Nombres complexes
Représentation géométrique
Notation exponentielle

1. Représentation géométrique d'un nombre complexe

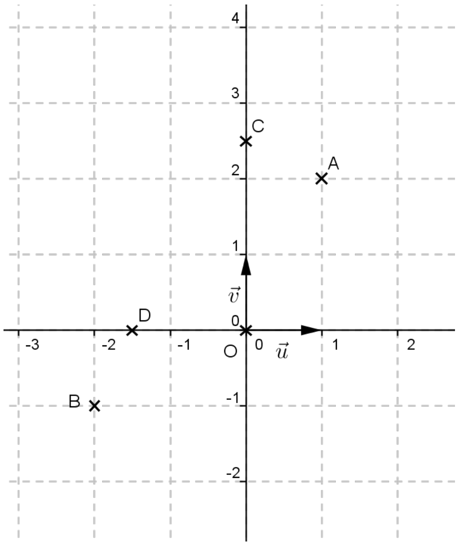
Le plan muni d'un repère orthonormé direct $(O;\vec{u},\vec{v})$ se nomme **plan complexe**.

1.1. Affixe d'un point

A tout nombre complexe z d'écriture algébrique $z=a+bi$ (où a et b sont des nombres réels) correspond un unique point M du plan de coordonnées $(a;b)$.

On dit z est **l'affixe** de M et on note $M(z)$.
On dit que M est **l'image ponctuelle** de z.

Exemples :
Dans le plan complexe, placer les points A ; B ; C et D d'affixes respectives :
$z_A=1+2i$; $z_B=-2-i$; $z_C=\frac{5}{2}i$; $z_D=-\frac{3}{2}$.



1.2. Affixe d'un vecteur

A tout nombre complexe z d'écriture algébrique $z=a+bi$ correspond un unique vecteur $\vec{V}$ coordonnées $(a;b)$.
$\vec{V}=a\vec{u}+b\vec{v}$
Si z est l'affixe de z alors $\vec{V}=\overrightarrow{OM}$.

On dit z est **l'affixe** de $\vec{V}$ et on note $\vec{V}(z)$.
On dit que le vecteur $\vec{V}=\overrightarrow{OM}$ est **l'image vectorielle** de z.

1.3. Remarques

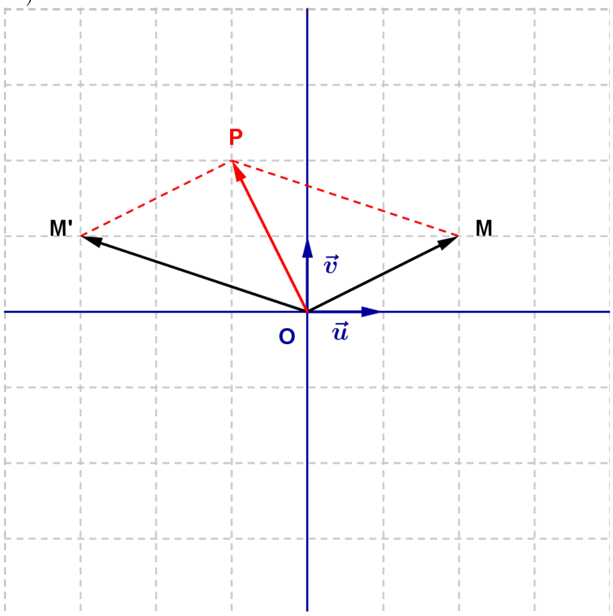
L'axe des abscisses $(O;\vec{u})$ est l'ensemble des images ponctuelles des nombres réels. On le nomme **l'axe réel**.

L'axe des ordonnées $(O;\vec{v})$ est l'ensemble des images ponctuelles des imaginaires purs. On le nomme **l'axe imaginaire**.

