Fiche exercices

EXERCICE 1

1. Montrer pour tout entier naturel n , non nul, n^3-n est divisible par 3.
2. Soit p un nombre premier différent de 2, démontrer que $N=\sum_{k=0}^{k=p-2} 2^k$ est divisible par p .

EXERCICE 2

Le corollaire du théorème de Fermat affirme:
Pour tout entier naturel a et tout nombre premier p , on a: $a^p \equiv a(p)$
La réciproque est-elle vraie?
C'est à dire si pour tout entier naturel a , on a $a^p \equiv a(p)$ (avec p entier naturel supérieur ou égal à 2) alors a-t-on p premier?
On se propose de donner un contre-exemple.
1. Décomposer 561 en produit de facteurs premiers.
2. Démontrer que si x est un entier alors, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, (x^n-1) est un multiple de $(x-1)$
3. Démontrer que $a^{561}-a$ est divisible par 3 puis par 11, puis par 17.
4. En déduire que pour tout entier naturel a , $a^{561}-a \equiv 0(561)$

EXERCICE 3

Démontrer que pour tout entier naturel non nul n , on a $N=n^{13}-n$ est divisible par 13; 7; 5; 3 et 2.

EXERCICE 4

On suppose qu'il existe des entiers naturels non nuls m , n et a tels que:
$(4m+3)(4n+3)=4a^2+1$
1. Soit p un nombre premier quelconque divisant $4m+3$.

Montrer que p est impair et que: $(2a)^p-1 \equiv (-1)^{\frac{(p-1)}{2}}(p)$

2. En utilisant le théorème de Fermat, montrer que $p \equiv 1(4)$
3. En utilisant la décomposition de $4m+3$ en facteurs premiers obtenir une contradiction.

EXERCICE 5

1. On se propose, dans cette question, de déterminer tous les entiers relatifs N tels que: $\begin{cases} N \equiv 5(13) \\ N \equiv 1(17) \end{cases}$

a. Vérifier que 239 est solution de ce système.

b. Soit N un entier relatif solution de ce système.
Démontrer que N peut s'écrire sous la forme $N=1+17x=5+13y$ où x et y sont deux entiers relatifs vérifiant la relation $17x-13y=4$.

c. Résoudre l'équation $17x-13y=4$ où x et y sont des entiers relatifs.

d. En déduire qu'il existe un entier relatif k tel que $N=18+221k$.

e. Démontrer l'équivalence entre $N \equiv 18(221)$ et $\begin{cases} N \equiv 5(13) \\ N \equiv 1(17) \end{cases}$

2. *Dans cette question, toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative, même infructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.*

a. Existe-t-il un entier naturel k tel que $10^k \equiv 1(17)$?

b. Existe-t-il un entier naturel t tel que $10^t \equiv 18(221)$?

BAC TS Asie juin 2009

EXERCICE 6

1. On considère l'équation $(E): 109x - 226y = 1$ où x et y sont des entiers relatifs.

a. Déterminer le pgcd de 109 et 226. Que peut-on en conclure pour l'équation (E) ?

b. Montrer que l'ensemble de solutions de (E) est l'ensemble des couples de la forme $(141 + 226k, 68 + 109k)$, où k appartient à $\mathbb{Z}$. En déduire qu'il existe un unique entier naturel non nul d inférieur ou égal à 226 et un unique entier naturel non nul e tels que $109d = 1 + 226e$.

(On précisera les valeurs des entiers d et e)

2. Démontrer que 227 est un nombre premier.

3. On note A l'ensemble des 227 entiers naturels a tels que $a \leqslant 226$.

On considère les deux fonctions f et g de A dans A définies de la manière suivante :

- à tout entier de A, f associe le reste de la division euclidienne de a^{109} par 227.
- à tout entier de A, g associe le reste de la division euclidienne de a^{141} par 227.

a. Vérifier que $g[f(0)] = 0$.

