Fiche exercices

EXERCICE 1

On considère les matrices de dimension 3×3 suivantes :

$$A=\begin{pmatrix}1&2&-1\\-1&1&2\\2&-1&1\end{pmatrix}\quad B=\begin{pmatrix}-3&3&1\\2&-1&3\\1&2&-2\end{pmatrix}\quad C=\begin{pmatrix}-2&3&-1\\1&2&1\\-1&-1&2\end{pmatrix}$$

1. En utilisant une calculatrice ou un logiciel, calculer :
$E=A\times B$ et $F=E\times C$
$G=B\times C$ et $H=A\times G$
Que vérifie-t-on ?
2. Calculer :
$L=A+B$ et $M=L\times C$
$N=A\times C$ et $P=B\times C$
$Q=N+P$
Que vérifie-t-on ?
3. Calculer :
$R=A\times B$ et $S=B\times A$
Que remarque-t-on ?

EXERCICE 2

On considère les matrices de dimension 2×2 suivantes :

$$A=\begin{pmatrix}2&4\\3&5\end{pmatrix}\quad B=\begin{pmatrix}2&8\\5&2\end{pmatrix}\quad C=\begin{pmatrix}5&2\\1&1\end{pmatrix}$$

1. En utilisant une calculatrice ou un logiciel, démontrer que A est inversible et déterminer son inverse $D=A^{-1}$
2. Calculer :
$E=A\times B$ et $F=A\times C$
3. Déterminer la matrice M de dimension 2×2 telle que $A\times M=C$

EXERCICE 3

On considère les matrices de dimension 2×2 suivantes :

$$\mathbf{A}=\begin{pmatrix}1&-2\\2&-4\end{pmatrix}\quad \mathbf{B}=\begin{pmatrix}2&4\\1&2\end{pmatrix}\quad \mathbf{C}=\begin{pmatrix}-8&2\\-4&1\end{pmatrix}$$

Calculer $A\times B$ et $A\times C$
A est-elle une matrice simplifiable pour la multiplication ?

EXERCICE 4

On considère la matrice $M=\begin{pmatrix}1&1\\2&-1\end{pmatrix}$

1. En utilisant la calculatrice ou un logiciel, calculer M^2 ; M^3 ; M^4 ; M^5 ; …
Quelles conjectures peut-on faire pour M^{2k} ($k\in\mathbb{N}^*$) et M^{2k+1} ($k\in\mathbb{N}$)
2. Démontrer ces conjectures en utilisant un raisonnement par récurrence.

EXERCICE 5

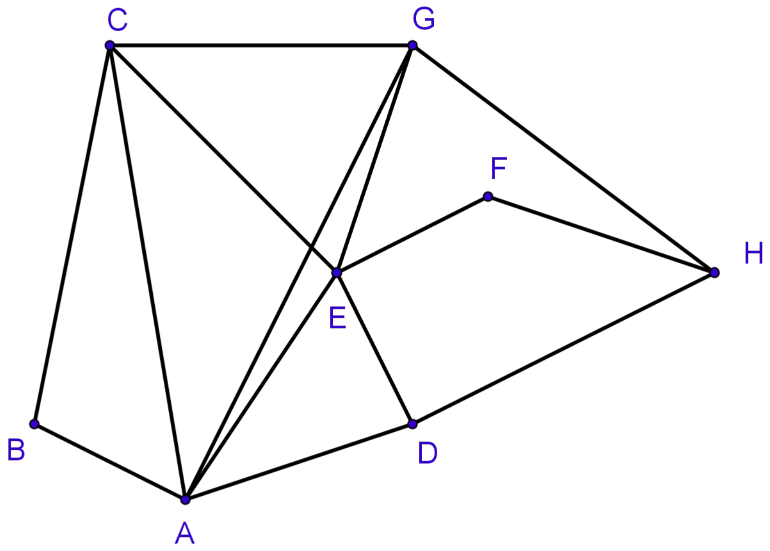
On considère les matrices de dimension 2×2 suivantes :

$$D = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} \quad T = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad A=D+T$$

