Nombres complexes
Equation du second degré
Equations polynomiales

1. Introduction

$z \in \mathbb{C}$. $a \in \mathbb{R}^*$. $b \in \mathbb{R}$. $c \in \mathbb{R}$

$$P(z) = az^2 + bz + c$$

$$P(z) = a\left[z^2 + \frac{b}{a}z + \frac{c}{a}\right]$$

$$P(z) = a\left[\left(z + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a}\right]$$

$$P(z) = a\left[\left(z + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}\right]$$

On pose $\Delta = b^2 - 4ac$

Δ est **le discriminant** de l'équation $P(z) = 0$ ou du trinôme $P(z)$.

Δ est un nombre réel.

- *Premier cas* : $\Delta > 0$

$$\frac{b^2 - 4ac}{4a^2} = \frac{\Delta}{4a^2} = \left(\frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right)^2$$

$$P(z) = a\left(z + \frac{b}{2a} + \frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right)\left(z + \frac{b}{2a} - \frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right)$$

L'équation $P(z) = 0$ admet deux solutions réelles distinctes :

$z_1 = \dfrac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$ et $z_2 = \dfrac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$.

- *Deuxième cas* : $\Delta = 0$

$$P(z) = a\left(z + \frac{b}{2a}\right)^2$$

L'équation $P(z) = 0$ admet deux solutions réelles confondues :

$$z_1 = z_2 = -\frac{b}{2a}$$

- *Troisième cas* : $\Delta < 0$

$\Delta = i^2(-\Delta)$ avec $-\Delta > 0$

$$P(z) = a\left(z + \frac{b}{2a} + i\frac{\sqrt{-\Delta}}{2a}\right)\left(z + \frac{b}{2a} - i\frac{\sqrt{-\Delta}}{2a}\right)$$

L'équation $P(z) = 0$ admet deux solutions complexes conjuguées :

$z_1 = \dfrac{-b - i\sqrt{\Delta}}{2a}$ et $z_2 = \dfrac{-b + i\sqrt{\Delta}}{2a}$.

2. Théorème

Toute équation du 2ième degré à coefficients réels admet **deux solutions distinctes ou confondues** dans $\mathbb{C}$.

$az^2+bz+c=0$ avec $a\in\mathbb{R}^*$. $b\in\mathbb{R}$. $c\in\mathbb{R}$

- Si $\Delta>0$ alors l'équation admet deux solutions réelles distinctes :
  $z_1=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ et $z_2=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$
  $S=\{z_1\ ;\ z_2\}$
- Si $\Delta=0$ alors l'équation admet deux solutions réelles confondues :
  $z_1=z_2=-\frac{b}{2a}$
  $S=\{z_1\}$
- Si $\Delta<0$ alors l'équation admet deux solutions complexes conjuguées :
  $z_1=\frac{-b-i\sqrt{\Delta}}{2a}$ et $z_2=\frac{-b+i\sqrt{\Delta}}{2a}$.
  $z_2=\overline{z_1}$
  $S=\{z_1\ ;\ z_2\}$

3. Exemples

a) Résoudre dans $\mathbb{C}$: $z^2-2z+4=0$

$\Delta=(-2)^2-4\times1\times4=4-16=-12<0$

L'équation admet deux solutions distinctes complexes conjuguées.

$-\Delta=12$, donc $\sqrt{-\Delta}=\sqrt{12}=2\sqrt{3}$

$z_1=\frac{2-2i\sqrt{3}}{2}=1-i\sqrt{3}$ et $z_2=\frac{2+2i\sqrt{3}}{2}=1+i\sqrt{3}$

$S=\{1-i\sqrt{3};1+i\sqrt{3}\}$

b) Résoudre dans $\mathbb{C}$: $z^2-8z+25=0$

$\Delta=(-8)^2-4\times1\times25=64-100=-36<0$

L'équation admet deux solutions distinctes complexes conjuguées.

