Calcul matriciel

1. Vocabulaire des graphes non orientés

Nous vous proposons d'étudier quelques notions sur les graphes pour introduire la notion de matrice.

1.1. Introduction

On considère un ensemble de points du plan . On relie certaines paires de points par des « liens » (c'est à dire des lignes qui ne sont pas nécessairement des droites)

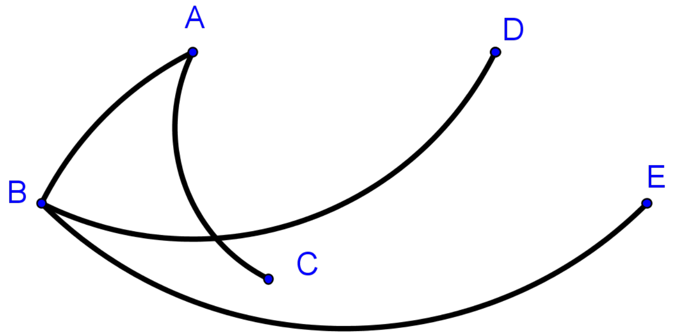


Figure 1

La figure obtenue se nomme **graphe**.

1.2. Vocabulaire élémentaire

- Les points sont nommés sommets du **graphe**.
- Le lien (ou la ligne joignant deux sommets) se nomme **arête**.
- Lorsqu'il existe une arête joignant deux sommets, on dit que ces sommets sont **adjacents**.
- Le **degré** d'un sommet est le nombre d'arêtes dont un sommet est une extrémité.

1.3. Exemple

Pour le graphe G de la figure 1 :

L'ordre du graphe G est **5** (il y a 5 sommets).

Le **degré** de A est **2**.

Le **degré** de B est **3**.

Le **degré** de C est **1**.

Le **degré** de D est **1**.

Le **degré** de E est **1**.

Les sommets A et B sont **adjacents**.

Les sommets A et E **ne sont pas adjacents**.

De même, les sommets A et D **ne sont pas adjacents**.

Remarque :

Le nombre d'arêtes est 4 et la somme des degrés des 5 sommets : 2+3+1+1+1=8

1.4. Deuxième exemple

On considère le graphe G' de la figure 2.

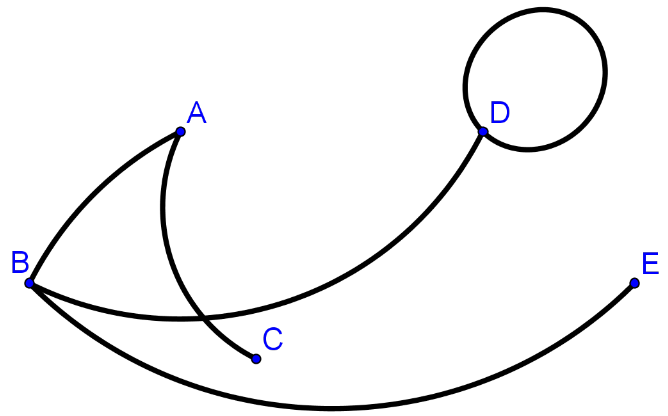


Figure 2

(On a ajouté une boucle en D, c'est à dire une arête ayant les deux extrémités confondues en D).

L'ordre du graphe G' est **5**.

Le **degré** de A est **2**.

Le **degré** de B est **3**.

Le **degré** de C est **1**.

Le **degré** de D est **3**.

Le **degré** de E est **1**.

Remarque :

Le nombre d'arêtes est 5 et la somme des degrés des 5 sommets : 2+3+1+3+1=10

Propriété (admise)

La **somme des degrés** dans un graphe non orienté est égale à **deux fois le nombre d'arêtes** du graphe.

1.5. Matrice associée à un graphe non orienté

Pour le graphe G de la figure 1, on numérote les sommets de 1 à 5.

A:1 B:2 C:3 D:4 E:5

Et on remplit le tableau à double entrée suivant, dans la case de la ligne i et de la colonne j, on écrit le nombre a_{ij} égale à **1** s'il existe une arête reliant i à j et **0** s'il n'existe pas d'arête reliant i à j.