1. Pour tout entier naturel non nul k , calculer D^k et T^k .
2. Développer : $(D+T)\times(D+T)$
Calculer D^2 ; $T\times D$; $D\times T$
En déduire A^2
3. Pour tout entier naturel non nul k , montrer que :
$A^k=\begin{pmatrix} 4^k & a_k \\ 0 & 5^k \end{pmatrix}$ avec a_k nombre réel
et déduire une relation de récurrence liant a_{k+1} et a_k .
4. On pose pour tout entier naturel non nul k : $b_k=4^k+a_k$
Démontrer que (b_k) est une suite géométrique dont on déterminera la raison et le premier terme. En déduire l'expression de a_k en fonction de k pour $k\in\mathbb{N}^*$.

EXERCICE 6

On considère le graphe $\mathcal{G}$ suivant :



1. On numérote les sommets de 1 à 8 en respectant l'ordre alphabétique. Déterminer M la matrice associée au graphe $\mathcal{G}$.
2. Démontrer qu'il existe exactement 72 chemins de longueur 3 reliant E aux huit autres sommets.

EXERCICE 7

On considère les matrices de dimensions 3×3 suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 5 \\ 3 & 4 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} -3 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & -1 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 4 & -1 \\ 2 & 1 & 2 \\ -3 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

1. En utilisant une calculatrice ou un logiciel, calculer :

$E=A\times B$ $F=E\times C$
$G=B\times C$ $H=A\times G$
Que vérifie-t-on ?

2. Calculer :
$L=A+B$ $M=L\times C$
$N=A\times C$ $P=B\times C$
$Q=N+P$
Que vérifie-t-on ?

3. Calculer :
$R=A\times B$ $S=B\times A$
Que remarque-t-on ?

EXERCICE 8

On considère les matrices de dimensions 2×2 suivantes :

$$A=\begin{pmatrix}-5 & -5\\ 3 & 4\end{pmatrix}\quad B=\begin{pmatrix}3 & 4\\ 1 & 5\end{pmatrix}\quad C=\begin{pmatrix}5 & 1\\ 2 & 5\end{pmatrix}$$

1.En utilisant une calculatrice ou un logiciel, démontrer que A est inversible et déterminer son inverse $D=A^{-1}$.

2. Calculer :
$E=A\times B$ $F=A\times C$

3. Déterminer la matrice M de dimension 2×2 telle que $A\times M=C$

EXERCICE 9

On considère les matrices de dimensions 3×3 suivantes :

$$A=\begin{pmatrix}-1 & 2 & 3\\ -1 & 2 & 3\\ 1 & -2 & -3\end{pmatrix}\quad B=\begin{pmatrix}1 & 1 & 2\\ 2 & -2 & 0\\ 3 & 1 & 4\end{pmatrix}\quad C=\begin{pmatrix}6 & 5 & 11\\ -7 & 1 & -6\\ 2 & -1 & 1\end{pmatrix}$$

Calculer $B\times A$ et $C\times A$

EXERCICE 10

On considère les matrices de dimensions 3×3 suivantes :

$$A=\begin{pmatrix}-1 & 1 & 1\\ 1 & -1 & 1\\ 1 & 1 & -1\end{pmatrix}\quad B=\begin{pmatrix}0 & 0.5 & 0.5\\ 0.5 & 0 & 0.5\\ 0.5 & 0.5 & 0\end{pmatrix}$$

Calculer $A\times B$ et $B\times A$.
Que peut-on conclure ?

