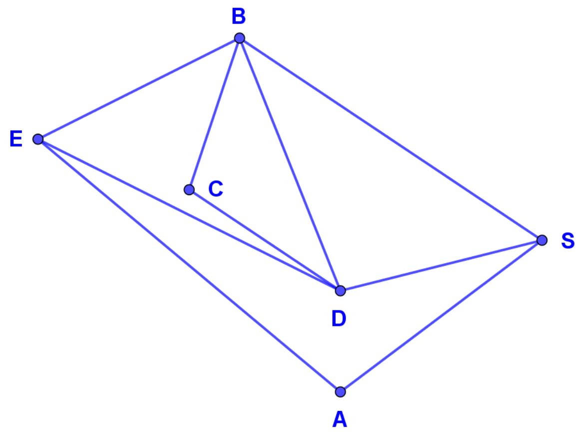
Fiche exercices

EXERCICE 1

Naïma fait partie d'une école de musique. En vue du spectacle de fin d'année, elle souhaite déposer à vélo des affiches publicitaires sur les panneaux de sa ville. Les pistes cyclables reliant ces panneaux sont représentées sur le graphe $\mathcal{G}$ ci-dessous.



Le sommet E désigne son école de musique, le sommet S la salle de spectacle et les sommets A, B, C et D les panneaux d'affichage.

1. Déterminer, en justifiant la réponse, si le graphe $\mathcal{G}$ est :

1.a. complet ;

1.b. connexe.

2. Naïma pourra-t-elle déposer ses affiches sur tous les panneaux en allant de son école de musique à la salle de spectacle et en empruntant une et une seule fois chaque piste cyclable ?
Justifier la réponse. Si un tel trajet existe, en citer un.

3. Donner la matrice d'adjacence M liée à ce graphe dans laquelle les sommets seront classés dans l'ordre suivant : E, A, B, C, D, S.

4. On donne la matrice incomplète M^2 : $M^2 = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 & \dots & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 2 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 4 & 1 & 3 & 1 \\ \dots & 0 & 1 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 1 & 4 & 1 \\ 3 & 0 & 1 & 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$

4.a. Déterminer les coefficients manquants de la matrice M^2, en détaillant les calculs.

4.b. Combien existe-t-il de chemin permettant de se rendre de l'école de musique à la salle de spectacle en empruntant exactement deux pistes cyclables.

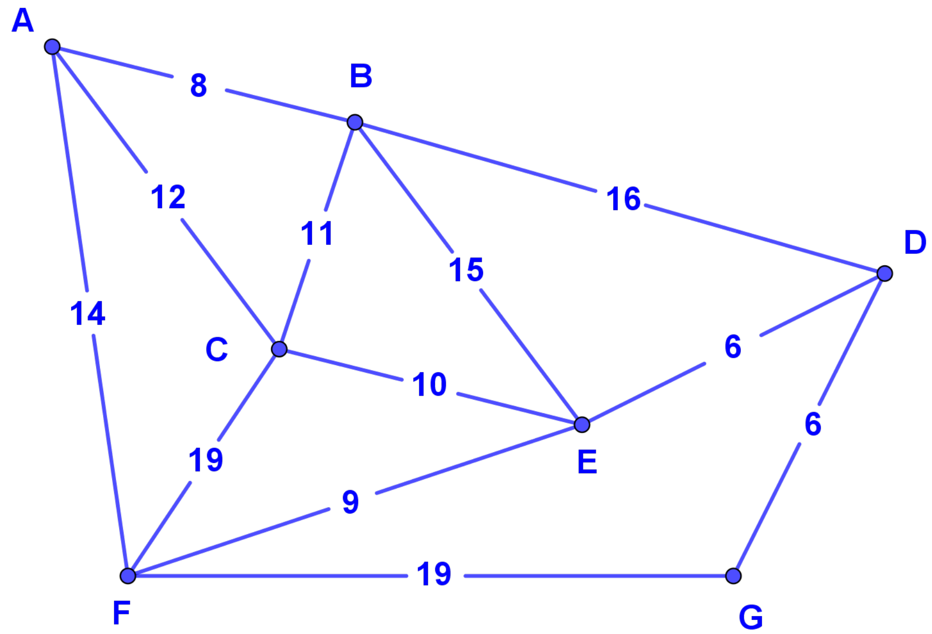
Bac TES 2018 novembre Nouvelle Calédonie exercice 2 spécialité

EXERCICE 2

Les parties A et B sont indépendantes.

Partie A

Un investisseur immobilier doit visiter plusieurs bien à vendre dans une ville.
Le graphe ci-dessous représente le plan de la ville. Les biens à visiter sont identifiés par les lettres A, B, C, D, E, F et G. Les poids des arêtes sont les durées de parcours, en minute, entre deux biens.



1. Afin de découvrir la ville, l'investisseur souhaite emprunter, une fois et une seule, chacune des rues reliant les biens. Quelles caractéristiques du graphe permettent d'affirmer un tel trajet ?
2. Donner un exemple d'un tel trajet et préciser la durée en minute.

Partie B

L'investisseur commande une étude sur la population de sa ville qui lui révèle qu'en 2018, 80 % des locataires occupent un studio et 20 % des locataires occupent un T_2 (appartement de deux pièces), le nombre total de locataires ne varie pas mais chaque année :
. la moitié des locataires en studio le conserve tandis que l'autre moitié change pour un T_2 ;
. un quart des locataires en T_2 change pour un studio tandis que les autres conservent leur T_2 .
On considère les évènements suivants :
. S : « le locataire occupe un studio » ;
. T : « le locataire occupe un T_2 ».

1. Traduire les données de l'énoncé par un graphe probabiliste de sommets S et T.

2. Pour tout entier naturel n, on note s_n la proportion de locataires en studio et t_n la proportion de locataires en T_2 l'année 2018+n.