On rappelle le résultat suivant appelé petit théorème de Fermat :

Si p est un nombre premier et a un entier non divisible par p alors $a^p - 1 \equiv 1$ modulo p.

b. Montrer que, quel que soit l'entier non nul a de A, $a^{226} \equiv 1$ [modulo 227].

c. En utilisant 1. b., en déduire que, quel que soit l'entier non nul a de A, $g[f(a)] = a$.

Que peut-on dire de $f[g(a)] = a$?

Bac TS Liban juin 2005

CORRECTION

EXERCICE 1

1. Le corollaire du théorème de Fermat affirme:
Pour tout entier naturel a et tout nombre premier p, on a: $a^p \equiv a(p)$
Donc $a^p - a \equiv 0(p)$, c'est à dire $a^p - a$ est divisible par p.

$n \in \mathbb{N}^*$ et 3 est un nombre premier, donc $n^3 - n$ est **divisible par 3**.

Remarques: on peut aussi justifier par une factorisation ou un raisonnement par récurrence.

2.
$N = 2^0 + 2^1 + 2^2 + \ldots + 2^{p-2}$ est la somme des $(p-1)$ premiers termes de la suite géométrique de raison 2 et de premier terme $2^0 = 1$

Donc: $N = \dfrac{1-2^{p-1}}{1-2} = 2^{p-1} - 1$

p est un nombre premier différent de 2 donc p est premier avec 2.
On utilise **le théorème de Fermat**: 2^{p-1} est divisible par p
Par suite: N est **divisible** par p.

EXERCICE 2

1.

561	3
187	11
17	17
1	

$\boxed{561 = 3 \times 11 \times 17}$

2.
$x^n - 1 = (x-1)(x^{n-1} + x^{n-2} + \ldots + 1)$
Si x est un entier alors $x^{n-1} + x^{n-2} + \ldots + 1$ est un entier et $x-1$ est un entier.
Conséquence: $(x^n - 1)$ est **un multiple** de $(x-1)$

Remarque: on peut aussi effectuer un raisonnement par récurrence pour justifier le résultat)
3.
$a^{561} - a = a(a^{560} - 1)$
On considère la décomposition de 560 en produit de facteurs premiers
$560 = 2^4 \times 5 \times 7$
560 a donc $5 \times 2 \times 2 = 20$ diviseurs de 560
$D_{560} = \{1;2;4;5;7;8;10;14;16;20;28;35;40;56;70;80;140;280;560\}$

$560 = 2 \times 280$
$a^{560} = (a^2)^{280}$
On pose $x = a^2$ et $n = 280$
a^{560} -1 est un multiple de $a^2 - 1$. Donc il existe $K \in \mathbb{N}$ tel que: $a^{560} - 1 = (a^2 - 1)K$

Par suite,
$a^{561} - a = a(a^{560} - 1)$
$a^{561} - a = a(a^2 - 1)K$
$a^{561} - a = (a^3 - a)K$

Or a^3-a est divisible par 3(cf exercice 1)
Donc, $a^{561}-a$ est **divisible par 3**

$560=10\times 56$
$a^{560}=(a^{10})^{56}$
On pose $x=a^{10}$ et $n=56$
$a^{560}-1$ est un multiple de $a^{10}-1$. Donc il existe $K'\in\mathbb{N}$ tel que: $a^{560}-1=(a^{10}-1)K'$

Par suite,
$a^{561}-a=a(a^{560}-1)$
$a^{561}-a=a(a^{10}-1)K'$
$a^{561}-a=(a^{11}-a)K'$
Or $a^{11}-a$ est divisible par 11(cf exercice 1)
Donc, $a^{561}-a$ est **divisible par 11**

$560=16\times 35$
$a^{560}=(a^{16})^{35}$
On pose $x=a^{16}$ et $n=35$
$a^{560}-1$ est un multiple de $a^{16}-1$. Donc il existe $K''\in\mathbb{N}$ tel que: $a^{560}-1=(a^{16}-1)K''$

Par suite,
$a^{561}-a=a(a^{560}-1)$
$a^{561}-a=a(a^{16}-1)K''$
$a^{561}-a=(a^{17}-a)K''$
Or $a^{17}-a$ est divisible par 17(cf exercice 1)
Donc, $a^{561}-a$ est **divisible par 17**

4.
3; 11 et 17 sont trois nombres premiers donc premiers entre eux 2 à 2.
$a^{561}-a$ est divisible par 3; 11 et 17.
Donc $a^{561}-a$ est divisible par $3\times 11\times 17=561$
Par suite:
$a^{561}-a\equiv 0\,(561)$
$a^{561}\equiv a\,(561)$
et pourtant 561 n'est pas un nombre premier.
Donc **la réciproque du corollaire du théorème de Fermat n'est pas vraie**.