EXERCICE 11

On considère les matrices de dimensions 2×2 suivantes :

$\mathbf{D} = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} \quad \mathbf{T} = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ **et** $\quad A=D+T$

1. Pour tout entier naturel k , calculer D^k et T^k .

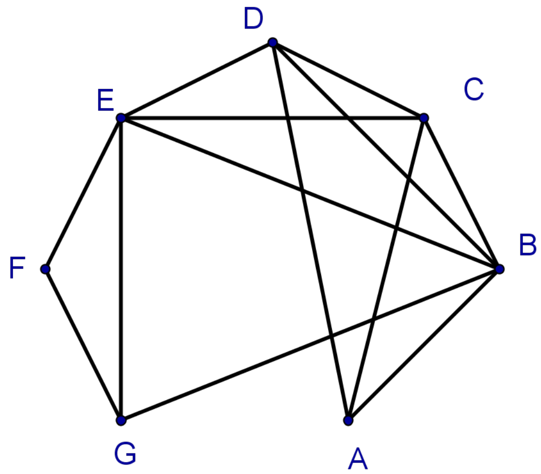
2. Calculer A^2 .

3. Pour tout entier non nul k , montrer que $A^k = \begin{pmatrix} 3^k & a_k \\ 0 & 5^k \end{pmatrix}$ avec a_k nombre réel et déduire une relation de récurrence liant a_{k+1} et a_k .

4. On pose pour tout entier non nul k $b_k = 3^k + a_k$.
Démontrer que (b_k) est une suite géométrique dont on déterminera la raison et le premier terme/
En déduire l'expression de a_k en fonction de k pour tout entier naturel non nul k .

EXERCICE 12

On considère le graphe G suivant :



1. On numérote les sommets de 1 à 7 en respectant l'ordre alphabétique. Déterminer M la matrice associée au graphe G.

2. Déterminer le nombre de chemins de longueur 8 de B à D.

CORRECTION

EXERCICE 1

1 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} -3 & 3 & 1 \\ 2 & -1 & 3 \\ 1 & 2 & -2 \end{pmatrix}$ $C = \begin{pmatrix} -2 & 3 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

E=AxB $E = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 9 \\ 7 & 0 & -2 \\ -7 & 9 & -3 \end{pmatrix}$

F=ExC $F = \begin{pmatrix} -10 & -11 & 17 \\ -12 & 23 & -11 \\ 26 & 0 & 10 \end{pmatrix}$

G=BxC $G = \begin{pmatrix} 8 & -4 & 8 \\ -8 & 1 & 3 \\ 2 & 9 & -3 \end{pmatrix}$

H=AxG $H = \begin{pmatrix} -10 & -11 & 17 \\ -12 & 23 & -11 \\ 26 & 0 & 10 \end{pmatrix}$

F=H donc (AxB)xC=Ax(BxC)

1 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} -3 & 3 & 1 \\ 2 & -1 & 3 \\ 1 & 2 & -2 \end{pmatrix}$ $C = \begin{pmatrix} -2 & 3 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

E=AxB $E = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 9 \\ 7 & 0 & -2 \\ -7 & 9 & -3 \end{pmatrix}$

F=ExC $F = \begin{pmatrix} -10 & -11 & 17 \\ -12 & 23 & -11 \\ 26 & 0 & 10 \end{pmatrix}$

G=BxC $G = \begin{pmatrix} 8 & -4 & 8 \\ -8 & 1 & 3 \\ 2 & 9 & -3 \end{pmatrix}$

H=AxG $H = \begin{pmatrix} -10 & -11 & 17 \\ -12 & 23 & -11 \\ 26 & 0 & 10 \end{pmatrix}$

F=H donc (AxB)xC=Ax(BxC)

3 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} -3 & 3 & 1 \\ 2 & -1 & 3 \\ 1 & 2 & -2 \end{pmatrix}$

R=AxB $R = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 9 \\ 7 & 0 & -2 \\ -7 & 9 & -3 \end{pmatrix}$

S=BxA $S = \begin{pmatrix} -4 & -4 & 10 \\ 9 & 0 & -1 \\ -5 & 6 & 1 \end{pmatrix}$