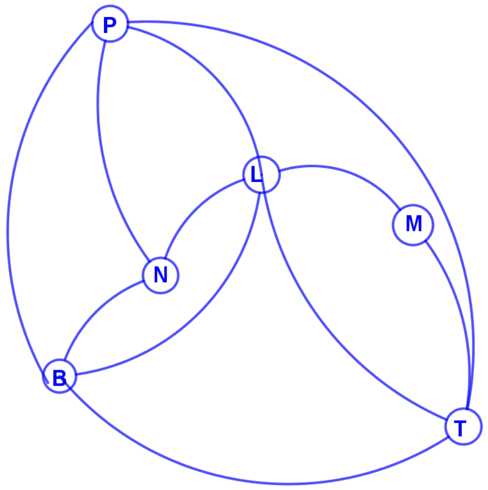
2.a. Donner la matrice de transition associée à ce graphe.
2.b. Donner l'état initial du graphe.
2.c. Quel sera le pourcentage, arrondi à 0,1 %, de locataires en studio en 2023 ?

Bac TES Septembre 2018 Métropole exercice 3 spécialité

EXERCICE 3

Un journaliste britannique d'une revue consacrée à l'automobile doit tester les autoroutes françaises.
Pour remplir sa mission, il décide de louer une voiture et de circuler entre six grandes villes françaises : Bordeaux(B), Lyon(L), Marseille(M), Nantes(N), Paris(P) et Toulouse(T).

Le réseau autoroutier reliant ces six villes est modélisé par le graphe ci-dessous sur lequel les sommets représentent les villes et les arêtes les liaison autoroutières entre ces villes.



1.a. Quel est l'ordre du graphe ?

1.b. Le graphe est-il complet ? Justifier la réponse.

2.a. On admet que le graphe est connexe.
Le journaliste envisage chacune des liaisons modélisées sur le graphe une fois et une seule.
Est-ce possible ? Justifier la réponse.

2.b. Le journaliste va-t-il pouvoir louer sa voiture dans un aéroport parisien, parcourir chacune des liaisons une est une seule fois puis rendre la voiture dans le même aéroport ? Justifier la réponse.

3. On nomme G la matrice d'adjacence du graphe (les villes étant rangées dans l'ordre alphabétiques).
On donne :

$$G = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & 1 & 1 & 1 \\ \dots & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & \dots & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad G^3 = \begin{pmatrix} 10 & 13 & 5 & 10 & 11 & 12 \\ 13 & 12 & 8 & 11 & 13 & 12 \\ 5 & 8 & 2 & 5 & 5 & 7 \\ 10 & 11 & 5 & 6 & 10 & 7 \\ 11 & 13 & 5 & 10 & 10 & 12 \\ 12 & 12 & 7 & 7 & 12 & 8 \end{pmatrix}$$

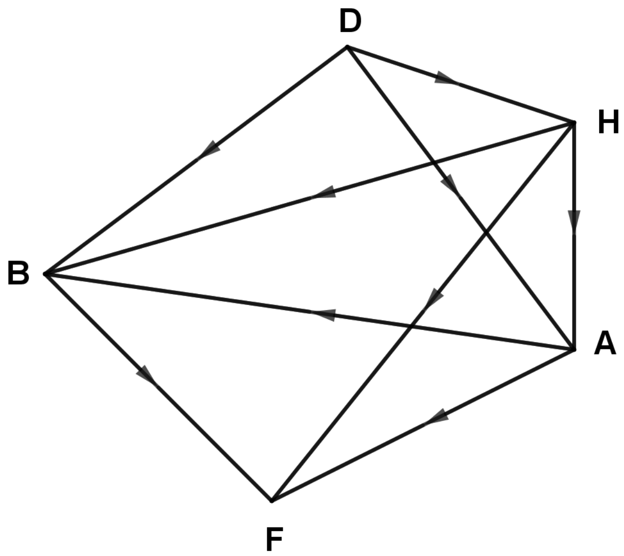
3.a. Recopier et compléter la matrice d'adjacence.

3.b. Alors qu'il se trouve à Paris, le rédacteur en chef demande au journaliste d'être à Marseille exactement trois jours plus tard pour assister à une course automobile. Le journaliste décide chaque jours de s'arrêter dans une ville différente.

Bac TES juin 2018 Polynésie exercice 3 spécialité

EXERCICE 4

Un parcours sportif est composé d'un banc pour abdominaux, de haies et d'anneaux.
Le graphe orienté ci-dessous indique les différents parcours conseillés partant de D et terminant à E.



Les sommets sont : D (départ), B (banc pour abdominaux), H (haies), A (anneaux) et F (fin du parcours).
Les arêtes représentent les différents sentiers reliant ies sommets.

1. Quel est l'ordre du graphe ?

2. On note M la matrice d'adjacence de ce graphe où les sommets sont rangés dans l'ordre alphabétique.

2.a. Déterminer M.

2.b. On donne $M^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

Assia souhaite aller de D à F en faisant un parcours de 3 arêtes.
Est-ce possible?
Si oui, combien de parcours différents pourra-t-elle emprunter ?
Préciser ces trajets.

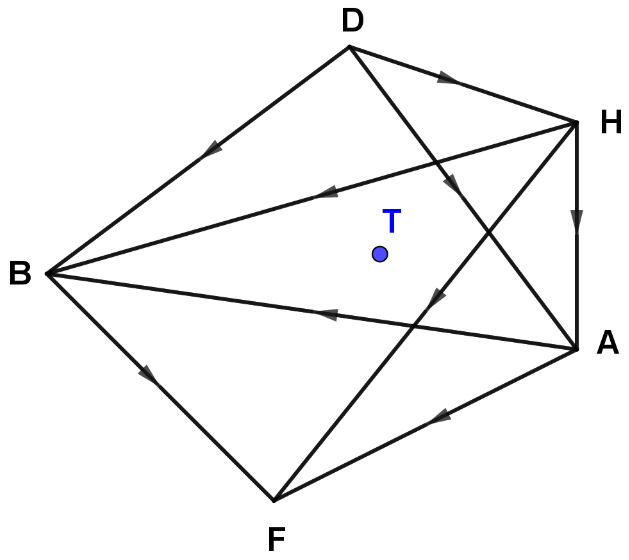
Partie B

Le responsable souhaite ajouter une barre de traction.
De nouveaux sentiers sont construits et de nouveaux parcours sont possibles.
La matrice d'adjacence N associée au graphe représentant les nouveaux parcours, dans lequel les sommets sont classés en ordre alphabétique, est :

$$N=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Compléter **l'annexe** à rendre avec la copie, en ajoutant les arêtes nécessaires au graphe orienté correspondant à la matrice N.