$-\Delta=36$, donc $\sqrt{-\Delta}=\sqrt{36}=6$

$z_1=\frac{8-6i}{2}=4-3i$ et $z_2=\frac{8+6i}{2}=4+3i$

$S=\{4-3i;4+3i\}$

4. Remarque

Si $\Delta \in \mathbb{R}^*$ et si d est un nombre complexe (réel ou imaginaire pur) tel que $d^2=\Delta$, on dit que d est une racine carrée de Δ et les deux solutions distinctes (réelles ou complexes conjuguées) de l'équation sont :

$z_1=\frac{-b-d}{2a}$ $\qquad$ $z_2=\frac{-b+d}{2a}$

5. Exercice

θ est un nombre réel.

Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation suivante :

$z^2-2z\cos\theta+1=0$

$\Delta=(-2\cos\theta)^2-4\times 1\times 1=4\cos^2\theta-4=4(\cos^2\theta-1)$

Or, $\cos^2\theta+\sin^2\theta=1$ donc $\cos^2\theta-1=-\sin^2\theta$

Donc, $\Delta=4(-\sin^2\theta)\leqslant 0$

a) $\Delta=0 \Leftrightarrow \sin^2\theta=0 \Leftrightarrow \sin\theta=0 \Leftrightarrow \begin{cases}\theta=\ 0+2k\pi \\ \quad \text{ou} \\ \theta=\pi+2k\pi\end{cases} \quad k\in\mathbb{Z}$

L'équation admet deux solutions réelles confondues.

Si $\theta=0+2k\pi$ alors $\cos\theta=1$ et l'équation proposée devient :

$z^2-2z+1=0$

$\Leftrightarrow (z-1)^2=0$

Donc, $z_1=z_2=1$

$S=\{1\}$

Si $\theta=\pi+2k\pi$ alors $\cos\theta=-1$ et l'équation proposée devient :

$z^2+2z+1=0$

$\Leftrightarrow (z+1)^2=0$

Donc, $z_1=z_2=-1$

$S=\{-1\}$

b) $\Delta\neq 0 \Leftrightarrow \sin^2\theta\neq 0 \Leftrightarrow \sin\theta\neq 0 \Leftrightarrow \begin{cases}\theta\neq\ 0+2k\pi \\ \quad \text{et} \\ \theta\neq\pi+2k\pi\end{cases} \quad k\in\mathbb{Z}$

$\Delta=4(-\sin^2\theta)=(i\,2\sin\theta)^2$

L'équation admet deux solutions distinctes complexes conjuguées :

$z_1 = \frac{2\cos\theta - 2i\sin\theta}{2} = \cos\theta - i\sin\theta$ et $z_2 = \frac{2\cos\theta + 2i\sin\theta}{2} = \cos\theta + i\sin\theta$

$S = \{\cos\theta - i\sin\theta ; \cos\theta + i\sin\theta\}$

6.Equations polynomiales à coefficients réels

6.1. Définition

Soit n un entier naturel, $a_0,\ a_1,\dots a_p,\dots a_n$ des nombres réels avec $a_n \neq 0$
On appelle **fonction polynomiale de degré n** (ou **polynôme de degré n**), la fonction P définie pour tout z de $\mathbb{C}$ par $P(z) = \sum_{p=0}^{n} a_p z^p$.
L'équation $P(z) = 0$ est appelée **équation polynomiale** de degré n.

6.2. Proposition

Pour pour tout entier naturel non nul n et pour tous nombres complexes z et a, on a :

$$z^n - a^n = (z-a)\sum_{p=0}^{n-1} z^{n-p-1} a^p$$

<u>Preuve</u>

$$(z-a)\sum_{p=0}^{n-1} z^{n-p-1} a^p = z\sum_{p=0}^{n-1} z^{n-p-1} a^p - a\sum_{p=0}^{n-1} z^{n-p-1} a^p = \sum_{p=0}^{n-1} z^{n-p} a^p - \sum_{p=0}^{n-1} z^{n-p-1} a^{p+1}$$

$$(z-a)\sum_{p=0}^{n-1} z^{n-p-1} a^p = z^n + z^{n-1}a^1 + \dots + z^{n-p}a^p + \dots + z a^{n-1} - (z^{n-1}a^1 + z^{n-2}a^2 + \dots + z^{n-p}a^p + \dots + z a^{n-1} + a^n) = z^n - a^n$$

exemples :