1.4. Propriétés

a) *Somme de deux nombres complexes*

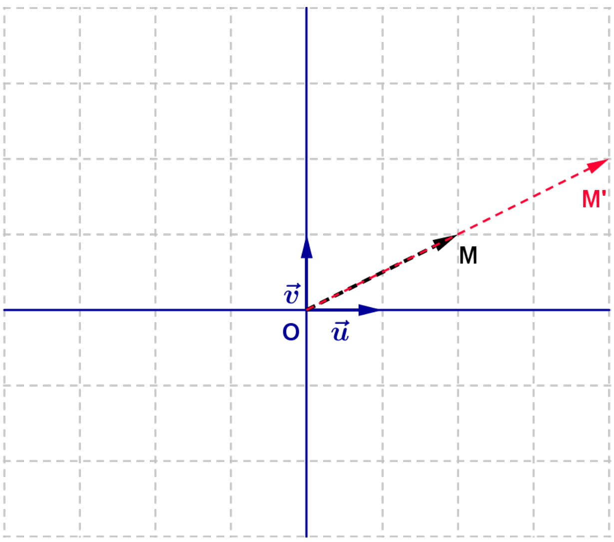
$\vec{V}=\overrightarrow{OM}(z)$ et $\vec{V}'=\overrightarrow{OM}'(z')$
$\vec{V}+\vec{V}'=\overrightarrow{OM}+\overrightarrow{OM}'=\overrightarrow{OP}(z+z')$



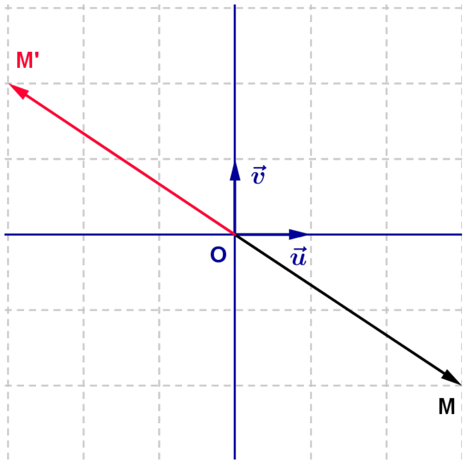
Le quadrilatère AMPM' est **un parallélogramme**.

b) *Produit d'un nombre complexe par un nombre réel*

$\vec{V}=\overrightarrow{OM}(z)$ et $\lambda\in\mathbb{R}$
$\lambda\vec{V}=\overrightarrow{OM}'(\lambda z)$

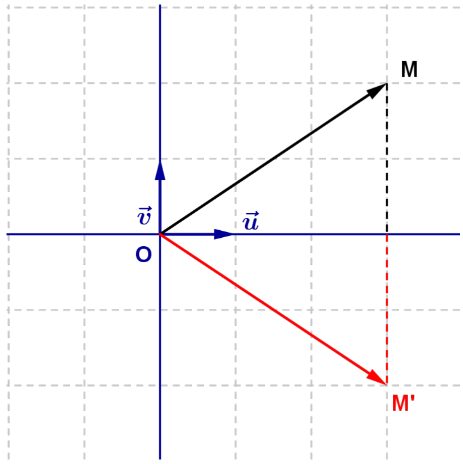


Cas particulier :
$\lambda = -1$ $\quad\quad \vec{V} = \overrightarrow{OM}(z) \quad\quad \vec{V}' = -\vec{V} = \overrightarrow{OM}'(-z)$



c) *Nombres complexes conjugués*

$\vec{V} = \overrightarrow{OM}(z)$ et $\vec{V}' = \overrightarrow{OM}'(\bar{z})$
$z = a + bi$ et $\bar{z} = a - bi$