ANNEXE à rendre avec la copie



Bac juin 2018 Métropole exercice 3 spécialité

EXERCICE 5

Les parties A et B sont indépendantes.
Franck joue en ligne sur internet.
Partie A

Après plusieurs semaines, des statistiques données par le logiciel lui permettent de dire que :

. quand il gagne une partie, la probabilité qu'il gagne la suivante est égale à 0,65 ;
. quand il perd une partie, la probabilité qu'il gagne la suivante est égale à 0,42.

On note G l'état : « Franck gagne la partie » et P l'état : « Franck perdla partie ».
Sur une période donnée, on note, pour tout entier naturel n non nul :

. g_n la probabilité que Franck gagne la $n^{\text{ième}}$ partie ;
. p_n la probabilité que Franck perde la $n^{\text{ième}}$ partie.
Dans cette période Franck a gagné la première partie.

1. Représenter la situation par un graphe probabiliste de sommets notés G et P.

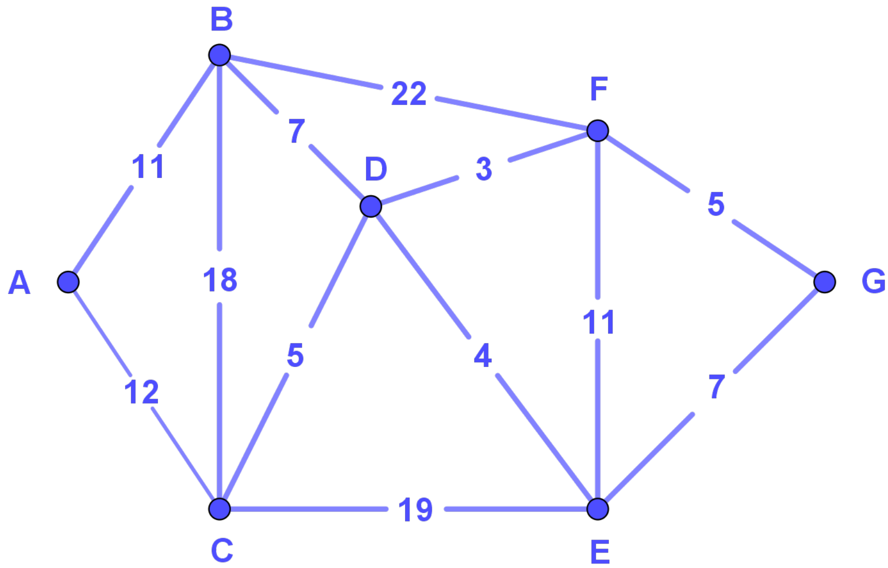
2.a. Écrire la matrice de transition M dans l'ordre G-P.

2.b. Calculer la probabilité que Franck gagne la troisième partie.

3. Déterminer l'état stable du système et interpréter le résultat dans le contexte de l'exercice.

Partie B

Dans ce jeu vidéo, Franck circule dans des catacombes infestées de monstres qu'il doit combattre.
On a représenté ci-dessous le graphe modélisant ces catacombes.
Les sommets représentent les salles et les arêtes représentent les couloirs.
Les étiquettes du graphe correspondent au nombre de monstres présents dans chaque couloir.



1.a. Justifier qu'il est possible, au départ d'une salle quelconque, d'y revenir après avoir parcouru tous les couloirs une et une seule fois.
1.b. Donner un tel chemin.
2. Franck débute le jeu dans la salle A et doit atteindre l'adversaire final en salle G.
Existe-t-il un chemin permettant de se rendre de la salle A à la salle G en passant une et une seule fois par tous les couloirs ?

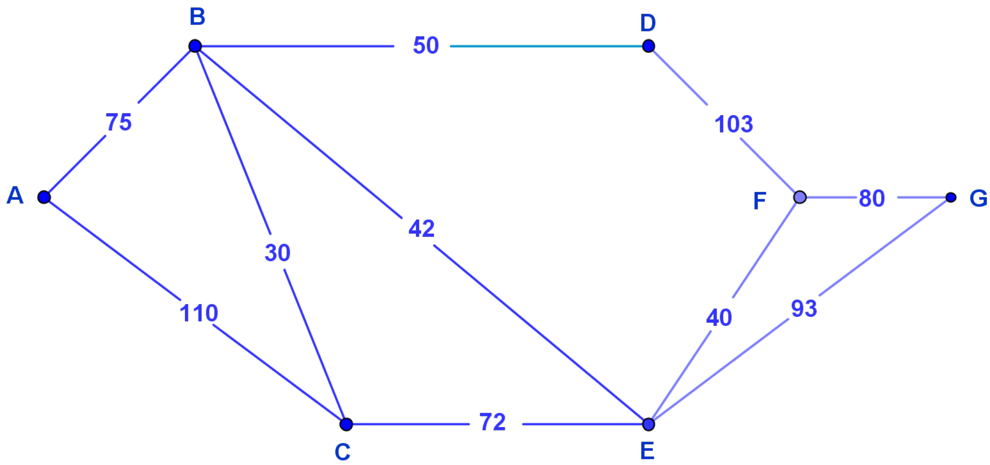
Bac TES juin 2018 Antilles- Guyane exercice 2 spécialité

EXERCICE 6

Les parties A et B sont indépendantes.

Partie A

Le graphe ci-dessous représente le plan d'un centre de vacances. Les arêtes représentent les allées et les sommets, les carrefours. On a indiqué sur chaque arête la longueur en mètre des allées entre deux carrefours.



1. Le service d'entretien doit nettoyer toutes les allées. En partant cu carrefour C , peut-on nettoyer toutes les allées en passant une et une seule fois par chacune d'elles ? Justifier la réponse.

2. Existe-il un parcours permettant de nettoyer toutes les allées en passant une et une seule fois par chacune d'elles et de revenir au point de départ ? Justifier la réponse.

Partie B

Dans le centre de vacances, les vacanciers peuvent, chaque jour, déjeuner au restaurant du centre ou à l'extérieur. On constate chaque jour :

- 5 % des vacanciers ayant déjeuné au centre de vacances ne se réinscrivent pas pour le lendemain ;
- 20 % des vacanciers ayant déjeuné à l'extérieur s'inscrivent pour déjeuner au centre de vacances le lendemain.