$z^2 - a^2 = (z-a)(z+a) \qquad z^3 - a^3 = (z-a)(z^2 + za + a^2) \qquad z^4 - a^4 = (z-a)(z^3 + z^2 a + z a^2 + a^3)$

6.3. Théorème

Soient a un nombre complexe et $P(z) = \sum_{p=0}^{n} a_p z^p$ un polynôme de degré n supérieur ou égal à 1.
Si $P(a) = 0$ alors pour tout nombre complexe z, P(z) est factorisable par $(z - a)$ c'est à dire qu'il existe un polynôme Q(z) de degré $n - 1$ tel que $P(z) = (z-a)Q(z)$.
<u>Preuve</u>
On effectue la démonstration pour $n = 4$.

$$P(z) = \sum_{p=0}^{4} a_p z^p = a_0 + a_1 z^1 + a_2 z^2 + a_3 z^3 + a_4 z^4$$

$$P(a) = a_0 + a_1 a^1 + a_2 a^2 + a_3 a^3 + a_1 a^4 = 0$$

$$P(z) - P(a) = P(z) = a_1(z^1 - a^1) + a_2(z^2 - a^2) + a_3(z^3 - a^3) + a_4(z^4 - a^4)$$

$$P(z) = a_1(z-a) + a_2(z-a)(z+a) + a_3(z-a)(z^2 + za + a^2) + a_4(z-a)(z^3 + z^2 a + z a^2 + a^3)$$

$$P(z) = (z-a)[a_1 + a_2(z+a) + a_3(z^2 + za + a^2) + a_4(z^3 + z^2 a + z a^2 + a^3)]$$

$$Q(z) = a_1 + a_2 a + a_3 a^2 + a_4 a^3 + (a_2 + a_3 a + a_4 a^2) z + (a_3 + a_4 a) z^2 + a_4 z^3$$

6.4 Théorème

N est un entier naturel non nul. P(z) est un polynôme de degré n.
L'équation polynomiale $P(z)=0$ admet au plus n solutions dans $\mathbb{C}$ (ou le polynôme P(z) admet au plus n racine dans $\mathbb{C}$).

Preuve

On veut démontrer en utilisant un raisonnement par récurrence que, pour tout entier naturel non nul n, tout polynôme de degré n admet au plus n racines dans $\mathbb{C}$.

Initialisation

Pour $n=1$ $P(z)=a_0+a_1 z$ $a_1\neq 0$

$P(z)=0 \Leftrightarrow a_0+a_1 z=0 \Leftrightarrow z=-\dfrac{a_0}{a_1}$ donc P(z) admet une racine unique dans $\mathbb{C}$.

La propriété est vérifiée pour $n=1$.

Hérédité

Pour démontrer que la propriété est héréditaire pour tout entier naturel non nul n, on admet que tout polynôme de degré n admet au plus n racines dans $\mathbb{C}$ et on doit démontrer que tout polynôme de degré n+1 admet au plus n+1 racines dans $\mathbb{C}$.

$P(z)=\sum_{p=0}^{n+1} a_p z^p$.

Si P(z) n'admet pas de racine alors p(z) admet au plus n+1 racines.
Si P(z) admet au moins une racine a alors $P(z)=(z-a)Q(z)$ avec Q(z) polynôme de degré n.
$P(z)=0 \Leftrightarrow (z=0 \text{ ou } Q(z)=0)$
Q(z) admet au plus n racines donc P(z) admet au plus n+1 racines.

Conclusion

Le principe de récurrence nous permet d'affirmer que tout polynôme de degré n admet au plus n racines.

6.5. Remarques

. Les polynômes $P_1(z)=z^2+z+1$ et $P_2(z)=2z^4+3z^2+1$ n'admettent pas de racines réelles.
$P_1\left(\dfrac{-1+i\sqrt{3}}{2}\right)=0$ et $P_2(i)=0$ donc $P_1(z)$ et $P_2(z)$ admettent des racines complexes.