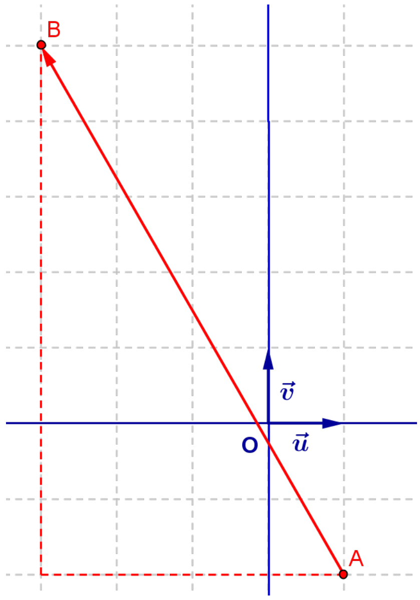


Les points M et M' sont **symétriques par rapport à l'axe des abscisses**.

d) *Affixe d'un bipoint*

Si $A(z_A)$ et $B(z_B)$ alors $\boxed{\overrightarrow{AB}(z_B - z_A)}$.

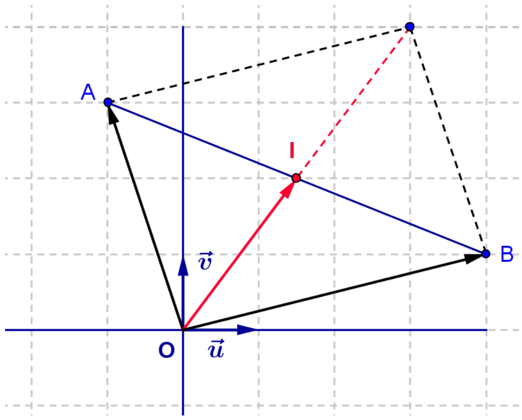
$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OB}$



e) *Affixe du milieu d'un segment*

Si $A(z_A)$ et $B(z_B)$ et I est le milieu de [AB] alors $\boxed{I\left(\frac{z_A+z_B}{2}\right)}$.

Démonstration :,
$\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OI}+\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{OI}+\overrightarrow{IB}=2\overrightarrow{OI}+\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IB}$
Or, I est le milieu de [AB] donc $\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IB}=\vec{0}$
Donc, $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}=2\overrightarrow{OI}$
$\overrightarrow{OI}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB})$
et $z_I=\frac{z_A+z_B}{2}$



1.4. Exercice

Dans le plan complexe, déterminer l'ensemble des points M d'affixe z tel que : $Z=\frac{5z-2}{z-1}$ soit un imaginaire pur.
Pour répondre à cette question, on peut écrire Z sous forme algébrique et dire que sa partie réelle est nulle ou il suffit de calculer la partie réelle. On rappelle que $Z+\overline{Z}=2\Re(Z)$.

Ici, on va déterminer l'écriture algébrique de Z car en général on pose souvent plusieurs questions faisant intervenir la partie réelle et la partie imaginaire.

$Z=\frac{5z-2}{z-1}$

On pose $z=x+iy$ avec $x\in\mathbb{R}$ et $y\in\mathbb{R}$

Il faut que $z\neq 1$. On note $A(1)$

$Z=\frac{5x-2+5iy}{x-1+yi}$

$Z=\frac{(5x-2+5iy)(x-1-yi)}{(x-1)^2+y^2}$

$Z=\frac{5x^2-5x-2x+2+5y^2+i(-5xy+2y+5xy-5y)}{(x-1)^2+y^2}$

$Z=\frac{(5x^2-7x+2+5y^2)-3iy}{(x-1)^2+y^2}$

Z est un imaginaire pur

$\Leftrightarrow\begin{cases}\frac{5x^2+5y^2-7x+2}{(x-1)^2+y^2}=0\\ z\neq 1\end{cases}$

$\Leftrightarrow\begin{cases}5x^2+5y^2-7x+2=0(1)\\ x\neq 1 \text{ ou } y\neq 0\end{cases}$

