Fiche exercices

EXERCICE 1

Déterminer les entiers naturels n tels que le reste de la division euclidienne de n par 20 est 7 et que le reste de la division euclidienne de n par 44 est 6.

EXERCICE 2

1. On considère l'équation (E): $8x+5y=1$, où $(x;y)$ est un couple de nombres entiers relatifs.

a. Donner une solution particulière de l'équation (E).

b. Résoudre l'équation (E).

2. Soit N un nombre naturel tel qu'il existe un couple $(a;b)$ de nombres entiers vérifiant :

$$\begin{cases} N=8a+1 \\ N=5b+2 \end{cases}$$

a. Montrer que le couple $(a;-b)$ est solution de (E).

b. Quel est le reste, dans la division de N par 40 ?

3. a. Résoudre l'équation $8x+5y=100$, où $(x;y)$ est un couple de nombres entiers relatifs.

b. Au VIII^{e} siècle, un groupe composé d'hommes et de femmes a dépensé 100 pièces de monnaie dans une auberge. Les hommes ont dépensé 8 pièces chacun et les femmes 5 pièces chacune. Combien pouvait-il y avoir d'hommes et de femmes dans le groupe ?

Bac TS Asie 1999

EXERCICE 3

Dans une auberge, un groupe d'hommes et de femmes moins nombreuses a dépensé 1000 pièces. Les hommes ont payé 19 pièces et les femmes 13 pièces. Combien y avait-il d'hommes et de femmes dans le groupe?

EXERCICE 4

Soit l'équation (1) d'inconnue rationnelle x : $78x^3+ux^2+vx-14=0$ où u et v sont des entiers relatifs.

1. On suppose dans cette question que $\frac{14}{39}$ est solution de l'équation (1).

a. Prouver que les entiers relatifs u et v sont liés par la relation: $14u+39v=1129$.
b. Utiliser l'algorithme d'Euclide, en détaillant les diverses étapes du calcul, pour trouver un couple $(x;y)$ d'entiers relatifs vérifiant l'équation $14x+39y=1$.
Vérifier que le couple $(-25;9)$ est solution de cette équation.
c. En déduire un couple $(u_0;v_0)$ solution particulière de l'équation $14u+39v=1129$.
Donner la solution générale de cette équation c'est-à-dire l'ensemble des couples $(u;v)$ d'entiers relatifs qui la vérifient.
d. Déterminer, parmi les couples $(u;v)$ précédents, celui pour lequel le nombre u est l'entier naturel le plus petit possible.

2. a. Décomposer 78 et 14 en facteurs premiers.
En déduire, dans $\mathbb{N}$, l'ensemble des diviseurs de 78 et l'ensemble des diviseurs de 14.
b. Soit $\frac{P}{Q}$ une solution rationnelle de l'équation (1) d'inconnue x : $78x^3+ux^2+vx-14=0$ où u et v sont des entiers relatifs.
Montrer que si P et Q sont des entiers relatifs premiers entre eux, alors P divise 14 et Q divise 78.

c. En déduire le nombre de rationnels, non entiers, pouvant être solutions de l'équation (1) et écrire, parmi ces rationnels, l'ensemble de ceux qui sont positifs.

Bac TS Guyane-Antilles septembre 2003

EXERCICE 5

Pour tout entier naturel n non nul, on considère les nombres $a_n = 4\times 10^n - 1$ $b_n = 2\times 10^n - 1$ $c_n = 2\times 10^n + 1$

1. a. Calculer $a_1, b_1, c_1, a_2, b_2, c_2, a_3, b_3, c_3$.

b. Combien les écritures décimales des nombres a_n et c_n ont-elles de chiffres ?

Montrer que a_n et c_n sont divisibles par 3.

c. Montrer, en utilisant la liste des nombres premiers inférieurs à 100 donnée ci-dessous, que b_3 est premier.

d. Montrer que, pour tout entier naturel non nul n, $b_n \times c_n = a_{2n}$.

En déduire la décomposition en produit de facteurs premiers de a_6.

e. Montrer que $\mathscr{P}\text{gcd}(b_n, c_n) = \mathscr{P}\text{gcd}(c_n, 2)$.

En déduire que b_n et c_n sont premiers entre eux.