	1	2	3	4	5
1	0	1	1	0	0
2	1	0	0	1	1
3	1	0	0	0	0
4	0	1	0	0	0
5	0	1	0	0	0

Le tableau des se nomme **matrice associée au graphe G ou matrice d'adjacence du graphe G** et on note :

$$\text{Matrice associée} \quad M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Cette matrice est **carrée** : 5 lignes et 5 colonnes.

Cette matrice est **symétrique** par rapport à la première diagonale (c'est à dire $\boxed{a_{ij}=a_{ji}}$)

Remarque :

Pour l'exemple de la figure 2 (on a tout simplement ajouté une boucle en D :4)

Le coefficient $a_{44}=1$ pour la nouvelle matrice et tous les autres sont inchangés.

$$\text{matrice associée} \quad M' = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

2. Matrices

2.1. Définition

m et n sont deux entiers naturels non nuls.

Une **matrice** est un tableau rectangulaire, forme de m lignes et n colonnes, de nombres réels. **La dimension** de cette matrice est $\boxed{m \times n}$.

2.2. Utilisation d'un logiciel et d'une calculatrice

a) Utilisation du logiciel géogébra :

Dans la zone de saisie, on entre :

M={{1,2,3},{1,0,-1}}

$m=2$ et $n=3$

On obtient dans la zone d'algèbre :

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

On obtient une matrice à 2 lignes et 3 colonnes.

b) Utilisation du logiciel Xcas :

On écrit :

M:=[[1,2,3],[1,0,-1]]

c) Utilisation du tableur libreoffice :

A1:1	B1:2	C1:3
A2:1	B2:0	C2 :-1

d) Utilisation de la TI83 :

Il faut appuyer sur la touche seconde, puis x^{-1} .

Choisir EDIT puis 1:[A]

Régler le format : $m\times n$, puis entrer les coefficients en validant chacun en appuyant sur ENTER.

e) Utilisation de la casio Graph 35+ :

Dans le meny RUN MATH, choisir mat par la touche F3 puis MatA.

Par F3 (dim), régler le format : $m\times n$, puis entrer les coefficients en validant chacun en appuyant sur EXE

2.3. Cas particuliers

a) Matrices lignes :

Une **matrice ligne** est une matrice de dimension : $1 \times n$ (avec $n \in \mathbb{N}^*$).

Exemples :

$$M_1 = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$
$$M_2 = \begin{pmatrix} -5 & 2 \end{pmatrix}$$
$$M_3 = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

b) Matrices colonnes :

Une **matrice colonne** est une matrice de dimension : $n \times 1$ (avec $n \in \mathbb{N}^*$).

Exemples :

$$M_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$
$$M_2 = \begin{pmatrix} -5 \\ 2 \end{pmatrix}$$
$$M_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$$

c) Matrices carrées :

Une **matrice carrée** est une matrice de dimension : $n \times n$ (avec $n \in \mathbb{N}^*$).

Exemples :

$$M_1 = \begin{pmatrix} 5 & -3 & 1 \\ 1 & 2 & -2 \\ 2 & 4 & 3 \end{pmatrix}$$
$$M_2 = \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

3. Opérations sur les matrices

3.1. Addition de deux matrices

a) Définition

$A=(a_{ij})$ et $B=(b_{ij})$ sont deux matrices de mêmes dimensions $m\times n$.

La **somme** des matrices $A=(a_{ij})$ et $m\times n$ est la matrice $C=(c_{ij})$ de même dimension telle que pour tout $1\leqslant i\leqslant n$ et $1\leqslant j\leqslant n$: $\boxed{c_{ij}=a_{ij}+b_{ij}}$. On note $\boxed{A+B=C}$.

b) Exemples :

1er exemple :

Si on utilise les logiciels géogébra ou Xcas ou les calculettes, on entre les matrices A et B, puis on tape C=A+B.

$$A=\begin{pmatrix}-1&2&-4\\3&0&2\end{pmatrix}\qquad B=\begin{pmatrix}4&-3&1\\-4&-1&2\end{pmatrix}$$

C=A+B

$$C=\begin{pmatrix}3&-1&-3\\-1&-1&4\end{pmatrix}$$

2ième exemple :

$$A=\begin{pmatrix}1&2\end{pmatrix}\qquad B=\begin{pmatrix}-2&3\end{pmatrix}$$

C=A+B

$$C=\begin{pmatrix}-1&5\end{pmatrix}$$

3ième exemple :

$$A=\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}\qquad B=\begin{pmatrix}-2\\-1\\-3\end{pmatrix}$$