. Factorisation de polynômes

Exemple 1

$P(z)=z^3+5z^2-4z-2$

$P(1)=1^3+5\times 1^2-4\times 1-2=0$

Il existe donc un polynôme Q(z) de degré 2 tel que $P(z)=(z-1)Q(z)$.

$Q(z)=az^2+bz+c$ avec $a\neq 0$.

Pour tout nombre complexe z on a :

$P(z)=z^3+5z^2-4z-2=(z-1)(az^2+bz+c)=az^3+bz^2+cz-az^2-bz-c=az^3+(b-a)z^2+(c-b)z-c$

Deux polynômes sont égaux si et seulement si tous leurs coefficients sont égaux deux à deux.

$$z^3+5z^2-4z-2=az^3+(b-a)z^2+(c-b)z-c \quad\Leftrightarrow\quad \begin{cases} a=1\\ b-a=5\\ c-b=-4\\ -c=-2\end{cases}$$

Attention : il y a 4 équations et 3 inconnues, il faut donc vérifier que les 4 équations sont compatibles.
Première équation : $a=1$
Deuxième équation : $b-a=5 \Leftrightarrow a-1=5 \Leftrightarrow b=6$
Troisième équation : $c-b=-4 \Leftrightarrow c-6=-4 \Leftrightarrow c=2$
Quatrième équation : $c=2$
Les 4 équations sont compatibles.

$P(z)=(z-1)(z^2+6z+2)$

On peut effectuer une division euclidienne.

$$\begin{array}{r|l} z^3+5z^2-4z-2 & z-1 \\ \hline -(z^3-z^2) & z^2+6z+2 \\ 6z^2-4z & \\ -(6z^2-6z) & \\ 2z-2 & \\ -(2z-2) & \\ 0 & \end{array}$$

<u>Exemple 2</u>

$P(z)=2z^4+3z^2+1$

$P(i)=2\times i^4+3\times i^2+1=2\times 1+3\times(-1)+1=0$

Donc P(z) est factorisable par $z-i$

$P(-i)=2\times(-i)^4+3\times(-i)^2+1=2\times 1+3\times(-1)+1=0$

Donc P(z) est factorisable par $z-i$

Conséquence : P(z) est factorisable par $(z-i)(z+i)=z^2+1$ et $P(z)=(z^2+1)Q(z)$

avec Q(z) polynôme de degré 2.

$Q(z)=az^2+bz+c$

$P(z)=2z^4+3z^2+1=2z^4+0\times z^3+3z^2+0\times z+1$

$P(z)=(z^2+1)Q(z)=(z^2+1)(az^2+bz+c)=az^4+bz^3+cz^2+az^2+bz+c=az^4+bz^3+(c+a)z^2+bz+c$

$$P(z)=(z^2+1)Q(z) \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} a=2 \\ b=0 \\ c+a=3 \\ b=0 \\ c=1 \end{cases}$$

On obtient $a=2,\ b=0,\ c=1$

$P(z)=(z^2+1)(2z^2+1)$

On peut effectuer une division euclidienne

$$\begin{array}{r|l} 2z^4+3z^2+1 & z^2+1 \\ \hline -(2z^4+2z^2) & 2z^2+1 \\ z^2+1 & \\ -(z^2+1) & \\ 0 & \end{array}$$

7. Racines carrées d'un nombre complexe

7.1. définition

On nomme racine carrée du nombre complexe $Z=a+ib$ (a et b sont des nombres réels) tout nombre complexe $z=x+iy$ (x et y sont des nombres réels) solution de l'équation $z^2=Z$.