2. On considère l'équation : (1) $b_3 x + c_3 y = 1$

d'inconnues les entiers relatifs x et y.

a. Justifier le fait que (1) possède au moins une solution.

b. Appliquer l'algorithme d'Euclide aux nombres c_3 et b_3 ; en déduire une solution particulière de (1).

c. Résoudre l'équation (1).

Liste des nombres premiers inférieurs à 100 :

2 ; 3 ; 5 ; 7 ; 11 ; 13 ; 17 ; 19 ; 23 ; 29 ; 31 ; 37 ; 41 ; 43 ; 47 ; 53 ; 59 ; 61 ; 67 ; 71 ; 73 ; 79 ; 83 ; 89 ; 97.

BAC TS Métropole juin 1999

EXERCICE 6

Les trois questions de cet exercice sont indépendantes.
1. a) Déterminer l'ensemble des couples (x, y) de nombres entiers relatifs, solution de l'équation (E) : $8x - 5y = 3$.
b) Soit m un nombre entier relatif tel qu'il existe un couple (p, q) de nombres entiers vérifiant $m = 8p + 1$ et $m = 5q + 4$
Montrer que le couple (p, q) est solution de l'équation (E) et en déduire que $m \equiv 9 (modulo\ 40)$.
c) Déterminer le plus petit de ces nombres entiers m supérieurs à 2 000.
2. a) Démontrer que pour tout nombre entier naturel k on a : $2^{3k} \equiv 1 (modulo\ 7)$.
b. Quel est le reste dans la division euclidienne de 2^{2009} par 7 ?
3. Dans cette question, toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative, même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.
Soient a et b deux nombres entiers naturels inférieurs ou égaux à 9 avec $a \neq 0$.
On considère le nombre $N = a \times 10^3 + b$. On rappelle qu'en base 10 ce nombre s'écrit sous la forme $N = \overline{a00b}$.
On se propose de déterminer parmi ces nombres entiers naturels N ceux qui sont divisibles par 7.
a) Vérifier que $10^3 \equiv -1 (modulo\ 7)$.
b) En déduire tous les nombres entiers N cherchés.

BAC TS Métropole 2009

CORRECTION

EXERCICE 1

$n=20q+7$ avec $q\in\mathbb{N}$
$n=44q'+6$ avec $q'\in\mathbb{N}$

$20q+7=44q'+6$
$44q'-20q=1$
$\mathscr{P}$gcd(20;44)=4
Or 1 n'est pas divisible par 4.
Conclusion: **il n'existe pas de solution au problème**.

EXERCICE 2

1. a.
- On peut trouver **de manière intuitive** le couple (2;-3) comme solution: $8\times 2+5\times(-3)=1$
- Méthode générale:

on pose: $a=8$ $b=5$

a	b	Quotient	reste
8	5	1	3
5	3	1	2
3	2	1	1
2	1	2	0

$a=b\times 1+3$ donc: $3=a-b$

$b=3\times 1+2$
$b=(a-b)\times 1+2$ donc: $2=b-a+b=-a+2b$
$3=2\times 1+1$
$a-b=(-a+2b)+1$ donc: $1=a-b+a-2b=2a-3b$
On a: $8\times 2+5\times(-3)=1$
Le couple **(2;-3)** est **une solution particulière de (E)**.

b. $8x+5y=1$
$\Leftrightarrow 8x+5y=8\times 2+5\times(-3)$
$\Leftrightarrow 8(x-2)=5\times(-y-3)$

8 divise $5(-y-3)$
$\mathscr{P}$gcd(8;5)=1
D'après **le théorème de Gauss**, 8 divise $(-y-3)$
Donc il existe $k\in\mathbb{Z}$ tel que $-y-3=8k$

Pour tout $k\in\mathbb{Z}$ si $-y-3=8k$, alors:
$8(x-2)=5(-y-3)\Leftrightarrow 8(x-2)=5\times 8k\Leftrightarrow x-2=5k$
Conclusion:
Pour tout $k\in\mathbb{Z}$, $-y-3=8k$ et $x-2=5k$

$$\begin{cases} x=5k+2 \\ y=-8k-3 \end{cases} \quad k\in\mathbb{Z}$$

$$\boxed{S=\{(5k+2;-8k-3);k\in\mathbb{Z}\}}$$

2. a.
$N=8a+1=5b+2$
$8a-5b=1$
Donc, le couple $\boxed{(a;-b)}$ est **solution de l'équation (E)**

b. $(a;-b)$ est solution de l'équation (E) donc, il existe $k\in\mathbb{Z}$ tel que:
$a=5k+2$ et $-b=-8k-3$
Donc:
$N=8(5k+2)+1=40k+17$
$N=5(8k+3)+2=40k+17$
Le reste de la division de N par 40 est **17**.