$R \neq S$ donc $A\times B \neq B\times A$

EXERCICE 2

1 $A = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$

$D=A^{-1}$ $D = \begin{pmatrix} -2.5 & 2 \\ 1.5 & -1 \end{pmatrix}$

DxA=AxD=I $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

2 $A = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} 2 & 8 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}$ $C = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

E=AxB $E = \begin{pmatrix} 24 & 24 \\ 31 & 34 \end{pmatrix}$

F=AxC $F = \begin{pmatrix} 14 & 8 \\ 20 & 11 \end{pmatrix}$

3 $A = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$ $C = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

$A\times M = C$ si et seulement si $D\times(A\times M) = D\times C$
$(D\times A)\times M = D\times C$
Or A est inversible et D est l'inverse de A
Donc, $I\times M = D\times C$, donc $M = D\times C$

M=DxC $M = \begin{pmatrix} -10.5 & -3 \\ 6.5 & 2 \end{pmatrix}$

EXERCICE 3

$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -4 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ $C = \begin{pmatrix} -8 & 2 \\ -4 & 1 \end{pmatrix}$

D=AxB $D = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

E=AxC $E = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

AxB=AxC et $B \neq C$

Donc A n'est pas une matrice simplifiable pour la multiplication.

EXERCICE 4

1.

$M=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 2 & -1\end{pmatrix}$

$M^2=\begin{pmatrix}3 & 0\\ 0 & 3\end{pmatrix}$

$M^3=\begin{pmatrix}3 & 3\\ 6 & -3\end{pmatrix}$

$M^4=\begin{pmatrix}9 & 0\\ 0 & 9\end{pmatrix}$

$M^5=\begin{pmatrix}9 & 9\\ 18 & -9\end{pmatrix}$

On peut conjecturer pour $k\in\mathbb{N}^*$:

$M^{2k}=\begin{pmatrix}3^k & 0\\ 0 & 3^k\end{pmatrix}$

$M^{2k+1}=\begin{pmatrix}3^k & 3^k\\ 2.3^k & -3^k\end{pmatrix}=3^k.\begin{pmatrix}1 & 1\\ 2 & -1\end{pmatrix}=3^k\times M$

2. a) On veut démontrer en utilisant un raisonnement par récurrence que, pour tout entier naturel non nul k ,

$M^{2k}=\begin{pmatrix}3^k & 0\\ 0 & 3^k\end{pmatrix}$

Initialisation :

Pour $k=1$, $M^2=\begin{pmatrix}3 & 0\\ 0 & 3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3^1 & 0\\ 0 & 3^1\end{pmatrix}$

Hérédité :

On suppose qu'il existe un entier naturel non nul k , $M^{2k}=\begin{pmatrix}3^k & 0\\ 0 & 3^k\end{pmatrix}$ et on doit démontrer que

$M^{2(k+1)}=\begin{pmatrix}3^{k+1} & 0\\ 0 & 3^{k+1}\end{pmatrix}$

$M^{2(k+1)}=M^{2k+2}=M^{2k}\times M^2$

$M^{2(k+1)}=\begin{pmatrix}3^k & 0\\ 0 & 3^k\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}3 & 0\\ 0 & 3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3^{k+1} & 0\\ 0 & 3^{k+1}\end{pmatrix}$

Conclusion :

D'après le principe de récurrence, pour tout entier naturel non nul k , $M^{2k}=\begin{pmatrix}3^k & 0\\ 0 & 3^k\end{pmatrix}$

b) On veut démontrer en utilisant un raisonnement par récurrence que, pour tout entier naturel k ,

$M^{2k+1}=\begin{pmatrix}3^k & 3^k\\ 2.3^k & -3^k\end{pmatrix}$

Initialisation :

Pour $k=0$, $M^1=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 2 & -1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3^0 & 3^0\\ 2.3^0 & -3^0\end{pmatrix}$

Hérédité :