EXERCICE 3

13 est un **nombre premier**, donc d'après **le corollaire du théorème de Fermat**: $n^{13}-n$ est divisible par 13.

$n^{13}-n=n(n^{12}-1)$

$12=2^2\times 3$
Le nombre 12 a 6 diviseurs
$D_{12}=\{1;2;3;4;6;12\}$

$12=2\times 6$
$n^{12}=(n^6)^2$

$n^{13}-n=n(n^{12}-1)=n(n^6-1)(n^6+1)=(n^7-1)(n^6+1)$

7 est un **nombre premier**, donc d'après **le corollaire du théorème de Fermat**: n^7-n est divisible par 7.
Par suite, $n^{13}-n$ est **divisible par 7**.

$12=3\times4$
$n^{12}=(n^4)^3$
$n^{13}-n=n(n^{12}-1)=n[(n^4)^3-1]$

On utilise le résultat de l'exercice précédent:
$(n^4)^3-1$ est un multiple de n^4-1 . Donc il existe $K\in\mathbb{N}$ tel que: $(n^4)^3-1=(n^4-1)K$

$n^{13}-n=n(n^{12}-1)=n[(n^4)^3-1]=n(n^4-1)K=(n^5-1)K$

5 est un **nombre premier**, donc d'après **le corollaire du théorème de Fermat**: n^5-n est divisible par 5.
Par suite, $n^{13}-n$ est **divisible par 5**.

$12=2\times6$
$n^{12}=(n^2)^6$
$n^{13}-n=n(n^{12}-1)=n[(n^2)^6-1]$

On utilise le résultat de l'exercice précédent:
$(n^2)^6-1$ est un multiple de n^2-1 . Donc il existe $K'\in\mathbb{N}$ tel que: $(n^2)^6-1=(n^2-1)K'$

$n^{13}-n=n(n^{12}-1)=n(n^{¿}2-1)K'=(n^3-n)K'$

3 est **un nombre premier**, donc d'après **le corollaire du théorème de Fermat**: n^3-n est divisible par 3.
Par suite, $n^{13}-n$ est **divisible par 3**.

$n^{13}-n=n(n^{12}-1)$

On utilise le résultat de l'exercice précédent:
$n^{12}-1$ est un multiple de $n-1$. Donc il existe $K''\in\mathbb{N}$ tel que:= $n^{12}-1=(n-1)K''$

$n^{13}-n=n(n^{12}-1)=n(n-1)K''=(n^2-n)K''$

2 est **un nombre premier**, donc d'après **le corollaire du théorème de Fermat**: n^2-n est divisible par 2.
Par suite, $n^{13}-n$ est **divisible par 2**.

EXERCICE 4

1.
$4m\equiv0(2)$
$4m+3\equiv3(2)$
$4m+3\equiv1(2)$

$4m+3$ n'est pas divisible par 2 donc $p\neq2$ et donc p est impair.
p est impair donc $p=2q+1$ avec $q\in\mathbb{N}$

p est un diviseur de $4m+3$
$4m+3$ est un diviseur de $4a^2+1$
Donc p est un diviseur de $4a^2+1$

Par suite,
$4a^2+1\equiv 0\,(p)$
$4a^2\equiv -1\,(p)$
$(2a)^2\equiv -1\,(p)$
$(2a)^{2q}\equiv(-1)^q\,(p)$

Or, $2q=p-1$
$q=\frac{p-1}{2}$
On a donc:
$\boxed{(2a)^p-1\equiv(-1)^{\frac{(p-1)}{2}}\,(p)}$

2.
Pour pouvoir utiliser le théorème de Fermat, on doit vérifier que p et $2a$ sont premiers entre eux.
p étant un nombre premier il suffit de vérifier que p n'est pas un diviseur de $2a$.