$(1)\Leftrightarrow x^2+y^2-\frac{7}{5}x+\frac{2}{5}=0$

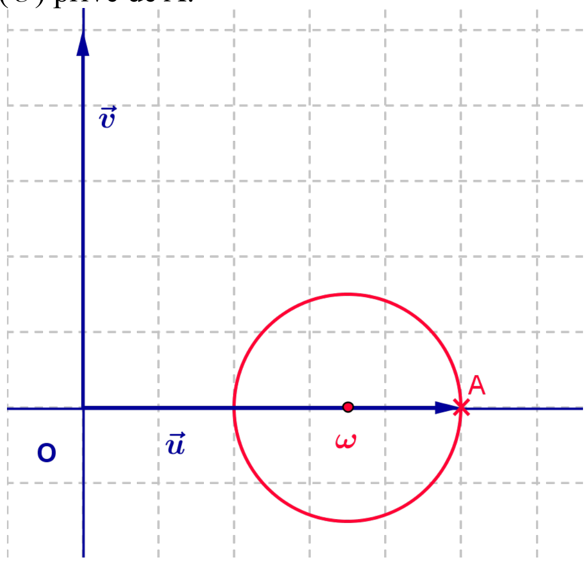
$\Leftrightarrow\left(x-\frac{7}{10}\right)^2+y^2-\frac{49}{100}+\frac{2}{5}=0$

$\Leftrightarrow\left(x-\frac{7}{10}\right)^2+y^2=\frac{9}{100}$

Il s'agit de l'équation du cercle ($\mathscr{C}$) de centre $\omega\left(\frac{7}{10}+0i\right)$ et de rayon $\frac{3}{10}$.

Le point $A(1)$ appartient à ($\mathscr{C}$).

L'ensemble cherché est le cercle ($\mathscr{C}$) privé de A.



2. Module d'un nombre complexe

2.1. Définition

On nomme **module** du nombre complexe $z=a+bi$ (avec a et b réels) **la norme de son image vectorielle** dans le plan complexe. On note $\boxed{|z|}$.
$|z|=\|\vec{V}\|=OM=\sqrt{a^2+b^2}$

2.2. Remarques

a) $z=a+bi \quad \bar{z}=a-bi$

$z\bar{z}=a^2+b^2$

$\boxed{|z^2|=z\bar{z}}$

b) Si z est un nombre réel alors $z=a+0i$

$|z|=\sqrt{a^2}=|a|$

Le module de z est égal à la valeur absolue de a.

2.3. Propriétés

a)

Deux nombres complexes **conjugués** ont **le même module** :
$\boxed{|\bar{z}|=|z|}$

b)

$|z|$ est un nombre réel positif ou nul.
$\boxed{|z|=0} \Leftrightarrow \boxed{z=0}$

c)

Module de la somme de deux nombres complexes :
$\boxed{|z+z'|\leqslant|z|+|z'|}$

(on admet ce résultat)

d)

Le **module d'un produit** de deux nombres complexes est égal **au produit des modules**.
$\boxed{|z\times z'|=|z|\times|z'|}$

Démonstration :
$|(z\times z')^2|=(z\times z')\times\overline{(z\times z')}$
$|(z\times z')^2|=z\times z'\times\overline{z}\times\overline{z'}$
$|(z\times z')^2|=(z\times\overline{z})\times(z'\times\overline{z'})$
$|(z\times z')^2|=|z^2|\times|z'^2|$
Donc, $|z\times z'|=|z|\times|z'|$

Cas particulier : Le produit d'un nombre complexe par un nombre réel.
$\lambda\in\mathbb{R}$; $z\in\mathbb{C}$
$\boxed{|\lambda z|=|\lambda|\times|z|}$

e)

Le module de **l'inverse d'un nombre complexe** non nul est **l'inverse du module** de ce nombre complexe.
$z\in\mathbb{C}^*$, $\boxed{\left|\frac{1}{z}\right|=\frac{1}{|z|}}$