3. a. On choisit comme solution particulière: (200;-300)
Avec le même raisonnement qu'au 1. b), on obtient comme solution:
$\boxed{S=\{(5K+200;-8K-300);K\in\mathbb{Z}\}}$

b.
On appelle X le nombre d'hommes. $X\in\mathbb{N}$
On appelle Y le nombre de femmes. $Y\in\mathbb{N}$
$8X+5Y=100$
d'après la question précédente:
$X=5K+200$ et $Y=-8K-300$ avec $K\in\mathbb{Z}$

On doit avoir $X\geqslant 0$
$5K+200\geqslant 0$
$K\geqslant -40$

On doit aussi avoir: $Y\geqslant 0$
$-8K-300\geqslant 0$
$K\leqslant -37{,}5$
K est un entier donc $K\leqslant -38$

Conséquence: $-40\leqslant K\leqslant -38$

Pour $K=-40$
$X=0$; $Y=20$: 0 homme; 20 femmes

Pour $K=-39$
$X=5$; $Y=12$: 5 hommes; 12 femmes

Pour $K=-38$
$X=10$; $Y=4$: 10 hommes; 4 femmes

Si on comprend, qu'il y a au moins un homme, il y a 2 possibilités: **5 hommes** et **12 femmes** ou **10 hommes** et **4 femmes**.

EXERCICE 3

On appelle x le nombre d'hommes. $x\in\mathbb{N}$
On appelle y le nombre de femmes. $y\in\mathbb{N}$
$19x+13y=1000$

on pose: $a=19$ et $b=13$

a	b	Quotient	reste
19	13	1	6
13	6	2	1
6	1	6	0

$a=b\times 1+6$ donc: $6=a-b$
$b=6\times 2+1$
$b=(a-b)\times 2+1$
$b=2a-2b+1$ donc: $1=-2a+3b$
On a: $19\times(-2)+13\times 3=1$
Donc: $19\times(-2000)+13\times 3000=1000$
Le couple **(-2000;3000)** est **une solution particulière** de l'équation $19x+13y=1000$.
$19x+13y=1000$
$\Leftrightarrow 19x+13y=19\times(-2000)+13\times 3000$
$\Leftrightarrow 19(x+2000)=13\times(-y+3000)$
19 divise $13(-y+3000)$
$\mathscr{P}$gcd(19;13)=1
D'après **le théorème de Gauss**, 19 divise $(-y+3000)$
Donc il existe $k\in\mathbb{Z}$ tel que $-y+3000=19k$
Pour tout $k\in\mathbb{Z}$ si $-y+3000=19k$, alors:
$19(x+2000)=13(-y+3000)\Leftrightarrow(x+2000)=13\times 19k\Leftrightarrow x+2000=13k$
Conclusion:
Pour tout $k\in\mathbb{Z}$, $-y+3000=19k$ et $x+2000=13k$

$$\boxed{\begin{cases} x=13k-2000 \\ y=-19k+3000 \end{cases}} \quad k\in\mathbb{Z}$$

On doit aussi avoir $x>y\geqslant 0$ et $x\in\mathbb{N}$, $y\in\mathbb{N}$
$y\geqslant 0$
$\Leftrightarrow -19k+3000\geqslant 0$
$\Leftrightarrow -19k\geqslant -3000$
$\Leftrightarrow k\leqslant\dfrac{3000}{19}$
$\Leftrightarrow k\leqslant 157$

$x>y$
$\Leftrightarrow 13k-2000>-19k+3000$
$\Leftrightarrow 13k+19k>2000+3000$
$\Leftrightarrow 32k>5000$
$\Leftrightarrow k>\dfrac{5000}{32}$
$\Leftrightarrow k\geqslant 157$

On obtient $k=157$.
$x=13\times 157-2000=41$
$y=-19\times 157+3000=17$

Il y a **41 hommes** et **17 femmes**.