On note D l'état « Déjeuner au centre de vacances » et E l'événement « Déjeuner à l'extérieur ».

1. Construire un graphe modélisant cette situation.

2. Écrire la matrice de transition de ce graphe, les sommets sont rangés selon l'ordre alphabétique.

3. Le premier jour, le quart des vacanciers a déjeuné au centre des vacances. Quel pourcentage de vacanciers déjeunera au centre de vacances le deuxième jour ? Le cinquième jour ?

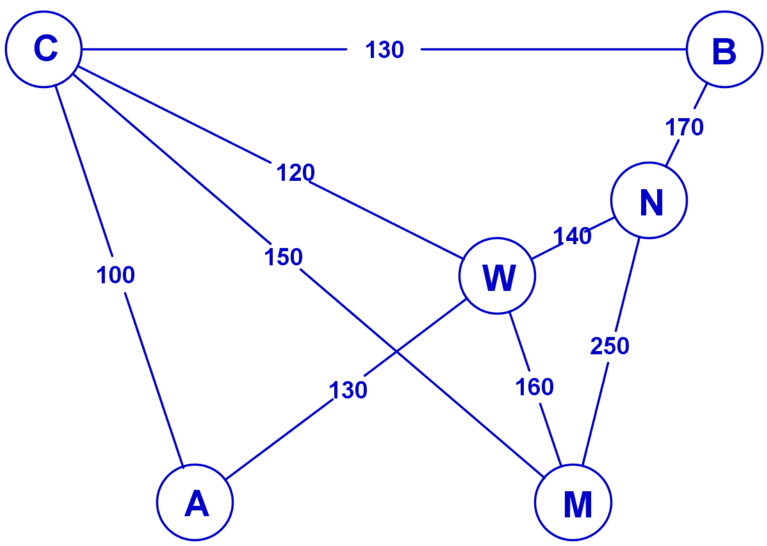
4. L'état $\begin{pmatrix} 0,5 & 0,5 \end{pmatrix}$ est-il stable ?

5. Peut-on affirmer qu'à terme, si les comportements des vacanciers restent les mêmes, 75 % des vacanciers prendront leur déjeuner au centre ?

Bac TES juin 2017 Antilles-Guyane exercice 2 spécialité

EXERCICE 7

Alexis part en voyage dans l'Est des États-Unis. Il souhaite visiter les villes suivantes : Atlanta (A), Boston (B), Chicago (C), Miami (M), New York (N) et Washington (W).
Une compagnie aérienne propose les liaisons suivantes représentées par le graphe ci-dessous :



Les nombres présents sur chacune des branches indique le tarif, en dollars, du vol en avion.

1.a. Quelles caractéristiques du graphe permettent d'affirmer qu'il existe un trajet qui permet à Alexis d'emprunter chaque liaison aérienne une et une seule fois ?
1.b. Donner un exemple d'un tel trajet.

2.a. Donner la matrice d'adjacence P de ce graphe en classant les sommets dans l'ordre alphabétique.
2.b. Alexis souhaite aller d'Atlanta à Boston en utilisant au maximum trois liaisons aériennes.
Combien y-a-t-il de trajets possibles ? Justifier la démarche puis décrire chacun de ces trajets.

Bac TES avril 2017 Pondichéry exercice 3 spécialité

CORRECTION

EXERCICE 1

1. Le graphe $\mathcal{G}$ **n'est pas complet** car les sommets E et C ne sont pas reliés par une arête.
   Le graphe $\mathcal{G}$ **est connexe** car deux sommets du graphe sont toujours reliés par une chaîne.

2. On nous demande s'il existe une chaîne eulérienne reliant E à S.
   Théorème d'Euler
   Un graphe connexe admet une chaîne eulérienne si et seulement si le nombre de sommets de degré impair est 0 ou 2.
   Si le nombre de sommets de degré impair est deux alors ces deux sommets sont les extrémités de toute chaîne eulérienne.

   On donne les degrés des sommets du graphe $\mathcal{G}$ sous la forme d'un tableau.

Sommets	A	B	C	D	E	S
Degrés	2	4	2	4	3	3

   Il existe au moins une chaîne eulérienne reliant E à S.
   Exemple
   E-B-D-E-A-S-D-C-B-S

3. Les sommets sont numérotés de 1 à 6 dans l'ordre E, A, B, C, D, S.
   La matrice d'adjacence M liée au graphe $\mathcal{G}$ est une matrice carrée d'ordre 6 le coefficient m_{ij} $i^{\text{ième}}$ ligne $j^{\text{ième}}$ colonne est égal à 1 s'il existe une arête reliant le $i^{\text{ième}}$ sommet au $j^{\text{ième}}$ sommet sinon m_{ij} est 0.

$$M=\begin{pmatrix}0&1&1&0&1&0\\1&0&0&0&0&1\\1&0&0&1&1&1\\0&0&1&0&1&0\\1&0&1&1&0&1\\0&1&1&0&1&0\end{pmatrix}$$

4.a. Le graphe $\mathcal{G}$ est un graphe non orienté donc la matrice d'adjacence est une matrice symétrique c'est à dire que pour tous entiers naturels i et j compris entre 1 et 6 on a : $m_{ij}=m_{ji}$.
Toutes les puissances de M sont aussi des matrices symétriques.
Si on note m'_{ij} les coefficients de la matrice M^2 alors on doit déterminer les coefficients m_{14} et m_{41} .
On a $m_{14}=m_{41}$.
Pour obtenir m_{14} , on multiplie la première ligne de M par la quatrième colonne de M.

$$m_{14}=\begin{pmatrix}0&1&1&0&1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\\1\\0\end{pmatrix}=0\times0+1\times0+1\times1+0\times0+1\times1+0\times1=\mathbf{2}$$

$m_{14}=m_{14}=2$

4.b. m'_{ij} est le nombre de chemins empruntant exactement deux pistes cyclables reliant le $i^{\text{ème}}$ sommet au $j^{\text{ème}}$ sommet.
Le nombre de chemins empruntant exactement deux pistes cyclables reliant E à S (premier sommet et sixième sommet) est $m'_{16}=m'_{61}=3.$

Ces trois chemins sont :
E-B-S
E-D-S
E-A-S

EXERCICE 2

Partie A

1. Pour pouvoir emprunter, une fois et une seule, chacune des rues reliant les biens, il faut que le graphe admette une chaîne eulérienne.
Théorème d'Euler
Un graphe connexe admet une chaîne eulérienne si et seulement si le nombre de sommets de degré impair est 0 ou 2.
Si le nombre de sommets de degré impair est 2 alors toute chaîne eulérienne admet ces deux sommets pour extrémités.
On donne le degré de chaque sommet sous la forme d'un tableau.