Démonstration :
$\frac{1}{z}\times z=1$ donc $\left|\frac{1}{z}\times z\right|=|1=1|$.
Or, $\left|\frac{1}{z}\times z\right|=\left|\frac{1}{z}\right|\times|z|$
Donc, $\left|\frac{1}{z}\right|\times|z|=1$
Donc, $\left|\frac{1}{z}\right|=\frac{1}{|z|}$ (si $z\neq 0$ alors $|z|\neq 0$)

f)

Le module du **le quotient de deux nombres complexes** (le dénominateur étant non nul) est **le quotient des modules**.
$z\in\mathbb{C}$, $z'\in\mathbb{C}^*$, $\boxed{\left|\frac{z}{z'}\right|=\frac{|z|}{|z'|}}$

Démonstration :
$\frac{z}{z'}=z\times\frac{1}{z'}\, donc\, \left|\frac{z}{z'}\right|=\left|z\times\frac{1}{z'}\right|=|z|\times\left|\frac{1}{z'}\right|=|z|\times\frac{1}{|z'|}=\frac{|z|}{|z'|}$

g) On peut démontrer que pour tout entier relatif n et tout nombre complexe non nul z que : $\boxed{|z^n|=|z|^n}$

h) Interprétation géométrique du module de la différence de deux nombres complexes.

Si $M(z)$ et $M(z')$ alors $\overrightarrow{MM'}(z'-z)$ et $\boxed{\|\overrightarrow{MM'}\|=MM'=|z'-z|}$

2.4. Exemples

Calculer les modules des nombres complexes suivants :

$z_1=\mathrm{i}$ $\quad z_2=3-2i$ $\quad z_3=(\sqrt{2}+i\sqrt{3})(\sqrt{3}+i\sqrt{5})$ $\quad z_4=\dfrac{1+i}{1-i}$ $\quad z_5=\dfrac{3-2i}{2-3i}$

$z_6=\dfrac{(2-3i)(3+4i)}{(6+4i)(15-8i)}$ $\quad z_7=(3-2\mathrm{i})^4$ $\quad z_8=\left(\dfrac{1}{2}+\mathrm{i}\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)^{511}$ $\quad z_9=(1+i)^6$

$|z_1|^2=|i|^2=|0+1i|^2=0^2+1^2=1$ donc $|i|=1$

$|z_2|^2=|3-2i|^2=3^2+(-2)^2=13$ donc $|z_2|=\sqrt{13}$

$|z_3|=|(\sqrt{2}+i\sqrt{3})(\sqrt{3}+i\sqrt{5})|=|\sqrt{2}+i\sqrt{3}|\times|\sqrt{3}+i\sqrt{5}|$
Or, $|\sqrt{2}+i\sqrt{3}|^2=2+3=5$ donc $|\sqrt{2}+i\sqrt{3}|=\sqrt{5}$
$|\sqrt{3}+i\sqrt{5}|^2=3+5=8$ donc $|\sqrt{3}+i\sqrt{5}|=\sqrt{8}=2\sqrt{2}$

$|z_4|=\dfrac{|1+i|}{|1-i|}$
Or, $1-i=\overline{(1+i)}$ donc $|1-i|=|1+i|$
Donc, $|z_4|=1$

$|z_5|=\dfrac{|3-2i|}{|2-3i|}$
Or, $|3-2i|^2=9+4=13$ donc $|3-2i|=\sqrt{13}$
$|2-3i|^2=4+9=13$ donc $|2-3i|=\sqrt{13}$
Donc, $|z_5|=\dfrac{\sqrt{13}}{\sqrt{13}}=1$

$$|z_6|=\frac{|2-3i||3+4i|}{|6+4i||15-8i|}=\frac{\sqrt{13}\times 5}{\sqrt{52}\times\sqrt{289}}=\frac{5}{\sqrt{3}\times\sqrt{289}}$$