EXERCICE 4

1. a.
$\dfrac{14}{39}$ est solution de l’équation (1), donc:

$78\times\frac{14^3}{39^3}+u\times\frac{14^2}{39^2}+v\times\frac{14}{39}-14=0$

$2\times\frac{14^3}{39^2}+u\times\frac{14^2}{39^2}+v\times\frac{14}{39}-14=0$

$2\times14^3+u\times14^2+v\times14\times39-14\times39^2=0$

$2\times14^2+u\times14+v\times39-39^2=0$

$\boxed{14u+39v=1129}$

b.

a	b	Quotient	reste
39	14	2	11
14	11	1	3
11	3	3	2
3	2	1	1
2	1	2	0

$a=b\times2+11$ donc: $11=a-2b$

$b=11\times1+3$

$b=(a-2b)\times1+3$

$b=a-2b+3$ donc: $3=-a+3b$

$11=3\times3+2$

$a-2b=(-a+3b)\times3+2$

$a-2b=-3a+9b+2$ donc: $2=4a-11b$

$3=2\times1+1$

$-a+3b=(4a-11b)\times1+1$

$-a+3b=4a-11b+1$ donc: $1=-5a+14b$

On a: $39\times(-5)+14\times14=1$

$14\times14+39\times(-5)=1$

Donc:

Le couple **(14;-5)** est **une solution particulière** de l'équation $14x+39y=1$.

$14\times(-25)+39\times9=1$

Donc:

Le couple **(-25;9)** est **une solution particulière** de l'équation $14x+39y=1$.

c.

Le couple (14;-5) est une solution particulière de l'équation $14x+39y=1$.

$14\times1129=15806$

$-5\times1129=-5645$

Donc:

Le couple (15806;-5645) est une solution particulière de l'équation $14x+39y=1129$.

Le couple (-25;9) est une autre solution particulière de l'équation $14x+39y=1$.

$-25\times1129=-28225$

$9\times1129=10161$

Donc:

Le couple (-28225;10161) est une autre solution particulière de l'équation $14x+39y=1129$.

$14u+39v=1129$

$\Leftrightarrow 14u+39v=14u_0+39v_0$

$\Leftrightarrow 14(u-u_0)=39\times(-v+v_0)$

14 divise $39(-v+v_0)$
$\mathscr{P}$gcd(14;39)=1
D'après **le théorème de Gauss**, 14 divise $(-v+v_0)$
Donc il existe $k\in\mathbb{Z}$ tel que $(-v+v_0)=14k$

Pour tout $k\in\mathbb{Z}$ si $-v+v_0=14k$, alors:
$14(u-u_0)=39\times(-v+v_0)\Leftrightarrow 14(u-u_0)=39\times 14k\Leftrightarrow u-u_0=39k$

Conclusion:
Pour tout $k\in\mathbb{Z}$, $u-u_0=39k$ et $-v+v_0=14k$
$\boxed{\begin{cases} u=39k+u_0 \\ v=-14k+v_0 \end{cases}}$ $k\in\mathbb{Z}$
d.
Si $u_0=15806$ et $v_0=-5645$

$15806=39\times 405+11$
$u=39k+39\times 405+11$
$u=39(k+405)+11$

Pour $k=-405$, on obtient $u=11$

On a alors:
$v=-14\times(-405)-5645$
$v=5670-5645$
$v=25$
On obtient **le couple (11;45)**

Si $u_0=-28225$ et $v_0=10161$

$-28225=39\times(-724)+11$
$u=39k+39\times(-724)+11$
$u=39(k-724)+11$

Pour $k=724$, on obtient $u=11$

On a alors:
$v=-14\times(724)+10161$
$v=-10136+10161$
$v=25$
On obtient aussi **le couple (11;45)**
2. a.

78	2
39	3
13	13
1	

$78=2\times 3\times 13$ Il y a $2\times 2\times 2=8$ diviseurs de 78 dans $\mathbb{N}$
D_{78}={1;2;3;6;13;26;39;78}

14	2
7	7
1	

$14=2\times 7$ Il y a $2\times 2=4$ diviseurs de 14 dans $\mathbb{N}$

$D_{14}=\{1;2;7;14\}$

b.

