y=-3k+1 \end{cases} \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$S = \{(4k-1; -3k+1), k \in \mathbb{Z}\}$$

4. Exemple 3

$$8x+12y=2$$

$$\mathcal{P}\text{gcd}(8; 12)=4$$

$$\text{Donc } 4(2x+3y)=2$$

Or, 4 n'est pas un diviseur de 2 donc l'équation n'admet pas de solution.

$$S = \emptyset$$

5. Exemple 4

$$1274x-275y=1$$

On considère les entiers naturels 1274 et 275

$$a=1274 \quad b=275$$

a	b	Quotient	reste
1274	275	4	174
275	174	1	101
174	101	1	73
101	73	1	28
73	28	2	17
28	17	1	11
17	11	1	6
11	6	1	5
6	5	1	1
5	1	5	0

$$\mathcal{P}gcd(1274; 275)=1$$

$$a=4b+174 \text{ donc } 174=a-4b$$

$$b=174+101$$

$$b=a-4b+101 \text{ donc } 101=-a+5b$$

$$174=101+73$$

$$a-4b=-a+5b+73 \text{ donc } 73=2a-9b$$

$$101=73+28$$

$$-a+5b=2a-9b+28 \text{ donc } 28=-3a+14b$$

$$73=28 \times 2 + 17$$

$$2a-9b=(-3a+14b) \times 2 + 17$$

$$2a-9b=-6a+28b+17 \text{ donc } 17=8a-37b$$

$$28=17+11$$

$$-3a+14b=8a-37b+11 \text{ donc } 11=-11a+51b$$

$$17=11+6$$

$$8a-37b=-11a+51b+6 \text{ donc } 6=19a-88b$$

$$11=6+5$$

$$-11a+51b=19a-88b+5 \text{ donc } 5=-30a+139b$$

$$6=5+1$$

$$19a-88b=-30a+139b+1 \text{ donc } 1=49a-227b$$

$$1274 \times 49 - 275 \times 227 = 1$$

$(49; 227)$ est une solution particulière de l'équation.

(Remarque: pour cet exemple, il est très intéressant d'utiliser un tableur pour trouver cette solution. cf. chap.1)

$$1274x - 275y = 1$$

$$\Leftrightarrow 1274x - 275y = 1274 \times 49 - 275 \times 227$$

$$\Leftrightarrow 1274(x-49) = 275(y-227)$$

$$1274 \text{ divise } 275(y-227)$$

$$\mathcal{P}gcd(1274; 275)=1$$

D'après le théorème de Gauss, 1274 divise $y-227$

Donc il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $y-227=1274k$

Pour tout $k \in \mathbb{Z}$, si $y-227=1274k$ alors:

$$1274(x-49) = 275(y-227)$$

$$\Leftrightarrow 1274(x-49) = 275 \times 1274k$$

$$\Leftrightarrow x-49 = 275k$$

Conclusion:

Pour tout $k \in \mathbb{Z}$ $x-49=275k$ et $y-227=1274k$

$$\text{et: } \begin{cases} x=275k+49 \\ y=1274k+227 \end{cases} \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$S = \{(275k+49; 1274k+227), k \in \mathbb{Z}\}$$

6. Exemple 5

$$1274x - 275y = 3$$

$$\mathcal{P}\text{gcd}(1274; 275) = 1$$

Si on multiplie par 3 toute solution de l'équation précédente, on obtient une solution de cette équation.

$$(3 \times 275k + 3 \times 49; 3 \times 1274k + 3 \times 227), k \in \mathbb{Z}$$

Mais, toutes les solutions de cette nouvelle équation ne sont pas nécessairement de cette forme.

Pour résoudre cette équation, on détermine une solution particulière. Par exemple $(3 \times 49; 3 \times 227)$, puis on effectue la résolution comme dans l'exemple précédent.

$$S = \{(275k + 3 \times 49; 1274k + 3 \times 227), k \in \mathbb{Z}\}$$

7. Utilisation du logiciel Xcas

Dans l'application arithmétique :

Pour obtenir une solution particulière de l'équation $ax + by = c$, on utilise l'instruction $\boxed{iabcuv(a, b, c)}$

7.1. Exemple 1

$$7x + 12y = 1$$

On entre dans la barre de saisie : $\boxed{iabcuv(7,12,1)}$.

Le résultat affiché est : $(-5, 3)$

Vérification :

$$7 \times (-5) + 12 \times 3 = -35 + 36 = 1$$

7.2. Exemple 2

$$9x + 12y = 3$$

On entre dans la barre de saisie : $\boxed{iabcuv(9,12,3)}$.

Le résultat affiché est : $(-1, 1)$

Vérification :

$$9 \times (-1) + 12 \times 1 = -9 + 12 = 3$$

7.3. Exemple 3

$$8x + 12y = 2$$

On entre dans la barre de saisie : $iabcuv(8,12,2)$.

Le résultat affiché est : pas de solution

Vérification :

$\text{pgcd}(8;12)=4$ et 4 ne divise pas 2 donc l'équation n'admet pas de solution.

7.4. Exemple 4

$$1274x + 275y = 1$$

On entre dans la barre de saisie : $iabcuv(1274,-275,1)$.

Le résultat affiché est : (49,227)

Vérification :

$$1274 \times 49 - 275 \times 227 = 62426 - 62425 = 1$$

7.5. Exemple 5

$$1274x + 275y = 3$$

On entre dans la barre de saisie : $iabcuv(1274,-275,3)$.

Le résultat affiché est : (147,681)

Vérification :

$$1274 \times 147 - 275 \times 681 = 187278 - 187275 = 3$$