7.2. Exemple

$Z=-5-12i$

$z=x+iy \qquad z^2=x^2+2ixy-y^2=x^2-y^2$

$z^2 = Z \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x^2 - y^2 = -5 \\ 2xy = -12 \end{cases}$

Si $z^2 = Z$ alors $|z|^2 = |Z|$

$|z|^2 = x^2 + y^2 \qquad |Z| = \sqrt{a^2+b^2} = \sqrt{25+144} = \sqrt{169} = 13$ donc $x^2 + y^2 = 13$

$\begin{cases} x^2+y^2=13 \\ x^2-y^2=-5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x^2 = 8 \\ 2y^2 = 18 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2=4 \\ y^2=9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |x|=2 \\ |y|=3 \end{cases}$

On considère la deuxième équation du premier système : $2xy = -12 \quad \Leftrightarrow \quad xy = -6$.
Donc x et y sont de signes contraires.
Si $x=2$ alors $y=-3$ et si $x=-2$ alors $y=3$

Conclusion

$Z = -5 - 12i$ admet deux racines carrées carrées $z_1 = 2 - 3i$ et $z_2 = -2 - 3i$. On a $z_1 = -z_2$.

7.3. Théorème

Tout nombre complexe non nul $Z = a + bi$ admet deux racines carrées opposées.

Preuve

$z = x + iy \qquad z^2 = Z \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x^2 - y^2 = a \\ 2xy = b \end{cases}$

$|z|^2 = x^2 + y^2 \qquad \left|-\sqrt{a^2+b^2}\right| \neq 0$ car $Z \neq 0$

$|z|^2 = Z \quad \Leftrightarrow \quad x^2 + y^2 = \sqrt{a^2+b^2}$

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = a \\ x^2 + y^2 = \sqrt{a^2+b^2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x^2 = \sqrt{a^2+b^2}+a \\ 2y^2 = \sqrt{a^2+b^2}-a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = \dfrac{\sqrt{a^2+b^2}+a}{2} \\ y^2 = \dfrac{\sqrt{a^2+b^2}-a}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |x| = \sqrt{\dfrac{\sqrt{a^2+b^2}+a}{2}} \\ |y| = \sqrt{\dfrac{\sqrt{a^2+b^2}-a}{2}} \end{cases}$$

On considère la deuxième équation du premier système : $2xy = b \quad \Leftrightarrow \quad xy = \dfrac{b}{2}$.

$Z = a + bi \neq 0$ donc si $b = 0$ alors $a \neq 0$.

- Si $b=0$ et $a>0$ alors $\sqrt{a^2+b^2} = \sqrt{a^2} = a$ et $|x| = \sqrt{\dfrac{a+a}{2}} = \sqrt{a}$ et $|y| = \dfrac{\sqrt{a-a}}{2} = 0$.

  Si Z est un nombre réel strictement positif alors Z admet deux racines carrées réelles opposées : $z_1 = \sqrt{a}$ et $z_2 = -\sqrt{a}$.

- Si $b=0$ et $a<0$ alors $\sqrt{a^2+b^2} = \sqrt{a^2} = -a$ et $|x| = \sqrt{\dfrac{-a+a}{2}} = 0$ et $|y| = \sqrt{\dfrac{-a-a}{2}} = \sqrt{-a}$.

  Si Z est un nombre réel strictement négatif alors Z admet deux racines carrées imaginaires purs opposées : $z_1 = i\sqrt{-a}$ et $z_2 = -i\sqrt{-a}$

- Si $b>0$ alors x et y ont le même signe et Z admet deux racines carrées complexes opposées :

  $z_1 = \sqrt{\dfrac{\sqrt{a^2+b^2}+a}{2}} + i\sqrt{\dfrac{\sqrt{a^2+b^2}-a}{2}}$ et $z_2 = -\sqrt{\dfrac{\sqrt{a^2+b^2}}{2}} - i\sqrt{\dfrac{\sqrt{a^2+b^2}-a}{2}}$.

- Si $b<0$ alors x et y sont de signes contraires et Z admet deux racines carrées complexes opposées :

  $z_1 = \sqrt{\dfrac{\sqrt{a^2+b^2}+a}{2}} - i\sqrt{\dfrac{\sqrt{a^2+b^2}-a}{2}}$ et $z_2 = -\sqrt{\dfrac{\sqrt{a^2+b^2}+a}{2}} + i\sqrt{\dfrac{\sqrt{a^2+b^2}-a}{2}}$

Remarque

Si Z=0 alors Z admet une seule racine carrée : 0 (ou deux raines carrées confondues).