$|z_7|=|3-2\mathrm{i}|^4=(\sqrt{13})^4=13^2=169$

$$|z_8|=\left|\frac{1}{2}+\mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2}\right|^{511}=1^{511}=1$$

$|z_9|=|1+i|^6=(\sqrt{2})^6=2^3=8$

2.5. Nombres complexes de module 1

- Inverse d'un nombre complexe non nul

$$z\in\mathbb{C}^*,\ \frac{1}{z}=\frac{\bar{z}}{z\bar{z}}=\frac{\bar{z}}{|z|^2}$$

Cas particulier : nombre complexe de module 1

$|z|=1 \qquad \frac{1}{z}=\frac{\bar{z}}{1^2}=\bar{z}$

L'inverse d'un **nombre complexe de module 1** est égal à **son conjugué**.

2.6. Exercices

a) Déterminer l'ensemble des points M d'affixe z tels que : $\left|\frac{z-2}{z+1-\mathrm{i}}\right|=1$

Première méthode (méthode algébrique)

$z=x+iy \qquad x\in\mathbb{R} \quad y\in\mathbb{R}$

On doit avoir $z\neq -1+\mathrm{i}$

$z-2=x-2+i\,y$

$z+1-\mathrm{i}=x+1+i(y-1)$

$\left|\frac{z-2}{z+1-\mathrm{i}}\right|=1$

$\Leftrightarrow \frac{|z-2|}{|z+1-\mathrm{i}|}=1$

$\Leftrightarrow |z-2|=|z+1-\mathrm{i}|$

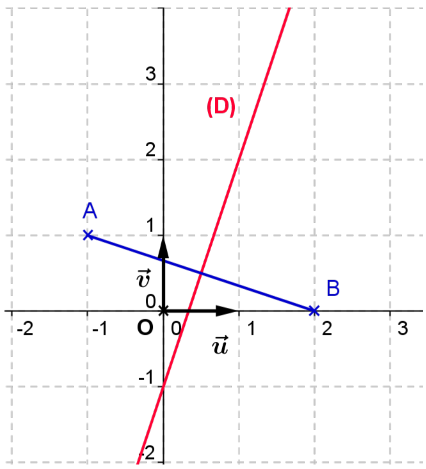
$\Leftrightarrow (x-2)^2+y^2=(x+1)^2+(y-1)^2$

$\Leftrightarrow x^2-4x+4+y^2=x^2+2x+1+y^2-2y+1$

$\Leftrightarrow -6x+2y+2=0$

$\Leftrightarrow y=3x-1$

L'ensemble cherché est la droite (D) d'équation $y=3x-1$



Deuxième méthode (méthode géométrique)

$A(-1+\mathrm{i}) \qquad B(2) \qquad M(z)$

$\overrightarrow{AM}(z+1-\mathrm{i}) \qquad \overrightarrow{BM}(z-2)$

$|z+1-\mathrm{i}|=AM \qquad |z-2|=BM$

$\left|\frac{z-2}{z+1-\mathrm{i}}\right|=1$

$\Leftrightarrow \frac{|z-2|}{|z+1-\mathrm{i}|}=1$

$\Leftrightarrow \frac{BM}{AM}=1$

$\Leftrightarrow AM=BM$

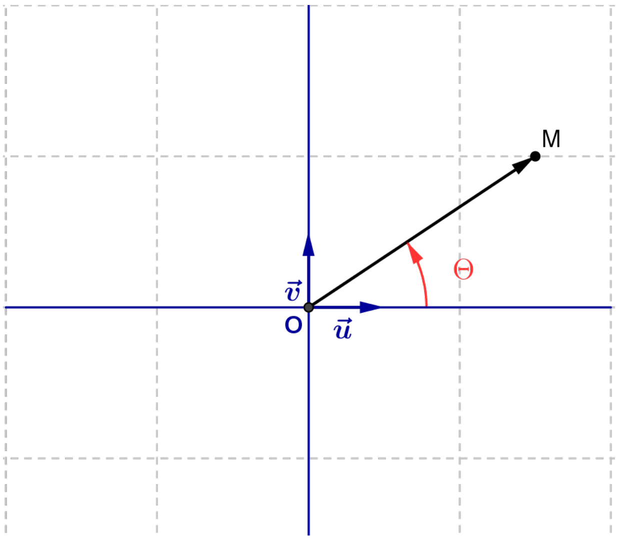
L'ensemble des points M cherché est la médiatrice du segment [AB].