On suppose qu'il existe un entier naturel k, $M^{2k+1}=\begin{pmatrix} 3^k & 3^k \\ 2.3^k & -3^k \end{pmatrix}$ et on doit démontrer que $M^{2(k+1)+1}=\begin{pmatrix} 3^{k+1} & 3^{k+1} \\ 2.3^{k+1} & -3^{k+1} \end{pmatrix}$

$$M^{2(k+1)+1}=M^{2k+3}=M^{2k+1}\times M^2$$
$$M^{2(k+1)}=\begin{pmatrix} 3^k & 3^k \\ 2.3^k & -3^k \end{pmatrix}\times\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 3^{k+1} & 3^{k+1} \\ 2.3^{k+1} & -3^{k+1} \end{pmatrix}$$

Conclusion :

D'après le principe de récurrence, pour tout entier naturel k , $M^{2k+1}=\begin{pmatrix} 3^k & 3^k \\ 2.3^k & -3^k \end{pmatrix}$

EXERCICE 5

1.

$D=\begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$ $\quad D^2=\begin{pmatrix} 16 & 0 \\ 0 & 25 \end{pmatrix}$ $\quad D^3=\begin{pmatrix} 64 & 0 \\ 0 & 125 \end{pmatrix}$

On conjecture que pour tout entier naturel non nul k :

$$\boxed{D^k=\begin{pmatrix} 4^k & 0 \\ 0 & 5^k \end{pmatrix}}$$

On vérifie facilement ce résultat en effectuant un raisonnement par récurrence.

$$T=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$
$$T^2=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Donc, pour tout entier naturel k supérieur ou égal à 2 : $\boxed{T^k=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}}$

2. $(\mathrm{D}+\mathrm{T})\times(\mathrm{D}+\mathrm{T})=\mathrm{D}\times\mathrm{D}+\mathrm{T}\times\mathrm{D}+\mathrm{D}\times\mathrm{T}+\mathrm{T}\times\mathrm{T}$

Attention, la multiplication des matrices n'étant pas commutative, on n'a pas nécessairement $\mathrm{T}\times\mathrm{D}=\mathrm{D}\times\mathrm{T}$

$$T\times D=E=\begin{pmatrix} 0 & 5 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$
$$D\times T=F=\begin{pmatrix} 0 & 4 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$
$$D^2=\begin{pmatrix} 4^2 & 0 \\ 0 & 5^2 \end{pmatrix}$$
$$T^2=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$\mathrm{A}=\mathrm{D}+\mathrm{T}$ donc $\mathrm{A}^2=(\mathrm{D}+\mathrm{T})\times(\mathrm{D}+\mathrm{T})=\mathrm{D}^2+\mathrm{E}+\mathrm{E}+\mathrm{T}^2$

Donc, $\boxed{A^2=\begin{pmatrix} 4^2 & 9 \\ 0 & 5^2 \end{pmatrix}}$

3. On veut démontrer en utilisant un raisonnement par récurrence que pour tout entier naturel non nul k, il existe a_k tel que $A^k=\begin{pmatrix}4^k & a_k\\0 & 5^k\end{pmatrix}$ (et on veut déterminer une relation liant a_{k+1} et a_k.

Initialisation :

$A^1=\begin{pmatrix}4 & 1\\0 & 5\end{pmatrix}$ donc $a_1=1$

La propriété est vérifiée pour $k=1$.

Hérédité :

On suppose qu'il existe un nombre réel a_k pour k entier naturel non nul tel que $A^k=\begin{pmatrix}4^k & a_k\\0 & 5^k\end{pmatrix}$ et on doit montrer qu'il existe un nombre réel a_{k+1} tel que $A^{k+1}=\begin{pmatrix}4^{k+1} & a_{k+1}\\0 & 5^{k+1}\end{pmatrix}$.

