# Polygones réguliers constructibles (à la règle et au compas)

## 1. Généralités

### 1.1. Polygones réguliers constructibles à un nombre pair de côtés

**Si $n=2p$ alors le polygone régulier à $n$ côtés est constructible si et seulement si le polygone à $p$ côtés est constructible.**

Preuve
Si polygone régulier à $n$ côtés est constructible, pour obtenir un polygone régulier à $p$ côtés, il suffit de prendre un sommet sur deux.
Si le polygone régulier à $p$ côtés est constructible, pour obtenir un polygone régulier à $n$ côtés, il suffit de construire les bissectrices des angles au centre.
Conséquence
On étudiera les constructions possibles que pour $n$ impair.

### 1.2. Théorème 1

**Soient $n$ et $m$ deux entiers naturels premiers entre eux. Le polygone à $nm$ côtés est constructible à la règle et au compas si et seulement si les polygones à $n$ côtés et $m$ côtés sont constructibles.**

Preuve
En effet le théorème de Bezout nous permet que si $m$ et $n$ sont premiers entre eux, il existe deux entiers relatifs $u$ et $v$ tels que : $um+vn=1$ en multipliant l'expression par $\frac{2\pi}{nm}$, il vient :

$$u\frac{2\pi}{n}+v\frac{3\pi}{m}=\frac{2\pi}{nm}$$

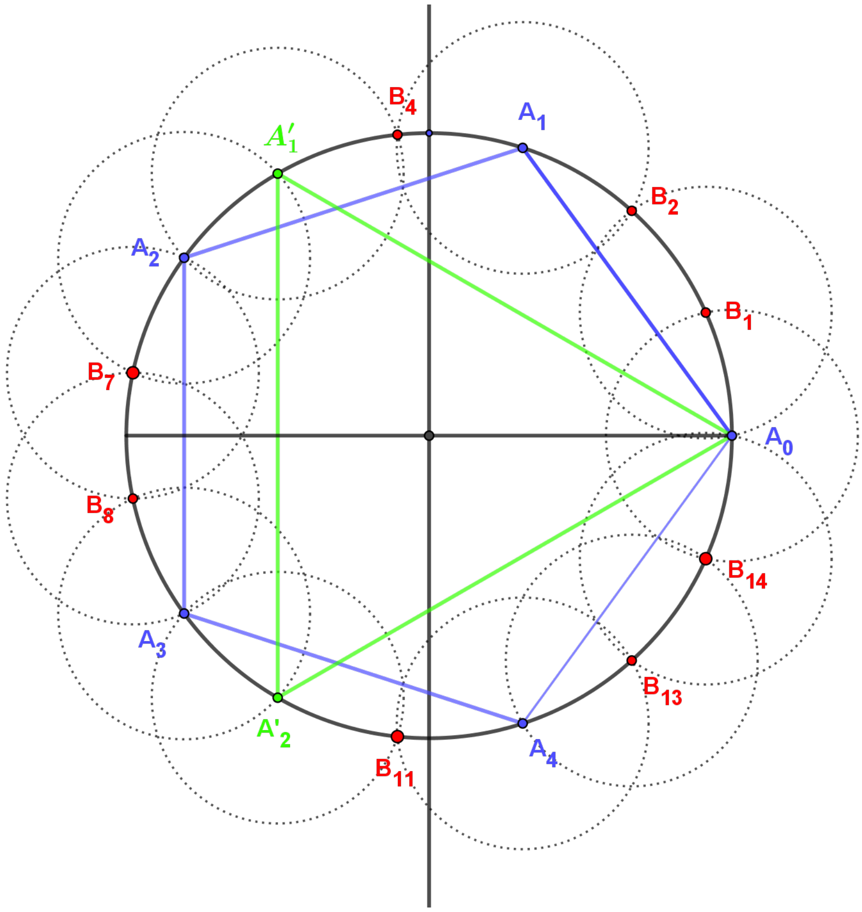
c'est à dire que l'on obtient l'angle $\frac{2\pi}{nm}$, sur le cercle unité, en reportant $u$ fois l'angle $\frac{2\pi}{n}$ et $v$ fois l'angle $\frac{2\pi}{m}$ ; angles déjà construits.

Réciproquement : on a bien sûr immédiatement les polygones à $m$ ou à $n$ côtés. Il suffit pour cela de conserver les sommets voulus.

### 1.3. Exemple

Cas $n=15=3\times5$
On sait construire un triangle équilatéral et un pentagone régulier.
Pgcd(3;5)=1 $2\times3-1\times5=1$
donc $2\times\frac{2\pi}{5}-1\times\frac{2\pi}{3}=\frac{3\pi}{15}$
$A_0A_1A_2A_3A_4$ pentagone régulier.
$A_0A_1'A_2'$ triangle équilatéral.
$\widehat{A_2OA_1'}=\frac{2\pi}{15}$.

En reportant au compas les angles de mesures $\frac{2\pi}{15}$, on obtient un polygone régulier à 15 côtés soit un pentadécagone.




### 1.4. Théorème 2 (théorème de Gauss)

**Soit $p$ un nombre premier supérieur ou égal à 3, $\alpha$ un entier naturel , alors le polygone régulier à $p^{\alpha}$ côtés est constructible si et seulement si $\alpha=1$ et $p$ est un nombre de Fermat c'est à dire de la forme $2^{2^{\beta}}+1$ avec $\beta$ entier naturel.**

### 1.5. Remarque

On ne connaît qu 'assez peu de nombres **premiers** de Fermat. Pour l'instant seuls : $F_0$; $F_1$; $F_2$; $F_3$ et $F_4$ sont connus.