C=A+B

$$C=\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}$$

3.2. Multiplication d'une matrice par un réel

a) Définition :

λ est un nombre réel. $A=(a_{ij})$ est une matrice de dimensions $m\times n$.
Le **produit** de la matrice A par le nombre réel λ est la matrice $B=(b_{ij})$ de même dimension telle que pour tout $1\leqslant i\leqslant n$ et $1\leqslant j\leqslant n$: $\boxed{b_{ij}=\lambda\times a_{ij}}$. On note $\boxed{B=\lambda.A}$.

b) Exemples :

1er exemple :
Avec le logiciels géogébra, on entre A et M=2A.

$$A=\begin{pmatrix}-1 & 2 & -4\\ 3 & 0 & 2\end{pmatrix}$$

M=2A

$$M=\begin{pmatrix}-2 & 4 & -8\\ 6 & 0 & 4\end{pmatrix}$$

2ième exemple :

$$A=\begin{pmatrix}-2 & 3\end{pmatrix}$$

M=3A

$$M=\begin{pmatrix}-6 & 9\end{pmatrix}$$

3ième exemple :

$$A=\begin{pmatrix}1\\ -2\\ 3\end{pmatrix}$$

M=-2A

$$M=\begin{pmatrix}-2\\ 4\\ -6\end{pmatrix}$$

3.3. Produit d'une matrice ligne 1*n et d'une matrice colonne n*1

a) Définition :

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_{11} \\ b_{21} \\ b_{31} \\ b_{41} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} \times b_{11} + a_{12} \times b_{21} + a_{13} \times b_{31} + a_{14} \times b_{41} \end{pmatrix}$$

b) Exemples :

1er exemple :

On entre A et B et C=A*B

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

C=AxB

$$C = \begin{pmatrix} 3 \end{pmatrix}$$

2ième exemple :

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -3 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

C=AxB

$$C = \begin{pmatrix} -11 \end{pmatrix}$$

3.4. Produit d'une ligne et d'une matrice carrée ou produit d'une matrice carrée et d'une matrice colonne

a) Définitions :

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} b_{11} + a_{12} b_{21} & a_{11} b_{12} + a_{12} b_{22} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ a_{23} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_{11} a_{11} + b_{12} a_{21} + b_{13} a_{31} \\ b_{21} a_{11} + b_{22} a_{21} + b_{23} a_{31} \\ b_{31} a_{11} + b_{32} a_{21} + b_{33} a_{31} \end{pmatrix}$$

b) Exemples :

1er exemple :

On entre A et B et C=A*B

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

C=AxB

$$C = \begin{pmatrix} -7 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

La dimension de A est 1×3 .

La dimension de B est 3×3 .

La dimension de C est 1×3 .

2ième exemple :

On entre B et A et C=B*A

(attention à l'ordre des matrices)

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -1 & 5 \end{pmatrix} \quad A = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix}$$

C=BxA

$$C = \begin{pmatrix} -10 \\ -16 \end{pmatrix}$$

La dimension de B est 2×2 .

La dimension de A est 2×1 .

La dimension de C est 2×1 .

3.5. Produit de deux matrices carrées de même dimension

(Aucune connaissance n'est exigible sur le produit de deux matrices carrées de même dimension, il suffit d'utiliser une calculatrice ou un logiciel)

a) Définitions :

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}$$

AxB=C

$$C = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix}$$

$c_{11}=a_{11}b_{11}+a_{12}b_{21}$

$c_{12}=a_{11}b_{12}+a_{12}b_{22}$

$c_{21}=a_{21}b_{11}+a_{22}b_{21}$

$c_{22}=a_{21}b_{12}+a_{22}b_{22}$

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \qquad B=\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{pmatrix}$$