$\mathrm{A}^{k+1}=\mathrm{A}^k\times\mathrm{A}$

$\mathrm{A}^{k+1}=\begin{pmatrix}4^k & a_k\\0 & 5^k\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}4 & 1\\0 & 5\end{pmatrix}$

$\mathrm{A}^{k+1}=\begin{pmatrix}4^{k+1} & 4^k+5\mathrm{a}_k\\0 & 5^{k+1}\end{pmatrix}$

C'est à dire, il existe $a_{k+1}=4^k+5a_k$ tel que $A^{k+1}=\begin{pmatrix}4^{k+1} & a_{k+1}\\0 & 5^{k+1}\end{pmatrix}$

Conclusion :

D'après le principe de récurrence, pour tout entier naturel k non nul, la propriété est vérifiée.

4. Pour tout entier naturel non nul k, on pose $b_k=4^k+a_k$

On a :

$b_{k+1}=4^{k+1}+a_{k+1}=4^{k+1}+4^k+5a_k$

$b_{k+1}=4^k(4+1)+5a_k$

$b_{k+1}=5(4^k+a_k)$

$\boxed{b_{k+1}=5b_k}$

$b_1=4^1+a_1=4+1=5$

Donc, (b_k) est **la suite géométrique** de premier terme $b_1=5$ et de **raison** 5.

Donc, pour tout entier naturel non nul k, $\boxed{b^k=5^k}$

Et, $b_k=4^k+a_k$

$5^k=4^k+a_k$

$\boxed{a_k=5^k-4^k}$

EXERCICE 6

A:1 ; B:2 ; C:3 ; D:4 ; E:5 ; F:6 ; G:7 ; H:8

$\mathrm{M}=(m_{ij})$ est la matrice associée au graphe $\mathcal{G}$.

$m_{ij}=1$ s'il existe une arête reliant i à j sinon $m_{ij}=0$.

Exemples :

$m_{11}=0$ $m_{12}=1$ $m_{13}=1$ $m_{14}=1$ $m_{15}=1$ $m_{16}=0$ $m_{17}=1$ $m_{18}=0$

On obtient :

$$M=\begin{pmatrix}0&1&1&1&1&0&1&0\\1&0&1&0&0&0&0&0\\1&1&0&0&1&0&1&0\\1&0&0&0&1&0&0&1\\1&0&1&1&0&1&1&0\\0&0&0&0&1&0&0&1\\1&0&1&0&1&0&0&1\\0&0&0&1&0&1&1&0\end{pmatrix}$$

2. En utilisant une calculatrice, on obtient :

$$M^3=\begin{pmatrix}10&8&11&10&12&5&13&4\\8&2&7&3&5&2&4&3\\11&7&8&6&12&3&10&5\\10&3&6&2&11&1&4&8\\12&5&12&11&8&8&13&3\\5&2&3&1&8&0&2&6\\13&4&10&4&13&2&6&9\\4&3&5&8&3&6&9&0\end{pmatrix}$$

$M^3=(m'_{ij})$

avec m'_{ij} est le nombre de chemins de longueur 3 reliant i à j .

E:5

m'_{5j} est le nombre de chemins de longueur 3 reliant 5 à j .

Le nombre N de chemins de longueur 3 reliant 5 aux 8 autres nombres est :

$N=m'_{51}+m'_{52}+m'_{53}+m'_{54}+m'_{55}+m'_{56}+m'_{57}+m'_{58}$

On obtient en regardant M^3

$N=12+5+12+11+8+8+13+3=72$

EXERCICE 7

1.

$$A=\begin{pmatrix}-2&1&5\\3&4&3\\1&-1&1\end{pmatrix}\quad B=\begin{pmatrix}-3&1&2\\2&-1&2\\-1&2&-1\end{pmatrix}\quad C=\begin{pmatrix}1&4&-1\\2&1&2\\-3&-1&1\end{pmatrix}$$