$F_0=2^{2^0}+1=3$ ; $F_1=2^{2^1}+1=5$ ; $F_2=2^{2^2}+1=17$ ; $F_3=2^{2^3}+1=257$ ; $F_4=2^{2^4}+1=65\ 537$

En revanche :

$F_5=4\ 294\ 967\ 297=641\times 6\ 700\ 417$

$F_6 \ldots F_{20}$ ne sont pas premiers.

### 1.6. Conclusion

**Soit $n$ un entier naturel, le polygone régulier à $n$ cotés est constructibles à la règle et au compas si et seulement si l'entier $n$ à une décomposition en facteurs premiers de la forme :**

$n=2^m\times F_1\times F_2\ldots\times F_r$ **où les $F_i$ sont des nombres premiers de Fermat deux à deux distincts.**

## *2. Remarque*

. Nombres de côtés des polygones réguliers constructibles (supérieurs à 3 et inférieur à 51).

**3** ; 4= $2^2$ ; **5** ; **6=** $2\times 3$ ; ~~7~~ ; **8=** $2^3$ ; 9 ; **10=** $2\times 5$ ; ~~11~~ ; **12=** $2^2\times 3$ ; ~~13~~ ; ~~14~~ ; **15=** $3\times 5$ ; **16=** $2^4$ ; **17** ; ~~18~~ ; ~~19~~ ; **20=** $2^2\times 5$ ; ~~21~~ ; ~~22~~ ; ~~23~~ ; **24=** $2^3\times 3$ ; ~~25~~ ; ~~26~~ ; ~~27~~ ; ~~28~~ ; ~~29~~ ; **30=** $2\times 3\times 5$ ; ~~31~~ : **32=** $2^5$ ; ~~33~~ ; **34=** $2\times 17$ ; ~~35~~ ; ~~36~~ : ~~37~~ ; ~~38~~ ; ~~39~~ ; **40=** $2^3\times 5$ ; ~~41~~ ; ~~42~~ ; ~~43~~ ; ~~44~~ ; ~~45~~ ; ~~46~~ ; ~~47~~ ; ~~48~~ : ~~49~~ ; ~~50~~ ; **51=** $3\times 17$ .

. Nombres impairs supérieurs à 51 et inférieurs à $F_4$ .

**85=** $5\times17$ **255=** $3\times5\times17$ **257=** $F_3$ **771=** $3\times257$ **1 285=** $5\times257$ **3 855=** $3\times5\times257$
**4 369=** $17\times257$ **13 107=** $3\times17\times257$ **21 845=** $5\times17\times257$ **65 535=** $3\times5\times17\times257$
**65 537=** $F_4$ .

## 3. Conjecture

On considère le triangle de Pascal qui donne les coefficients binomiaux.

Pour chaque ligne, on considère le nombre, écrit dans le système de numération de base 2, obtenu par les congruences modulo 2 des coefficients binominaux. c'est à si le coefficient binomial est pair on a 0 si le coefficient est impair on a 1.

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| n=0 1 | n=0 1 | $\overline{1}$ | → | 1 |
| n=1 1 1 | n=1 1 1 | $\overline{11}$ | → | 3 |
| n=2 1 2 1 | n=2 1 0 1 | $\overline{101}$ | → | 5 |
| n=3 1 3 3 1 | n=3 1 1 1 1 | $\overline{1111}$ | → | 15 |
| n=4 1 4 6 4 1 | n=4 1 0 0 0 1 | $\overline{10001}$ | → | 17 |
| n=5 1 5 10 10 5 1 | n=5 1 1 0 0 1 1 | $\overline{110011}$ | → | 51 |
| n=6 1 6 15 20 15 5 1 | n=6 1 0 1 0 1 0 1 | $\overline{1010101}$ | → | 85 |
| n=7 1 7 21 35 35 21 7 1 | n=7 1 1 1 1 1 1 1 1 | $\overline{11111111}$ | → | 255 |

On obtient les premiers nombre impairs de côtés pour les polygones constructibles.

En utilisant les propriétés des congruences, on obtient directement l'écriture du nombre en base 2.

| | | | |
|---|---|---|---|
| n=8 1 0 0 0 0 0 0 0 1 | $\overline{100000001}$ | → | 257 |
| n=9 1 1 0 0 0 0 0 0 1 1 | $\overline{1100000011}$ | → | 771 |
| n=10 1 0 1 0 0 0 0 0 1 0 1 | $\overline{10100000101}$ | → | 1 285 |
| n=11 1 1 1 1 0 0 0 0 1 1 1 1 | $\overline{111100001111}$ | → | 3 855 |
| n=12 1 0 0 0 1 0 0 0 1 0 0 0 1 | $\overline{1000100010001}$ | → | 4 369 |
| n=13 1 1 0 0 1 1 0 0 1 1 0 0 1 1 | $\overline{11001100110011}$ | → | 13 107 |
| n=14 1 0 1 0 1 0 1 0 1 0 1 0 1 0 1 | $\overline{101010101010101}$ | → | 21 845 |
| n=15 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 | $\overline{1111111111111111}$ | → | 65 535 |
| n=16 1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 1 | $\overline{10000000000000001}$ | → | 65 537 |

On obtient bien les 16 premiers nombres impairs de côtés pour les polygones constructibles (on exclut 1).