$$A \times B = C$$

$$C=\begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{pmatrix}$$

$$c_{11}=a_{11}b_{11}+a_{12}b_{21}+a_{13}b_{31}$$
$$c_{12}=a_{11}b_{12}+a_{12}b_{22}+a_{13}b_{32}$$
$$c_{13}=a_{11}b_{13}+a_{12}b_{23}+a_{13}b_{33}$$
$$c_{21}=a_{21}b_{11}+a_{22}b_{21}+a_{23}b_{31}$$
$$c_{22}=a_{21}b_{12}+a_{22}b_{22}+a_{23}b_{32}$$
$$c_{23}=a_{21}b_{13}+a_{22}b_{23}+a_{23}b_{33}$$
$$c_{31}=a_{31}b_{11}+a_{32}b_{21}+a_{33}b_{31}$$
$$c_{32}=a_{31}b_{12}+a_{32}b_{21}+a_{33}b_{32}$$
$$c_{33}=a_{31}b_{13}+a_{32}b_{23}+a_{33}b_{33}$$

b) Exemples :

1er exemple :

$$A=\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -3 & 4 \end{pmatrix} \qquad B=\begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$C = A \times B$$

$$C=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 7 & 14 \end{pmatrix}$$

2ième exemple :

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 4 & 2 \end{pmatrix} \qquad B=\begin{pmatrix} 5 & 1 & -3 \\ 2 & 4 & 1 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$C = A \times B$$

$$C=\begin{pmatrix} 3 & 9 & 2 \\ -7 & -1 & 4 \\ 9 & 17 & 3 \end{pmatrix}$$

3.6. Remarque

On peut calculer le produit de deux matrices si le nombre de colonnes de la 1ère matrice est égale au nombre de lignes de la 2ième matrice.

Exemple :

$$A=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix} \qquad B=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \\ 5 & -2 \end{pmatrix}$$

$$C = A \times B$$

$$C=\begin{pmatrix} 12 & -7 \\ 5 & 12 \end{pmatrix}$$

3.7. Propriétés

a) A ; B et C sont des matrices carrées :

$\boxed{(A\times B)\times C = A\times(B\times C)}$

(On vérifiera cette propriété sur des exemples dans la fiche d'exercices)

b) A ; B et C sont des matrices carrées :

$\boxed{A\times(B+C) = A\times B + A\times C}$

(On vérifiera cette propriété sur des exemples dans la fiche d'exercices)

c) Il existe des matrices carrées A et B telles que $\boxed{A\times B \neq B\times A}$

(On donnera des exemples dans la fiche d'exercices)

d) $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ est **la matrice identité** de dimension 2×2 .

On peut vérifier que pour toute matrice carrée A de dimension 2×2 , on ait :

$\boxed{A\times I = I\times A = A}$

Pour une matrice carrée A de dimension 2×2 , s'il existe une matrice B (carrée de dimension 2×2) telle que $\boxed{A\times B = B\times A = I}$, on dit que la matrice **A est inversible** et que **B est l'inverse de A**. On note $\boxed{B = A^{-1}}$

Remarques :

Toutes les matrices ne sont pas nécessairement inversibles.

Lorsqu'une matrice est inversible, on détermine l'inverse de A en utilisant la calculatrice ou un logiciel. (En général, la calculatrice ou le logiciel donneront des valeurs approchées des coefficients).

Exemples :

$A = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ $\quad B = \begin{pmatrix} 3 & -5 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$

$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

AxB=BxA=I

$B=A^{-1}$

De même, $I=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$ est la matrice identité de dimension 3×3 .

$$A=\begin{pmatrix}1&2&3\\-1&0&1\\1&4&2\end{pmatrix}\quad D=\begin{pmatrix}0.4&-0.8&-0.2\\-0.3&0.1&0.4\\0.4&0.2&-0.2\end{pmatrix}$$

$$I=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$$

AxD=DxA=I

$D=A^{-1}$

4. Puissances nième d'une matrice carrée

4.1. Définition

M est une matrice carrée.

$\boxed{M^2=M\times M}$

$k\in\mathbb{N}\quad k\geqslant 2\quad \boxed{M^k=M^{k-1}\times M}$

4.2. Exemple

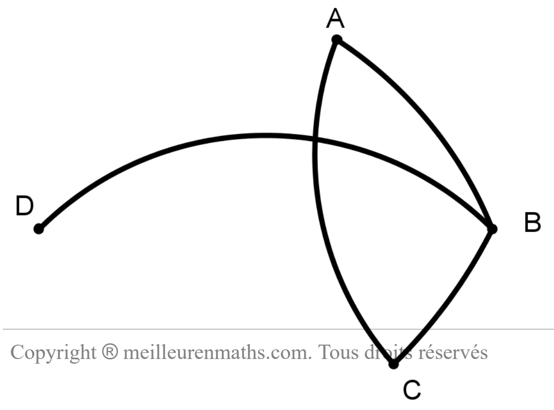
$$M=\begin{pmatrix}0&1&1&0\\1&0&1&1\\1&1&0&0\\0&1&0&0\end{pmatrix}$$