Sommets	A	B	C	D	E	F	G
Degrés	3	4	4	3	4	4	2

Le nombre de sommets de degré impair est 2 donc le graphe admet au moins une chaîne eulérienne et **l'investisseur peut emprunter, une fois et une seule, chacune des rues reliant les biens.**

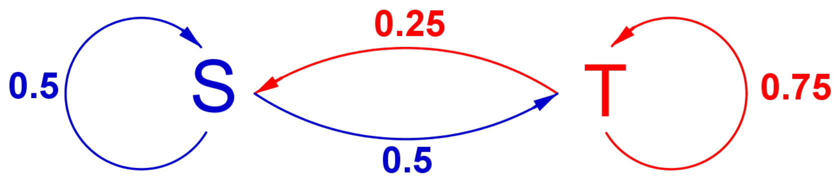
2. On donne un exemple de chaîne eulérienne d'origine A et se terminant en D.

$$A \to B \to C \to A \to F \to C \to E \to F \to G \to D \to E \to B \to D$$
$$8 + 11 + 12 + 14 + 19 + 10 + 9 + 19 + 6 + 6 + 15 + 16 = 145$$

La durée du trajet est 145 minutes.

Partie B

1. Les sommets du graphe sont : S et T.
- Chaque année, la moitié des locataires en studio le conserve et l'autre moitié change pour un T_2 .
  Le poids de l'arête SS est égal à 0,5.
  Le poids de l'arête ST est égal à 0,5.
- Chaque année, un quart des locataires en T_2 change pour un studio tandis que les autres conservent leur T_2 .
  Le poids de l'arête TS est égal à 0,25.
  Le poids de l'arête TT est égal à 0,75.
- On obtient le graphe probabiliste suivant :



2. Remarque préliminaire
Cet exercice ne nous impose pas le choix de forme de matrice (matrices lignes ou matrices colonnes).

Nous choisissons les matrices lignes car c'est la forme de matrice la plus utilisée en TES.

2.a. L'ordre ses sommets est l'ordre alphabétique S puis T.

La matrice de transition du graphe probabiliste est la matrice $M=\begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{pmatrix}$

m_{11} est le poids de l'arête SS : 0,5
m_{12} est le poids de l'arête ST : 0,5
m_{21} est le poids de l'arête TS : 0,25
m_{22} est le poids de l'arête TT : 0,75

$M=\begin{pmatrix} 0{,}5 & 0{,}5 \\ 0{,}25 & 0{,}75 \end{pmatrix}$

2.b. En 2018, 80 % des locataires occupent un studio et 20 % des locataires occupent un T_2 .
L'état initial est donc la matrice ligne $\begin{pmatrix} 0{,}8 & 0{,}2 \end{pmatrix}$.

2.c. Pour tout entier naturel n

$\begin{pmatrix} s_n & t_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s_0 & t_0 \end{pmatrix} M^n$

$2023=2018+5$

$\begin{pmatrix} s_5 & t_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}8 & 0{,}2 \end{pmatrix} M^5$

En utilisant la calculatrice et en arrondissant à 10^{-3} .

$M^5 = \begin{pmatrix} 0{,}334 & 0{,}666 \\ 0{,}333 & 0{,}667 \end{pmatrix}$

$s_5=0{,}8\times 0{,}334+0{,}2\times 0{,}333=0{,}2672+0{,}0666=0{,}3338$ =0,334 à 10^{-3} près.

Le pourcentage de locataires en studio en 2023 est 33,4 %.

EXERCICE 3

1.a. Le graphe a 6 sommets donc **l'ordre du graphe est 6.**

1.b. **Le graphe n'est pas complet,** par exemple les sommets B et M ne sont pas reliés par une arête.

2.a. On nous demande si le graphe admet une chaîne eulérienne.

Théorème d'Euler

Un graphe connexe admet une chaîne eulérienne si et seulement si le nombre de sommets de degré impair est 0 ou 2.

Un graphe connexe admet un cycle eulérien si et seulement si le degré de tous les sommets est pair.

On détermine le degré de chaque sommet et on donne le résultat sous la forme d'un tableau.

Sommets	B	L	M	N	P	T
Degrés	4	5	2	3	4	4

Le graphe admet 2 (et seulement 2) sommets de degré impair donc le graphe admet au moins une chaîne eulérienne (les extrémités d'une chaîne eulérienne sont les 2 sommets de degré impair).

Le journaliste pourra parcourir chacune des liaisons modélisées sur le graphe une fois et une seule.

Exemple (non demandé)

N – B – P – N – L – P – T – M - L – T - B – L

2.b. Le graphe n'admet pas de cycle eulérien car il existe 2 sommets de degré impair.

Donc le journaliste ne pourra pas parcourir une et une seule fois chacune des liaisons en partant de Paris et en revenant à Paris.

3.a. Pour la matrice G d'adjacence du graphe.

Il existe une arête reliant Bordeaux à Lyon donc on écrit 1 pour le coefficient première ligne et deuxième colonne et 1 pour le coefficient deuxième ligne et première colonne.