$\frac{P}{Q}$ est solution de l'équation (1), donc:

$$78\times\frac{P^3}{Q^3}+u\times\frac{P^2}{Q^2}+v\times\frac{P}{Q}-14=0$$

$$78\times P^3+uQ\times P^2+vQ^2\times P-14\times Q^3=0 \qquad (2)$$

$$78P^3=Q(-uP^2-vPQ+14Q^2)$$

$(-uP^2-vPQ+14Q^2)\in\mathbb{Z}$

$\mathscr{P}gcd(P;Q)=1$ donc $\mathscr{P}gcd(P^3;Q)=1$

Q divise $78P^3$

$\mathscr{P}gcd(P^3;Q)=1$

D'après **le théorème de Gauss**: Q divise 78

De même, d'après l'expression (2), on a:

$$78\times P^3+uQ\times P^2+vQ^2\times P-14\times Q^3=0$$

$$14Q^3=P(78P^2+uQP+vQ^2)$$

P divise $14Q^3$

$\mathscr{P}gcd(P;Q^3)=1$

D'après **le théorème de Gauss**: P divise 14

c.

On rappelle que:

$D_{14}=\{1;2;7;14\}$ et $D_{78}=\{1;2;3;6;13;26;39;78\}$

- Si $P=1$ alors tout diviseur de 78 est premier avec P. Pour Q, il y a 7 possibilités. (on exclue $Q=1$ pour lequel on obtient l'entier 1). On a donc: $\frac{1}{2};\frac{1}{3};\frac{1}{6};\frac{1}{13};\frac{1}{26};\frac{1}{39};\frac{1}{78}$
- Si $P=2$ alors pour Q il faut choisir un diviseur de 78 impair et différent de 1. Il y a 3 possibilités. On a donc: $\frac{2}{3};\frac{2}{13};\frac{2}{39}$
- Si $P=7$ alors tout diviseur de 78 est premier avec P. Pour Q, il y a 7 possibilités. (on exclue $Q=1$ pour lequel on obtient l'entier 1). On a donc: $\frac{7}{2};\frac{7}{3};\frac{7}{6};\frac{7}{13};\frac{7}{26};\frac{7}{39};\frac{7}{78}$
- Si $P=14$ alors pour Q il faut choisir un diviseur de 78 impair et différent de 1. Il y a 3 possibilités. On a donc: $\frac{14}{3};\frac{14}{13};\frac{14}{39}$

On a donc 20 rationnels positifs, non entiers, pouvant être solutions de l'équation (1). (Il y a aussi 20 rationnels négatifs)

EXERCICE 5

1. a.

$a_1=4\times10^1-1=39$ $\quad a_2=4\times10^{2}-1=399$ $\quad a_3=4\times10^3-1=3999$

$b_1=2\times10^1-1=19$ $\quad b_2=2\times10^{2}-1=199$ $\quad b_3=2\times10^3-1=1999$

$c_1=2\times10^1+1=21$ $\quad c_2=2\times10^{2}+1=201$ $\quad c_3=2\times10^3+1=2001$

b.

a_n et c_n ont $n+1$ chiffres $\quad (n+1\geqslant2)$

- pour a_n le premier chiffre est 3 et les autres chiffres sont 9 donc la somme de ses chiffres est divisible par 3.
- pour c_n le premier chiffre est 2, le dernier est 1 et les autres chiffres sont nuls donc la somme de ses chiffres est divisible par 3.

On peut aussi utiliser les congruences.
$10\equiv 1(3)$
Pour tout $n\in\mathbb{N}$ $10^n\equiv 1^n(n)$
$10^n\equiv 1(n)$
$a_n=4\times 10^n-1$, donc:
$a_n\equiv 4\times 1-1(3)$
$a_n\equiv 3(3)$
$a_n\equiv 0(3)$
Donc a_n est divisible par 3.