$E=A\times B \qquad E=\begin{pmatrix}3&7&-7\\-3&3&12\\-6&4&-1\end{pmatrix}$

$F=E\times C \qquad F=\begin{pmatrix}38&26&4\\-33&-21&21\\5&-19&13\end{pmatrix}$

$G=B\times C \qquad G=\begin{pmatrix}-7&-13&7\\-6&5&-2\\6&-1&4\end{pmatrix}$

$H=A\times G \qquad H=\begin{pmatrix}38&26&4\\-33&-21&21\\5&-19&13\end{pmatrix}$

$F=H \quad \Leftrightarrow \quad (A\times B)\times C=A\times(B\times C)$

2.

$$A=\begin{pmatrix}-2&1&5\\3&4&2\\1&-1&1\end{pmatrix}\quad B=\begin{pmatrix}-3&1&2\\2&-1&2\\-1&2&-1\end{pmatrix}\quad C=\begin{pmatrix}1&4&-1\\2&1&2\\-3&-1&1\end{pmatrix}$$

L=A+B $\quad L=\begin{pmatrix}-5&2&7\\5&3&4\\0&1&0\end{pmatrix}$

M=LxC $\quad M=\begin{pmatrix}-22&-25&16\\-1&19&5\\2&1&2\end{pmatrix}$

N=AxC $\quad N=\begin{pmatrix}-15&-12&9\\5&14&7\\-4&2&-2\end{pmatrix}$

P=BxC $\quad \boxed{P=\begin{pmatrix}-7&-13&7\\-6&5&-2\\6&-1&4\end{pmatrix}}$

Q=N+P $\quad Q=\begin{pmatrix}-22&-25&16\\-1&19&5\\2&1&2\end{pmatrix}$

M=Q $\quad$ (A+B)xC=AxC+BxC

3.

$$A=\begin{pmatrix}-2&1&5\\3&4&2\\1&-1&1\end{pmatrix}\quad B=\begin{pmatrix}-3&1&2\\2&-1&2\\-1&2&-1\end{pmatrix}$$

R=AxB $\quad R=\begin{pmatrix}3&7&-7\\-3&3&12\\-6&4&-1\end{pmatrix}$

S=BxA $\quad S=\begin{pmatrix}11&-1&-11\\-5&-4&10\\7&8&-2\end{pmatrix}$

R≠S $\quad$ donc $\quad$ AxB≠BxA

EXERCICE 8

1. $D=A^{-1}=\begin{pmatrix}-0,8&-1\\0,6&1\end{pmatrix}$

2. $E=A\times B=\begin{pmatrix}-20&-45\\13&32\end{pmatrix}$

$F=A\times C=\begin{pmatrix}-35&-30\\23&23\end{pmatrix}$

3. $A\times M=C$ si et seulement si $D\times(A\times M)=D\times C$ car A est inversible et D est son inverse.
$D\times(A\times M)=D\times C$
$(D\times A)\times M=D\times C$

$I\times M=D\times C$
$M=D\times C$
$M=D\times C=\begin{pmatrix}-6 & -4{,}8\\ 5 & 4{,}6\end{pmatrix}$

EXERCICE 9

$$D=B\times A=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$$
$$E=C\times A=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$$

$B\times A=C\times A$ et $B\neq C$
Donc, A **n'est pas une matrice simplifiable pour la multiplication**.

EXERCICE 10

$$A\times B=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$$

$$B\times A=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$$

On peut en conclure que **A est inversible** et que **B est son inverse**.

EXERCICE 11

1.
$D=\begin{pmatrix}3&0\\0&5\end{pmatrix}$ $\quad D^2=\begin{pmatrix}9&0\\0&25\end{pmatrix}$ $\quad D^3=\begin{pmatrix}37&0\\0&125\end{pmatrix}$

On conjecture, que pour tout entier naturel non nul k : $D^k=\begin{pmatrix}3^k&0\\0&5^k\end{pmatrix}$.

On peut vérifier facilement ce résultat **par un raisonnement par récurrence**.