On suppose que $2a\equiv 0\,(p)$
On a alors $4a^2\equiv 0\,(p)$
et donc $4a^2+1\equiv 1\,(p)$
Or, on a vu dans la question précédente que: $4a^2+1\equiv 0\,(p)$

Donc p n'est pas un diviseur de $2a$ et p et $2a$ sont **premiers entre eux**.

D'après **le théorème de Fermat**:
$(2a)^{p-1}-1\equiv 0\,(p)$
$\boxed{(2a)^{p-1}\equiv 1\,(p)}$

Or d'après la première question, $(2a)^p-1\equiv(-1)^{\frac{(p-1)}{2}}\,(p)$
On a donc: $(-1)^{\frac{(p-1)}{2}}\equiv 1\,(p)$
Cela signifie que $\frac{p-1}{2}$ est **un nombre pair**.
Or $q=\frac{p-1}{2}$
Donc q est **un nombre pair**.

Il existe $q'\in\mathbb{N}$ tel que $q=2q'$
$p=2q+1$
$p=4q'+1$
et donc $\boxed{p\equiv 1\,(4)}$

3.
$4m+3=p_1^{\alpha_1}\times p_2^{\alpha_2}\times\ldots\times p_m^{\alpha_m}$
$p_1;p_2;\ldots;p_m$ sont des nombres premiers distincts.
et $\alpha_1;\alpha_2;\ldots;\alpha_m$ sont des entiers naturels non nuls.

$p_1;p_2;\ldots;p_m$ sont des nombres premiers qui divisent $4m+3$
D'après la question précédente:
$p_1\equiv 1\,(4)$ $\quad p_2\equiv 1\,(4)$ $\quad\ldots\quad$ $p_m\equiv 1\,(4)$
Donc:

$p_1^{\alpha_1} \equiv 1(4)$ $p_2^{\alpha_2} \equiv 1(4)$ .... $p_m^{\alpha_m} \equiv 1(4)$

Par suite:

$p_1^{\alpha_1} \times p_2^{\alpha_2} \times \ldots \times p_m^{\alpha_m} \equiv 1(4)$

$4m+3 \equiv 1(4)$

Or,

$4m \equiv 0(4)$

$4m+3 \equiv 3(4)$

Il y a **contradiction**, **il n'existe pas** des entiers naturels non nuls m, n et a tels que: $\boxed{(4m+3)(4n+3)=4a^2+1}$

EXERCICE 5

1. a.

$239 = 18 \times 13 + 5$ donc $239 \equiv 5(13)$

$239 = 14 \times 17 + 1$ donc $239 \equiv 1(17)$

Donc 239 est solution du système.

b.

N est un entier relatif solution du système donc:

$N \equiv 1(17)$. Il existe $x \in \mathbb{Z}$ tel que $N = 1 + 17x$

$N \equiv 5(13)$. Il existe $y \in \mathbb{Z}$ tel que $N = 5 + 13y$

c.

$17x - 13y = 4$

Le couple (1;1) est une solution particulière de l'équation car:

$17 \times 1 - 13 \times 1 = 17 - 13 = 4$

$17x - 13y = 4$

$\Leftrightarrow 17x - 13y = 4 = 17 \times 1 - 13 \times 1$

$\Leftrightarrow 17(x-1) = 13 \times (y-1)$

17 divise $13(y-1)$

$\mathscr{P}$gcd(17;13)=1

D'après le théorème de Gauss, 17 divise $(y-1)$

Donc il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $y-1=17k$

Pour tout $k \in \mathbb{Z}$ si $y-1=17k$, alors:

$17(x-1)=13(y-1) \Leftrightarrow 17(x-1)=13 \times 17k \Leftrightarrow x-1=13k$

Conclusion:

Pour tout $k \in \mathbb{Z}$, $y-1=17k$ et $x-1=13k$

$$\begin{cases} x = 13k+1 \\ y = 17k+1 \end{cases} \quad k \in \mathbb{Z}$$

$S = \{(13k+1; 17k+1); k \in \mathbb{Z}\}$

d.