Il n'existe pas d'arête reliant Marseille à Marseille donc on écrit 0 pour le coefficient troisième ligne et

troisième colonne.
Il n'existe pas d'arête reliant Paris à Marseille donc on écrit 0 pour le coefficient troisième ligne et cinquième colonne et 0 pour le coefficient cinquième ligne et troisième colonne.

$$G = \begin{array}{c} \\ B \\ L \\ M \\ N \\ P \\ T \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} B & L & M & N & P & T \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

3.b.

$$G^3 = \begin{pmatrix} 10 & 13 & 5 & 10 & 11 & 12 \\ 13 & 12 & 8 & 11 & 13 & 12 \\ 5 & 8 & 2 & 5 & 5 & 7 \\ 10 & 11 & 5 & 6 & 10 & 7 \\ 11 & 13 & 5 & 10 & 10 & 12 \\ 12 & 12 & 7 & 7 & 12 & 8 \end{pmatrix}$$

i et j sont des entiers naturels compris entre 1 et 6.
Le coefficient de la $i^{\text{ème}}$ ligne et de la $j^{\text{ème}}$ colonne (ou le coefficient de la $j^{\text{ème}}$ ligne et $i^{\text{ème}}$ colonne) est lr nombre de chaînes de longueur 3 reliant la $i^{\text{ème}}$ ville à la $j^{\text{ème}}$ ville.
Le nombre de trajets en 3 étapes de Paris à Marseille est le coefficient de la cinquième ligne et de la troisième colonne soit : 5.
Le journaliste à la possibilité de 5 trajets en 3 étapes pour aller de Paris à Marseille.
Remarque (résultat non demandé)
Les cinq trajets sont :
P – T – L – M
P – L – T – M
P – B – L – M
P – N - L – M
P – B – T – M

EXERCICE 4

1. L'ordre d'un graphe est égal au nombre de sommets de cc graphe.
Le graphe est d'ordre : **5.**

2.a. Dans cet exercice le graphe est orienté (il ya une différence de sens entre les arêtes AB et BA).
Sur la première ligne de la matrice d'adjacence, on considère les arêtes d'origine A, il en existe deux d'extrémités B et F. Conséquence : on écrit 1 pour le coefficient première ligne et deuxième colonne et aussi 1 pour le coefficient première ligne et quatrième colonne et pour les autres coefficients de la ligne on écrit 0.
Puis on continue pour les autres lignes.

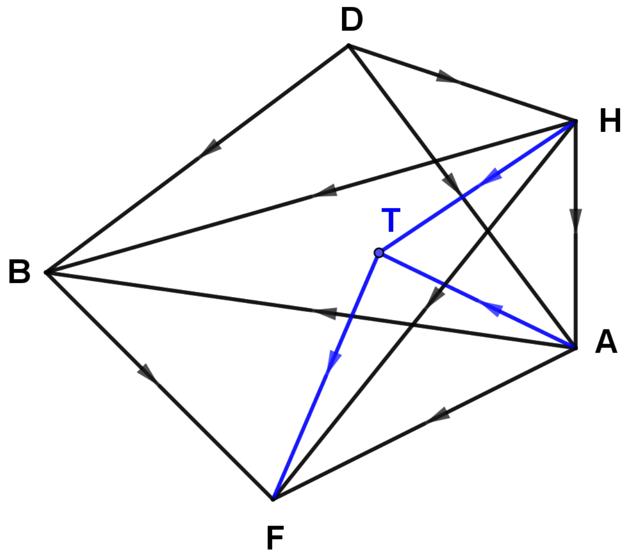
$$M = \begin{array}{c} \\ A \\ B \\ D \\ F \\ H \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} A & B & D & F & H \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

2.b. Les coefficients de M^3 sont les nombres de chemins de longueur 3 (constitués de 3 arêtes) reliant des les sommets du graphe.
Dans la case correspondant au trajet DF on obtient 3 donc il existe 3 chemins de longueur 3 reliant les

sommets D et F.
On détermine ces chemins.
D-A-B-F
D-H-B-F
D-H-A-F

Partie B

Par lecture de la matrice N (on ajouté une ligne et une colonne à la matrice M pour obtenir la matrice d'adjacence d'un graphe d'ordre 6).
On ajoute 3 arêtes au graphe précédent : AT, HT et TF.

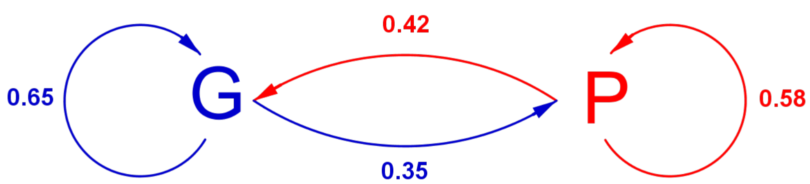


EXERCICE 5

Partie A

1. On note :
G l'état : « Franck gagne la partie »
P l'état : « Franck perd la partie »
G et P sont les deux sommets du graphe probabiliste.

- Quand Franck gagne une partie, la probabilité qu'il gagne la partie suivante est égale à 0,65 donc la probabilité qu'il perde la partie suivante est égale à 1-0,65=0,35.
  Conséquences
  Le poids de l'arête GG est : 0,65.
  Le poids de l'arête GP est : 0,35.
- Quand Franck perd une partie, la probabilité qu'il gagne la partie suivante est égale à 0,42 donc la probabilité qu'il perde la partie suivante est égale à : 1-0,42=0,58.
  Conséquences
  Le poids de l'arête PG est : 0,42.
  Le poids de l'arête PP est : 0,58.
- On obtient le graphe probabiliste :



2.a. L'ordre des sommets est l'ordre G-P.
Dans cet exercice, on utilisera les matrices lignes.

La matrice de transition du graphe probabiliste est $M = \begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{pmatrix}$

m_{11} est le poids de l'arête GG : 0,65
m_{12} est le poids de l'arête GP : 0,35
m_{21} est le poids de l'arête PG : 0,42
m_{22} est le poids de l'arête PP : 0,58

$M = \begin{pmatrix} 0{,}65 & 0{,}35 \\ 0{,}42 & 0{,}58 \end{pmatrix}$

2.b. Franck a gagné la première partie donc $(g_1 \quad p_1) = (1 \quad 0)$

$(g_2 \quad p_2) = (g_1 \quad p_1)\,M = (1 \quad 0)\begin{pmatrix} 0{,}65 & 0{,}35 \\ 0{,}42 & 0{,}58 \end{pmatrix} = (0{,}65 \quad 0{,}35)$

$(g_3 \quad p_3) = (g_2 \quad p_2)\,M = (0{,}65 \quad 0{,}35)\begin{pmatrix} 0{,}65 & 0{,}35 \\ 0{,}42 & 0{,}58 \end{pmatrix}$

$(g_3 \quad p_3) = (0{,}65\times0{,}65 + 0{,}35\times0{,}42 \quad 0{,}65\times0{,}35 + 0{,}35\times0{,}58) = (0{,}4225 + 0{,}147 \quad 0{,}2275 + 0{,}203)$

$(g_3 \quad p_3) = (0{,}5695 \quad 0{,}4305)$

La probabilité que Franck gagne la troisième partie est : $g_3 = 0{,}5695$.