$A=M^2\quad A=\begin{pmatrix}2&1&1&1\\1&3&1&0\\1&1&2&1\\1&0&1&1\end{pmatrix}$

$B=M^3\quad B=\begin{pmatrix}2&4&3&1\\4&2&4&3\\3&4&2&1\\1&3&1&0\end{pmatrix}$

4.3. Graphes non orientés

a) Définitions :



Soit G le graphe suivant :

Une **chaîne** de G est une liste ordonnée de sommets telle que chaque sommet de la liste soit adjacent au suivant.

La **longueur** d'une chaîne est le nombre d'arêtes qui la composent.

Exemples :

ABD longueur:2

ACBD longueur:3

ABACB longueur:4

b) On numérote les sommets en respectant l'ordre alphabétique (A:1;B:2;C:3;D:4)

La matrice associée au graphe G est :

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

c) On dénombre les chaînes de longueur 2 du graphe G et on associe alors une autre matrice $A=(a_{ij})$.

- De A vers A 2 : ABA et ACA $a_{11}=2$
- De A vers B 1 : ACB $a_{21}=1$
- De A vers C 1 : ABC $a_{31}=1$
- De A vers D 1 : ABD $a_{41}=1$
- De B vers A 1 : BCA $a_{12}=1$
- De B vers B 3 : BAB et BCB et BDB $a_{22}=3$
- De B vers C 1 : BAC $a_{32}=1$
- De B vers D 0 : il n'existe pas de chaîne de longueur 2 reliant B à D $a_{42}=0$
- De C vers A 1 : CBA $a_{13}=1$
- De C vers B 1 : CAB $a_{23}=1$
- De C vers C 2 : CAC et CBD $a_{33}=2$
- De C vers D 1 : CBD $a_{43}=1$
- De D vers A 1 : DBA $a_{14}=1$
- De D vers B 0 $a_{24}=0$
- De D vers C 1 : DBC $a_{34}=1$
- De D vers D 1 : DBD $a_{44}=1$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

On remarque : $\boxed{A=M^2}$

c) On dénombre les chaînes de longueur 3 du graphe G et on associe alors une autre matrice $B=(b_{ij})$.

- De A vers A 2 : ABCA et ACBA $b_{11}=2$

- De A vers B 4 : ABCB et ABAB et ACAB et ABDB $b_{21}=4$
- De A vers C 3 : ACBC et ABAC et ACAC $a_{31}=3$
- De A vers D 1 : ACBD $b_{41}=1$
- De B vers A 4 : BCBA et BABA et BACA et BDBA $b_{12}=4$
- De B vers B 2 : BACB et BCAB $b_{22}=2$
- De B vers C 4 : BCBC et BABC et BDBC et BCAC $b_{32}=4$
- De B vers D 3 : BDBD et BCBD et BABD $b_{42}=3$
- De C vers A 3 : CBCA et CABA et CACA $b_{13}=3$
- De C vers B 4 : CBCB et CBAB et CBDB et CACB $b_{23}=4$
- De C vers C 2 : CABC et CBAC $b_{33}=2$
- De C vers D 1 : CABD $b_{43}=1$
- De D vers A 1 : DBCA $b_{14}=1$
- De D vers B 3 : DBDB et DBCB et DBCB $b_{24}=3$
- De D vers D 0 $b_{44}=0$

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 3 & 1 \\ 4 & 2 & 4 & 3 \\ 3 & 4 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

On remarque que $\boxed{B=M^3}$

c) On admet le résultat suivant :
Soit G un graphe d'ordre n $(n \in \mathbb{N}^*)$.
Les sommets sont numérotés de 1 à n .
M est la matrice carrée de dimension $n \times n$ associée au graphe G.
k est un entier naturel non nul.
Le nombre a_{ij} de la matrice M^k est le nombre de chaînes de longueur k reliant i à j .