$N = 1 + 17x = 5 + 13y$

$17x - 13y = 4$

D'où, $N = 1 + 17x = 1 + 17(13k+1) = 1 + 221k + 17 = 18 + 221k$

ou $N = 5 + 13y = 5 + 13(17k+1) = 5 + 221k + 13 = 18 + 221k$

e.

Si $\begin{cases} N \equiv 5(13) \\ N \equiv 1(17) \end{cases}$ alors d'après les questions précédentes, il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $N = 18 + 221k$, c'est à dire

$N \equiv 18(221)$

Réciproquement, si $N\equiv 18(221)$ alors il existe $K\in\mathbb{Z}$ tel que $N=18+221K$

$N=18+221K$

$N=18+13\times 17K$

Donc: $N\equiv 18(13)$

Comme $18\equiv 5(13)$

On a donc: $N\equiv 5(13)$

De même:

$N=18+221K$

$N=18+13\times 17K$

Donc: $N\equiv 18(17)$

Comme $18\equiv 1(17)$

On a donc: $N\equiv 1(17)$

Par conséquent, N est solution du système $\begin{cases} N\equiv 5(13) \\ N\equiv 1(17) \end{cases}$

2.

a.

17 est un nombre premier. 17 est premier avec 10.

D'après le théorème de Fermat: $10^{17-1}-1\equiv 0(17)$

Donc $10^{16}\equiv 1(17)$

Il existe donc un entier naturel k tel que $10^k\equiv 1(17)$

(remarque: si on veut déterminer les restes des divisions euclidiennes des puissances de 10 par 17, le plus petit entier n naturel non nul tel que 10^n ait pour reste 1 est 16)

b. Existe-t-il un entier naturel t tel que $10^t\equiv 18(221)$?

Si $10^t\equiv 18(221)$ alors $10^t\equiv 5(13)$

$10\equiv 10(13)$

$10^2\equiv 9(13)$ (car $100=13\times 7+9$)

$10^3\equiv 90(13)\equiv 12(13)$ (car $90=13\times 6+12$)

$10^4\equiv 120(13)\equiv 3(13)$ (car $120=13\times 9+3$)

$10^5\equiv 30(13)\equiv 4(13)$ (car $30=13\times 2+4$)

$10^6\equiv 40(13)\equiv 1(13)$ (car $40=13\times 3+1$)

$10^7\equiv 10(13)$

etc....

Donc pour tout $n\in\mathbb{N}$ le reste de le division euclidienne de 10^n par 13 est égal à: 10; 9; 12; 3; 4 ou 1.

Donc le reste n'est jamais égal à 5 et il n'existe pas d'entier naturel t tel que $10^t\equiv 5(13)$ donc il n'existe pas d'entier naturel t tel que $10^t\equiv 18(221)$.

EXERCICE 6

1. a.

a	b	Quotient	reste
226	109	2	8
109	8	13	5
8	5	1	3
5	3	1	2
3	2	1	1

2	1	2	0

$\mathscr{P}$gcd(109; 226)=1
Le théorème de Bezout permet d'affirmer que l'équation $(E): 109x-226y=1$ admet des solutions avec $x\in\mathbb{Z}$ et $y\in\mathbb{Z}$.

b.
On détermine une solution particulière de l'équation en utilisant l'algorithme d'Euclide.

$226=109\times2+8$ donc $8=226-109\times2$

$109=8\times13+5$
$109=(226-109\times2)\times13+5$ donc $5=109\times27-226\times13$

$8=5\times1+3$
$226-109\times2=(109\times27-226\times13)\times1+3$ donc $3=109\times(-29)+226\times14$

$5=3\times1+2$
$109\times27-226\times13=(109\times(-29)+226\times14)\times1+2$ donc $2=109\times56-226\times27$

$3=2\times1+1$
$109\times(-29)+226\times14=(109\times56-226\times27)\times1+1$ donc $1=109\times(-85)+226\times41$