$c_n=2\times 10^n+1$, donc:
$c_n\equiv 2\times 1+1(3)$
$c_n\equiv 3(3)$
$c_n\equiv 0(3)$
Donc c_n est divisible par 3.
c.
$b_3=2\times 10^3-1=1999$
On vérifie que b_3 n'est pas divisible par les nombres premiers dont le carré est inférieur à 1999.
On vérifie donc pour les nombres: 2 ; 3 ; 5 ; 7 ; 11 ; 13 ; 17 ; 19 ; 23 ; 29 ; 31 ; 37 ; 41 ; 43 (car 47^2=2209>1999)
b_3 n'est divisible par aucun de ses nombres, donc b_3 est un nombre premier.
d.
$b_n\times c_n$
$=(2\times 10^n-1)\times(2\times 10^n+1)$
$=(2\times 10^n)^2-1^2$
$=4\times 10^{2n}-1$
$=a_{2n}$

$a_6=b_3\times c_3$
$b_3=1999$ et b_3 est premier
$c_3=2001$ et c_3 est divisible par 3: $2001=3\times 667=3\times 23\times 29$
D'où, $a_6=3\times 23\times 29\times 1999$

e.

- Soit d un diviseur commun de b_n et c_n alors d est un diviseur commun de c_n et c_n-b_n

Or $c_n-b_n=(2\times 10^n+1)-(2\times 10^n-1)=2$
Donc d est un diviseur commun de c_n et 2.

- Soit d un diviseur commun de c_n et 2 alors d est un diviseur commun de c_n et c_n-2

Or $c_n-2=2\times 10^n+1-2=2\times 10^n-1=b_n$
Donc d est un diviseur commun de b_n et c_n
Conséquence:
$\mathscr{P}\text{gcd}(b_n,c_n)=\mathscr{P}\text{gcd}(c_n,2)$.
c_n est un nombre impair donc $\mathscr{P}\text{gcd}(c_n,2)=1$ donc $\mathscr{P}\text{gcd}(b_n,c_n)=1$.
Par suite, b_n et c_n sont premiers entre eux.

Remarque:

a	b	Quotient	reste
$2\times10^n+1$	$2\times10^n-1$	1	2
$2\times10^n-1$	2	10^n -1	1
2	1	2	0

Donc b_n et c_n sont premiers entre eux.

2.
a.
b_3 et c_3 sont premiers entre eux. Le théorème de Bezout permet d'affirmer qu'il existe deux entiers relatifs x et y tels que $b_3 x+c_3 y=1$

b.

c_3	b_3	Quotient	reste
2001	1999	1	2
1999	2	999	1
2	1	2	0

$c_3=b_3\times1+2$ donc $2=c_3-b_3$
$b_3=2\times999+1$
$b_3=(c_3-b_3)\times999+1$ donc $1=1000\,b_3-999\,c_3$

Le couple (1000;-999) est une solution particulière de l'équation (1)

c.
$1999\,x+2001\,y=1$
$\Leftrightarrow 1999\,x+2001\,y=1000\times1999-999\times2001$
$\Leftrightarrow 1999(x-1000)=2001\times(-y-999)$
1999 divise $2001(-y-999)$
$\mathscr{P}$gcd(1999;2001)=1
D'après le théorème de Gauss, 1999 divise $(-y-999)$
Donc il existe $k\in\mathbb{Z}$ tel que $-y-999=1999\,k$
Pour tout $k\in\mathbb{Z}$ si $-y-999=1999\,k$, alors:
$1999(x-1000)=2001(-y-999)\Leftrightarrow 1999(x-1000)=2001\times1999\,k\Leftrightarrow x-1000=2001\,k$

Conclusion:
Pour tout $k\in\mathbb{Z}$, $-y-999=1999\,k$ et $x-1000=2001\,k$
$$\begin{cases}x=2001\,k+1000\\ y=-1999\,k-999\end{cases}\quad k\in\mathbb{Z}$$
$S=\{(2001\,k+1000\,;-1999\,k-999);k\in\mathbb{Z}\}$

EXERCICE 6

1. a)
8 et 5 sont premiers entre eux et on remarque que le couple (1;1) est une solution particulière de l'équation car $8\times1-5\times1=3$

$8\,x-5\,y=3$
$\Leftrightarrow 8\,x-5\,y=8\times1-5\times1$
$\Leftrightarrow 8(x-1)=5(y-1)$

8 divise $5(y-1)$

$\mathscr{P}$gcd(8;5)=1
D'après le théorème de Gauss 8 divise $(y-1)$
Il existe $k\in\mathbb{Z}$ tel que $y-1=8k$

