Chaînes eulériennes-cycles eulériens

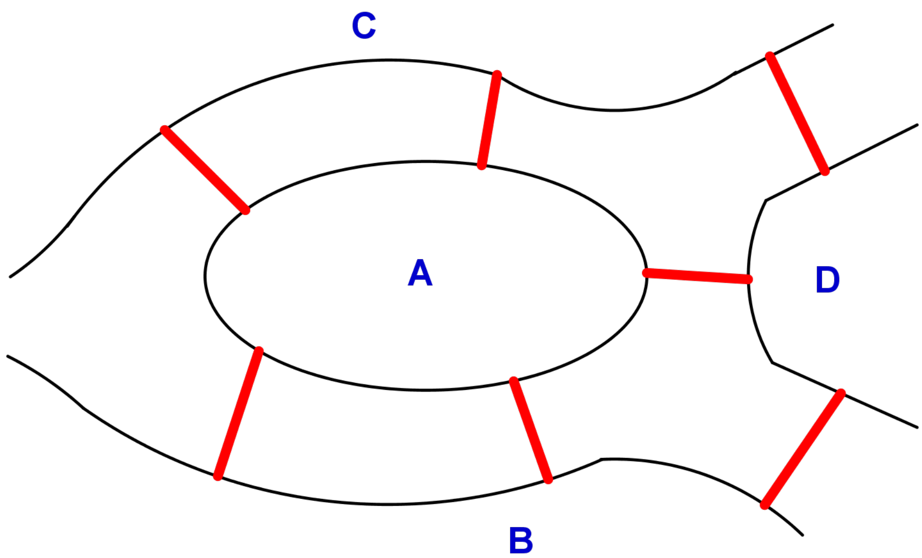
Copyright ® meilleurenmaths.com. Tous droits réservés

1. Historique

L'origine de la théorie des graphes est la question posée au mathématicien **Léonhard Euler** consernant les 7 ponts de la ville de Kônigsberg (nom du $18^{\text{ème}}$ siècle), la rivière Prégel traverse la ville.

Le schéma suivant représente l'île notée A et les trois autres parties de la ville déterminées par la rivière notées : B ; C et D.

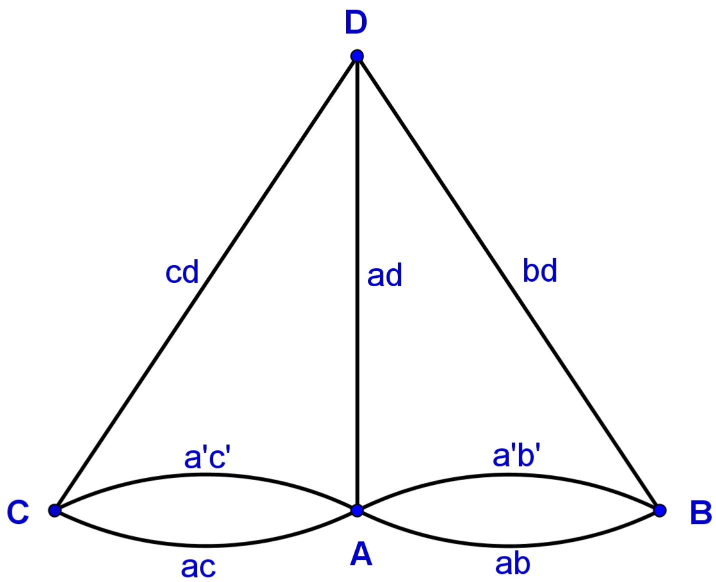
Il existe 7 ponts en rouge sur le schéma. Deux entre A et B puis deux entre A et C puis un entre C et D puis un entre B et D puis un entre A et D.



La question posée est :

« Comment un voyageur peut-il traverser ces sept ponts sans jamais passer deux fois sur le même pont »

On représente la situation par le graphe suivant :



Les sept arêtes du graphe représentent les ponts.

En essayant, on ne trouve pas de solution.

Léonhard Euler démontra (en généralisant) que le problème n'admettait pas de solution.

Copyright ® meilleurenmaths.com. Tous droits réservés

2. Définitions

G est un graphe connexe.

. Une chaîne est dite **eulérienne** lorsqu'elle contient chaque arête du graphe une et une seule fois.

. Si cette chaîne eulérienne est fermée, on dit que l'on a un **cycle eulérien.**

3. Théorèmes d'Euler (admis)

. **Un graphe connexe admet une chaîne eulérienne si et seulement si le nombre de sommets de degré impair est 0 ou 2.**

. **Un graphe connexe admet un cycle eulérien si et seulement si le nombre de sommets de degré impair est 0 (tous les sommets ont un degré pair).**

4. Algorithme d'Euler

4.1. Cas d'un cycle eulérien

Le graphe est connexe et tous les sommets ont un degré pair.

1ère Étape

On choisit arbitrairement un sommet du graphe et on crée un cycle contenant des arêtes du graphe **au plus** une fois.

Si toutes les arêtes du graphe sont contenues une et une seule fois dans le cycle alors on a terminé car on aun cycle eulérien.