On a:
$109\times(-85)-226\times(-41)$
Le couple (-85;-41) est une solution particulière de l'équation (E)

$109x-226y=1$
$\Leftrightarrow 109x-226y=1=109\times(-85)-226\times(-41)$
$\Leftrightarrow 109(x+85)=226(y+41)$
109 divise $226(y+41)$
$\mathscr{P}$gcd(109;226)=1
D'après le théorème de Gauss, 109 divise $(y+41)$
Donc il existe $k\in\mathbb{Z}$ tel que $y+41=109k$
Pour tout $k\in\mathbb{Z}$ si $y+41=109k$, alors: $109(x+85)=226(y+41)\Leftrightarrow 109(x+85)=226\times109k\Leftrightarrow x+85=226k$

Conclusion:
Pour tout $k\in\mathbb{Z}$, $y+41=109k$ et $x+85=226k$

$$\begin{cases}x=226k-85\\y=109k-41\end{cases}\quad k\in\mathbb{Z}$$

Pour $k=1$
$x=226-85=141$ et $y=109-41=68$
(141; 68) est une autre solution particulière de l'équation, et donc:
$S=\{(226K+141;109K+68);K\in\mathbb{Z}\}$

$109x-226y=1\quad\Leftrightarrow 109x=1+226y$
Si $K<0$ alors $x<0$
Si $K>0$ alors $x>226$
Si $K=0$ alors $x=141$ (et $y=68$)
141 est l'unique entier naturel non nul strictement inférieur à 226 tel que:
$109\times141=1+226\times68$ donc $d=141$ et e$=68$

2.

On considère les nombres premiers 2; 3; 5; 7; 11 et 13. ($17^2=289$)
227 n'est pas divisible par 2; 3; 5; 7; 11 et 13 donc 227 est un nombre premier.

3.
a.

$f : A \to A$
$a \longmapsto f(a)$ $f(a)$ est le reste de la division euclidienne de a^{109} par 227.

$g : A \to A$
$a \longmapsto g(a)$ $g(a)$ est le reste de la division euclidienne de a^{141} par 227.

$f(0)$ est le reste de la division euclidienne de 0^{109} par 227.
$0^{109}=0$. Le reste de la division euclidienne de 0 par 227 est 0.
$f(0)=0$

$g(0)$ est le reste de la division euclidienne de 0^{141} par 227.
$0^{141}=0$. Le reste de la division euclidienne de 0 par 227 est 0.
$g(0)=0$

Donc $g[f(0)]=0$.

b.
227 est un nombre premier donc il est premier avec tous les entiers naturels non nuls.
D'après le petit théorème de Fermat:
$a \in A$, $a^{227-1} \equiv 1(227)$
$a^{226} \equiv 1(227)$

c.
$f(a) \equiv a^{109}(227)$

$g[f(a)] \equiv (f(a))^{141}(227)$

$g[f(a)] \equiv (a^{109})^{141}(227)$

Or, d'après la question 1. b. $109 \times 141 = 1 + 226 \times 68$
$(a^{109})^{141} = (a^{226})^{68} \times a$

Or, d'après la question 3. b., $a^{226} \equiv 1(227)$
$a^{226} \equiv 1(227)$
$(a^{226})^{68} \equiv 1(227)$
$(a^{226})^{68} \times a \equiv a(227)$

Par suite,
$g[f(a)] \equiv a(227)$
donc, $g[f(a)] = a$.

De même,
$g(a) \equiv a^{141}(227)$

$f[g(a)] \equiv (g(a))^{109} (227)$

$f[g(a)] \equiv (a^{141})^{109} (227)$

Or, d'après la question 1. b. $109 \times 141 = 1 + 226 \times 68$
$(a^{141})^{109} = (a^{226})^{68} \times a$

Or, d'après la question 3. b., $a^{226} \equiv 1 (227)$
$a^{226} \equiv 1 (227)$
$(a^{226})^{68} \equiv 1 (227)$
$(a^{226})^{68} \times a \equiv a (227)$

Par suite,
$f[g(a)] \equiv a (227)$
donc, $f[g(a)] = a$.