$T=\begin{pmatrix}0&2\\0&0\end{pmatrix}$ $\quad T^2=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}$

Donc, pour tout entier naturel k, $T^k=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}$

2.
$A=\begin{pmatrix}3&2\\0&5\end{pmatrix}$

En utilisant la calculatrice, on trouve : $A^2=\begin{pmatrix}9&16\\0&25\end{pmatrix}$

3. On veut démontrer en utilisant un raisonnement par récurrence que pour tout entier naturel non nul k, il existe un nombre réel a_k tel que $A^k=\begin{pmatrix}3^k & a_k\\ 0 & 5^k\end{pmatrix}$ (et on veut déterminer une relation liant a_{k+1} et a_k).

Initialisation

$A^1=\begin{pmatrix}3 & 2\\ 0 & 5\end{pmatrix}$ donc $a_1=2$

La **propriété est vérifiée au rang 1**.

Hérédité :

On suppose qu'il existe un rang k, tel que pour tout entier inférieur ou égal à k, $A^k=\begin{pmatrix}3^k & a_k\\ 0 & 5_k\end{pmatrix}$.

$\mathrm{A}^{k+1}=\mathrm{A}^k\times\mathrm{A}$

$A^k=\begin{pmatrix}3^k & a_k\\ 0 & 5^k\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3 & 2\\ 0 & 5\end{pmatrix}$

$A^{k+1}=\begin{pmatrix}3^{k+1} & 2\times3^k+5a_k\\ 0 & 5^{k+1}\end{pmatrix}$

Il existe $a_{k+1}=2\times3^k+5a_k$ tel que $A^{k+1}=\begin{pmatrix}3^{k+1} & a_{k+1}\\ 0 & 5_{k+1}\end{pmatrix}$

Conclusion :

D'après, **le principe de récurrence**, pour tout entier naturel non nul k, **la propriété est vérifiée**.

4. Pour tout entier non nul k $b_k=3^k+a_k$:

$b_{k+1}=3^{k+1}+a_{k+1}$

$b_{k+1}=3^{k+1}+2\times3^k+5a_k$

$b_{k+1}=(3+2)3^k+5a_k$

$b_{k+1}=5(3^k+a_k)$

$b_{k+1}=5b_k$

$\mathrm{b}_1=3+\mathrm{a}_1=5$

Donc, (b_k) est **la suite géométrique** de premier terme $\boxed{b_1=5}$ et de raison $\boxed{q=5}$.

Donc, pour tout entier non nul k, $b_k=5^k$

Or, $b_k=3^k+a_k$

Donc, $\boxed{a_k=5^k-3^k}$.

EXERCICE 12

Correction :

A:1 B:2 C:3 D:4 E:5 F:6 G:7

$\mathrm{M}=(m_{ij})$ est **la matrice associée au graphe**.

$m_{ij}=1$ S'il existe une arête reliant i à j.

On obtient :

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

2. En utilisant le logiciel géogébra, on obtient :

$$M^8 = \begin{pmatrix} 6945 & 9924 & 8764 & 8764 & 9358 & 3766 & 5786 \\ 9924 & 14345 & 12636 & 12636 & 13390 & 5486 & 8310 \\ 8764 & 12636 & 11178 & 11177 & 11807 & 4829 & 7369 \\ 8764 & 12636 & 11177 & 11178 & 11807 & 4829 & 7369 \\ 9358 & 13390 & 11807 & 11807 & 12634 & 5095 & 7807 \\ 3766 & 5486 & 4829 & 4829 & 5095 & 2116 & 3181 \\ 5786 & 8310 & 7369 & 7369 & 7807 & 3181 & 4890 \end{pmatrix}$$

$M^8 = (m'_{ij})$

m'_{ij} est le nombre de chemins de longueur 8 reliant i à j.

On nous demande m_{24} (ou m_{42})

$\boxed{m_{24} = 12636}$