Sinon on passe à la deuxième étape.

2ème Etape

On choisit un sommet du cycle précédent pour lequel il est possible de créer une chaîne fermée (cycle) d'origine et d'extrémité ce sommet et contenant des arêtes du graphe **au plus** une fois et n'étant pas contenues dans le cycle précédent.

En regroupant les deux cycles, on obtient un nouveau cycle (de longueur la somme des deux longueurs des cycles précédents).

Si toutes les arêtes sont contenues une et une seule fois dans le nouveau cycle alors le nouveau cycle est eulérien.

Sinon on recommence la deuxième étape avec le nouveau cycle.

4.2. Cas d'une chaîne eulérienne

Le graphe est connexe et deux sommets (et deux seulement) ont un degré impair.

1ère Etape

On choisit une chaîne, contenant des arêtes du graphe **au plus** une fois, reliant les deux sommets de degré impair.

Si toutes les arêtes du graphe sont contenues dans la chaîne alors la chaîne est eulérienne.

Sinon on passe à la deuxième étape.

2ème Etape

On choisit un sommet de la chaîne précédente pour lequel il est possible de créer une chaîne fermée (cycle) d'origine et d'extrémité ce sommet choisi et contenant des arêtes du graphe **au plus** une fois et n'étant pas

Copyright ® meilleurenmaths.com. Tous droits réservés

contenues dans la chaîne précédente.

En regrouant les deux chaînes, on obtient une nouvelle chaîne (de longueur la somme des deux longueurs des chaînes précédentes).

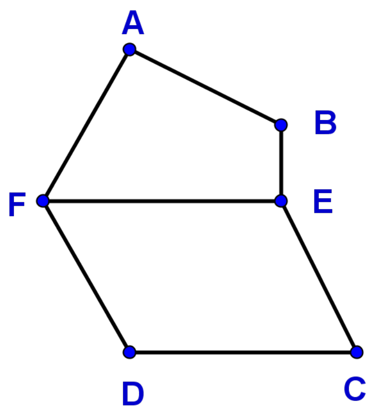
Si toutes les arêtes du graphe sont contenues une et une seule fois dans la nouvelle chaîne alors la chaîne est euérienne.

Sinon on recommence la deuxième étape avec la nouvelle chaîne.

5. Exemples

5.1 Exemple 1

On considère le graphe suivant :



L'ordre du graphe est 6.

Les quatre sommets A B, C et D sont de degré 2 et les deux sommets E et F sont de degré 3, donc le théorème d'Euler permet d'affirmer qu'il existe au moins une chaîne eulérienne reliant E et F (ou F et E).

$1^{ére}$ <u>Etape</u>

Il est raisonnable de considérer l'une des trois chaînes suivantes :

. EF

. EBAF

. ECDF

$2^{ème}$ <u>Etape</u>

. On part de EF

Si on choisit le sommet E la chaîne fermée sera EBAFDCE (ou ECDFABE) et la chaîne eulérienne trouvée est **EBAFDCEF** (ou **ECDFABEF**).

Si on choisit le sommet F la chaîne fermée sera FABECDF (ou FDCEBAF) et la chaîne eulérienne trouvée est **FABECDFE** (ou **FDCEBAFE**).

. On part de EBAF

Les seuls sommets que l'on peut choisir sont E et F et on peut obtenir pour chaîne eulérienne **EFDCEBAF** ou **EBFECDF.**

. On part de ECDF

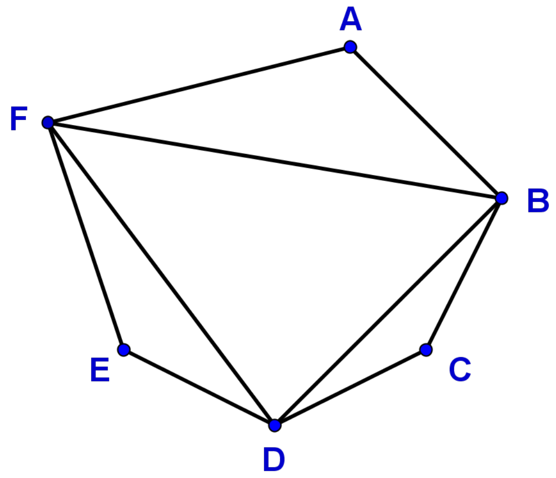
On obtient **EBAFECDF** ou **ECDFABE.**

Il n'ya pas unicité pour les chaînes eulériennes.

Copyright ® meilleurenmaths.com. Tous droits réservés

5.2 Exemple 2

On considère le graphe suivant :



Les sommets A ; C et E ont pour degré 2.

Les sommets B;D et f ont pour degré 4.

Il existe donc un cycle eulérien.

On donne simplement un exemple.

On choisit le cycle initial : ABFA. En B on considère le cycle BCDB, on obtient ABCDBFA.

En F on considère le cycle FDEF on obtient le cycle eulérien **ABCDBFDEFA.**

Copyright ® meilleurenmaths.com. Tous droits réservés