3. $P = (x \quad y)$ est l'état stable du système si et seulement si $\begin{cases} P = PM \\ x + y = 1 \end{cases}$

$P = PM \Leftrightarrow (x \quad y) = (x \quad y)\begin{pmatrix} 0{,}65 & 0{,}35 \\ 0{,}42 & 0{,}58 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0{,}65\,x + 0{,}42\,y \\ y = 0{,}35\,x + 0{,}58\,y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0{,}35\,x - 0{,}42\,y = 0 \\ 0{,}35\,x - 0{,}42\,y = 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \{35\,x - 42\,y = 0 \Leftrightarrow \{5\,x - 6\,y = 0$

Et $x + y = 1$

$5\,x - 6(1 - x) = 0 \Leftrightarrow 11\,x = 6 \Leftrightarrow x = \frac{6}{11}$ et $y = 1 - \frac{6}{11} = \frac{5}{11}$

L'état stable est $P = \left(\frac{6}{11} \quad \frac{5}{11}\right)$.

Pour un très grand nombre de parties, la probabilité de Franck de gagner une partie est égale à $\frac{6}{11}$ (et la probabilité de perdre une partie est $\frac{5}{11}$).

Partie B

1.a. Théorème d'Euler

Un graphe connexe admet un cycle eulérien si et seulement si tous ses sommets sont de degré pair.

On donne les degrés des sommets sous la forme d'un tableau.

Sommets	A	B	C	D	E	F	G
Degrés	2	4	4	4	4	4	2

Il est donc possible, au départ d'une salle quelconque d'y revenir après avoir parcouru tous les couloirs une et une seule fois.

1.b. Exemple

A-B-F-D-B-C-D-E-F-G-E-C-A

2. Franck ne peut pas en partant de la salle A et arriver à la salle G en passant une et une seule fois par chaque arête car, en partant de A il peut aller en B (ou C) il il devra revenir en A en passant par C (ou B) pour parcourir l'arête AC (ou AB) et il n'existe pas d'autre arête permettant de repartir sans passer par B ou C.

EXERCICE 6

Partie A

1. On nous demande si le graphe admet **une chaîne eulérienne** commençant par C.

- Théorème d'Euler

  Un graphe connexe admet au moins une chaîne eulérienne si et seulement si le nombre de sommets de degré impair est 0 ou 2.
- Remarque

  Si le nombre de sommets de degré impair est 2 alors les deux extrémités d'une chaîne eulérienne sont ces deux sommets.
- Détermination du degré de chaque sommet (on donne les résultats sous forme de tableau)

Sommets	A	B	C	D	E	F	G
Degrés	2	4	3	2	4	3	2

- Conclusion

  Il existe une chaîne eulérienne partant de C.

  Exemple

  C-A-B-C-E-B-D-F-E-G-F

2. On nous demande s'il existe **un cycle eulérien.**

Théorème d'Euler

Un graphe connexe admet un cycle eulérien si et seulement si le nombre de sommets de degré impair est 0.

Il y a deux sommets de degré impair.

Conclusion

Il n'existe pas de parcours permettant de nettoyer toutes les allées en passant une et une seule fois par chacune d'elles et de revenir au point de départ.

Partie B

1. Les deux sommets du graphe sont : D et E.

- 5 % des vacanciers ayant déjeuné au centre de vacances ne se réinscrivent pas pour le lendemain.

  Conséquences

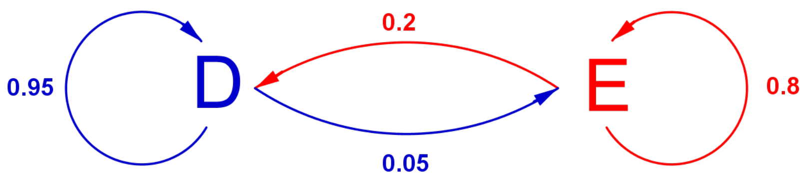
  Le poids de l'arête DE est 0,05.

  Le poids de l'arête DD est : 1-0,05=0,95.
- 20 % des vacanciers ayant déjeuné à l'extérieur s'inscrivent pour déjeuner au centre le lendemain.

  Conséquences

  Le poids de l'arête ED est : 0,2.

  Le poids de l'arête EE est : 1-0,2=0,8
- On obtient le graphe probabiliste suivant :



2. Dans cet exercice, on utilise les matrices lignes.
Les sommets du graphe sont rangés dans l'ordre alphabétique.

La matrice de transitionde ce graphe est : $M=\begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{pmatrix}$

m_{11} est le poids de l'arête DD : 0,95
m_{12} est le poids de l'arête DE : 0,05
m_{21} est le poids de l'arête ED : 0,2
m_{22} est le poids de l'arête EE : 0,8

$$M=\begin{pmatrix} 0{,}95 & 0{,}05 \\ 0{,}2 & 0{,}8 \end{pmatrix}$$

3. Le premier jour, le quart des vancanciers a déjeuné au centre, soit 25 % des vacanciers ont déjeuné au centre le premier jour.
Pour tout entier naturel n non nul, on note d_n la probabilité qu'un vancancier choisi au hasard déjeune au centre le $n^{\text{ième}}$ jour et on note e_n la probabilité qu'un vacancier, choisi au hasard, déjeune à l'extérieur le $n^{\text{ième}}$ jour. On note aussi $P_n=\begin{pmatrix} d_n & e_n \end{pmatrix}$ l'état probabiliste le $n^{\text{ième}}$ jour.