$8(x-1)=5(y-1)$
$\Leftrightarrow 8(x-1)=5\times 8k$
Soit $\begin{cases} x=5k+1 \\ y=8k+1 \end{cases} \quad k\in\mathbb{Z}$
$S=\{(5k+1;8k+1), k\in\mathbb{Z}\}$

b)
$8p+1=5q+4$
$8p-5q=3$
Donc le couple (1;1) est une solution de l'équation (E): $8x-5y=3$
Donc $p=5k+1$ et $q=8k+1 \quad k\in\mathbb{Z}$
Par suite,
$m=8(5k+1)+1=40k+9$
ou $m=5(8k+1)+4=40k+9$

Or $40k\equiv 0(40)$
Donc, $m\equiv 9(40)$

c)
$m=40k+9$ avec $k\in\mathbb{Z}$
On veut qu $m\geqslant 2000$
donc $40k+9\geqslant 2000$
$k\geqslant\dfrac{2000-9}{40}\approx 49,\ldots$
Donc la plus petite valeur de k est donc 50.
On obtient $m_0=40\times 50+9=2009$
$p_0=5\times 50+1=251 \quad m_0=8\times 251+1=2009$
$q_0=8\times 50+1=401 \quad m_0=5\times 401+4=2009$

2. a)
$2^{3k}=(2^3)^k$
Or, $2^3=8\equiv 1(7)$
Donc $2^{3k}\equiv^k 1(7)$
$2^{3k}\equiv 1(7)$

b.
On effectue la division euclidienne de 2009 par 3:
$2009=3\times 669+2$
$2^{2009}=2^{3\times 669}\times 2^2$

$2^{3\times 669}\equiv 1(7)$
$2^2=4\equiv 4(7)$
Donc $2^{2009}\equiv 4(7)$
4 est le reste de la division euclidienne de 2^{2009} par 7.

3.

a)

$10 \equiv 3(7)$

$10^2 \equiv 3^2(7)$

$10^2 \equiv 9(7)$

$10^2 \equiv 2(7)$

$10^3 = 10 \times 10^2 \equiv 6(7)$

Or $-1 = -1 \times 7 + 6$

Le reste de la division euclidienne de -1 par 7 est 6 donc: $10^3 \equiv -1(7)$

b)

$1 \leqslant a \leqslant 9 \qquad a \in \mathbb{N}$

$0 \leqslant b \leqslant 9 \qquad b \in \mathbb{N}$

$N = \overline{a00b}$ donc $N = a \times 10^3 + b$

N est divisible par 7

$\Leftrightarrow N \equiv 0(7)$

Or $N \equiv -a + b(7)$

N est divisible par 7

$\Leftrightarrow -a + b \equiv 0(7)$

$\Leftrightarrow -a + b = 7k \quad k \in \mathbb{Z}$

$-9 \leqslant -a \leqslant -1$

$0 \leqslant b \leqslant 9$

Donc $-9 \leqslant -a + b \leqslant 8$

Les multiples de 7 compris entre -9 et 8 sont -7 (obtenu pour $k = -1$); 0 (obtenu pour $k = 0$) et 7(obtenu pour $k = 1$)

Pour $k = -1$

$-a + b = -7$

$a = b + 7$

$b = 0 \quad a = 7 \quad N = 7000$

$b = 1 \quad a = 8 \quad N = 8001$

$b = 2 \quad a = 9 \quad N = 9002$

Pour $k = 0$

$-a + b = 0$

$a = b$

$a \neq 0$

$b = 1 \quad a = 1 \quad N = 1001$

$b = 2 \quad a = 2 \quad N = 2002$

$b = 3 \quad a = 3 \quad N = 3003$

$b = 4 \quad a = 4 \quad N = 4004$

$b = 5 \quad a = 5 \quad N = 5005$

$b = 6 \quad a = 6 \quad N = 6006$

$b = 7 \quad a = 7 \quad N = 7007$

$b = 8 \quad a = 8 \quad N = 8008$

$b = 9 \quad a = 9 \quad N = 9009$

Pour $k = 1$

$-a + b = 7$

$a = b - 7$

$b=9 \quad a=2 \quad N=2009$
$b=8 \quad a=1 \quad N=1008$