$P_1=\begin{pmatrix} 0{,}25 & 0{,}75 \end{pmatrix}$

Pour tout entier naturel n :

$P_{n+1}=P_n M=P_1 M^n$

$$P_2=\begin{pmatrix} d_2 & e_2 \end{pmatrix}=P_1 M=\begin{pmatrix} 0{,}25 & 0{,}75 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0{,}95 & 0{,}05 \\ 0{,}2 & 0{,}8 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0{,}2375+0{,}15 & 0{,}0125+0{,}6 \end{pmatrix}$$

$P_2=\begin{pmatrix} 0{,}3875 & 0{,}6125 \end{pmatrix}$

Le deuxième jour, 38,75 % des vacanciers déjeuneront au centre.

$P_5=P_1 M^4$

On calcule M^4 en utilisant la calculatrice, on arrondit les résultats à 10^{-4} près.

$$M^4=\begin{pmatrix} 0{,}8633 & 0{,}1367 \\ 0{,}5469 & 0{,}4531 \end{pmatrix}$$

On obtient $P_5=\begin{pmatrix} 0{,}6260 & 0{,}3740 \end{pmatrix}$.

Le cinquième jour, 62,60 % des vacanciers déjeuneront au centre.

4. $P=\begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix}$ est l'état stable si est seulement si x+y=1 et P=PM

$0{,}5+0{,}5=1$ et $\begin{pmatrix} 0{,}5 & 0{,}5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0{,}95 & 0{,}05 \\ 0{,}2 & 0{,}8 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0{,}475+0{,}1 & 0{,}025+0{,}4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0{,}575 & 0{,}425 \end{pmatrix}$

donc $\begin{pmatrix} 0{,}5 & 0{,}5 \end{pmatrix}$ n'est pas l'état stable.

5. On détermine l'état stable

$$\begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0{,}95 & 0{,}05 \\ 0{,}2 & 0{,}8 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0{,}95x+0{,}2y & 0{,}05x & 0{,}8y \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x=0{,}95x+0{,}2y \\ y=0{,}05c+0{,}8y \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 0{,}05x-0{,}2y=0 \\ 0{,}05x-0{,}2y=0 \end{cases} \Leftrightarrow \{0{,}05x-0{,}2y=0 \Leftrightarrow \{5x-20y=0 \Leftrightarrow \{x-4y=0$$

et $x+y=1$ on obtient $5y=1 \Leftrightarrow y=\frac{1}{5}=0{,}2$ et $x=1-0{,}2=0{,}8$.

L'état stable est : $P=\begin{pmatrix}0{,}8 & 0{,}2\end{pmatrix}$

À long terme, le poucentage des vacanciers déjeunant au centre sera voisin de 80 %.

Conséquence

Si les comportements des vacanciers restent les mêmes alors 75 % des vacanciers prendront leur déjeuner au centre.

Remarque

En utilisant la calculatrice on obtient, 74,49 % des vacanciers qui prendront leur déjeuner au centre le dixième jour et 75,87 % des vacanciers prendront leur déjeuner au centre le onzième jour.

EXERCICE 7

1.a. Alexis peut emprunter chaque liaison aérienne une et une seule fois si et seulement si le graphe admet une chaîne eulérienne.

Théorème d'Euler

Un graphe connexe admet au moins une chaîne eulérienne si et seulement si le nombre de sommets de degré impair est 0 ou 2.

On détermine le degré de chaque sommet et on donne les résultats sous la forme d'un tableau.

Sommets	A	B	C	M	N	W
Degrés	2	2	4	3	3	4

Le graphe admet deux (et deux seulement) sommets:M et N de degré impair.

Conclusion

Alexis peut emprunter chaque liaison aérienne une et une seule fois.

1.b. Pour déterminer une chaîne eulérienne, on doit déterminer une chaîne commençant et finissant aux deux sommets de degré impair.

Exemple

M-N-W-M-C-A-W-C-B-N

3.a. Les sommets du graphe sont classés dans l'ordre alphabétique.

La matrice d'adjacence P de ce graphe est $P=(p_{ij})$ i:ligne ; j:colonne (i et i sont des entiers naturels tels que $1\leqslant i\leqslant 6$ et $1\leqslant j\leqslant 6$).

S'il existe une arête reliant le $i^{\text{ème}}$ sommet au $j^{\text{ème}}$ sommet alors $p_{ij}=1$ sinon $p_{ij}=0$.

On obtient : $P=\begin{pmatrix}0&0&1&0&0&1\\0&0&1&0&1&0\\1&1&0&1&0&1\\0&0&1&0&1&1\\0&1&0&1&0&1\\1&0&1&1&1&0\end{pmatrix}$

3.b. Il n'existe pas de liaison aérienne reliant Atlanta à Boston donc $p_{12}=0$.

. En utilisant la calculatrice, on obtient :

$$M=P^2=(m_{ij})=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 2 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 4 & 1 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 1 & 3 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 3 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 2 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

Le cours nous précise que m_{ij} est le nombre de chaînes de longueur 2 reliant le $i^{\text{ème}}$ sommet au $j^{\text{ème}}$ sommet

$m_{12}=1$ donc il n'existe qu'un seul trajet de deux liasons aériennes reliant A à B.

Ce trajet est : **A-C-B** .

- En utilisant la calculatrice, on obtient :

$$N=P^3=(n_{ij})=\begin{pmatrix} 2 & 2 & 6 & 3 & 4 & 6 \\ 2 & 0 & 7 & 2 & 6 & 3 \\ 6 & 7 & 4 & 9 & 3 & 9 \\ 3 & 2 & 9 & 4 & 7 & 7 \\ 4 & 6 & 3 & 7 & 2 & 8 \\ 6 & 3 & 9 & 7 & 8 & 6 \end{pmatrix}$$

Le cours nous précise que n_{ij} est le nombre de chaînes de longueur 3 reliant le $i^{\text{ème}}$ sommet au $j^{\text{ème}}$ sommet

$n_{12}=2$ donc il existe deux trajets de trois liaisons aériennes reliant A à B.

Ces deux trajets sont : **A-W-C-B** et **A-W-N-B.**

- Conclusion

$p_{12}+m_{12}+n_{12}=3$

Il existe donc 3 trajets de longueurs inférieures à 3 reliant Atlanta à Boston ces trois trajets sont :

A-C-B

A-W-C-B

A-W-N-B