3. Forme trigonométrique et forme exponentielle d'un nombre complexe non nul

3.1. Argument d'un nombre complexe non nul

$(O;\vec{u},\vec{v})$ est un repère orthonormé direct du plan complexe.
L'unité de mesure des angles est le radian.

$z\in\mathbb{C}^*$, $z=a+bi$
M est l'image ponctuelle de z .



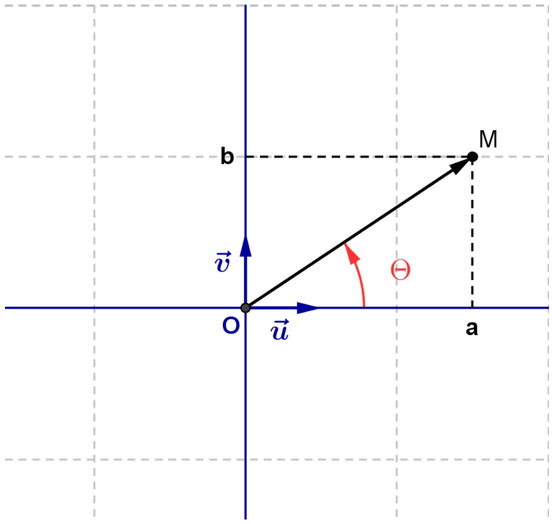
On nomme **argument du nombre complexe** z , une mesure (à $2k\pi$ près ; $k\in\mathbb{Z}$) de l'angle $(\vec{u};\overrightarrow{OM})$.
On note : $\boxed{arg\ z=(\vec{u};\overrightarrow{OM})+2k\pi}$ ou $\boxed{arg\ z=\theta+2k\pi}$

3.2. Remarques

z est un **nombre réel strictement positif** $\Leftrightarrow arg\ z=0+2k\pi$

z est un **nombre réel strictement négatif** $\Leftrightarrow arg\ z=\pi+2k\pi$

z est un **imaginaire pur non nul** $\Leftrightarrow \begin{cases} \arg z=\dfrac{\pi}{2}+2k\pi \\ \text{ou} \\ \arg z=-\dfrac{\pi}{2}+2k\pi \end{cases}$



On note $arg\, z=\theta+2k\pi$

$a=OM\cos\theta$ et $b=OM\sin\theta$

$OM=\|\overrightarrow{OM}\|=|z|$

On note $|z|=r$

r est un nombre réel strictement positif, donc $z=a+bi=r\cos\theta+ir\sin\theta=r(\cos\theta+i\sin\theta)$

3.3. Forme trigonométrique d'un nombre complexe non nul

$z\in\mathbb{C}^*$. On nomme **forme trigonométrique** du nombre complexe z, l'écriture :
$\boxed{z=r(\cos\theta+i\sin\theta)}$ avec $\boxed{r=|z|}$ et $\boxed{arg\, z=\theta+2k\pi}$.

3.4. Forme exponentielle d'un nombre complexe non nul

$z\in\mathbb{C}^*$. On nomme **forme exponentielle** du nombre complexe z, l'écriture :
$\boxed{z=re^{i\theta}}$ avec $\boxed{r=|z|}$ et $\boxed{arg\, z=\theta+2k\pi}$.

3.5. Relations entre formes algébrique et trigonométrique

$z\in\mathbb{C}^*$. $a\in\mathbb{R}$ et $b\in\mathbb{R}$

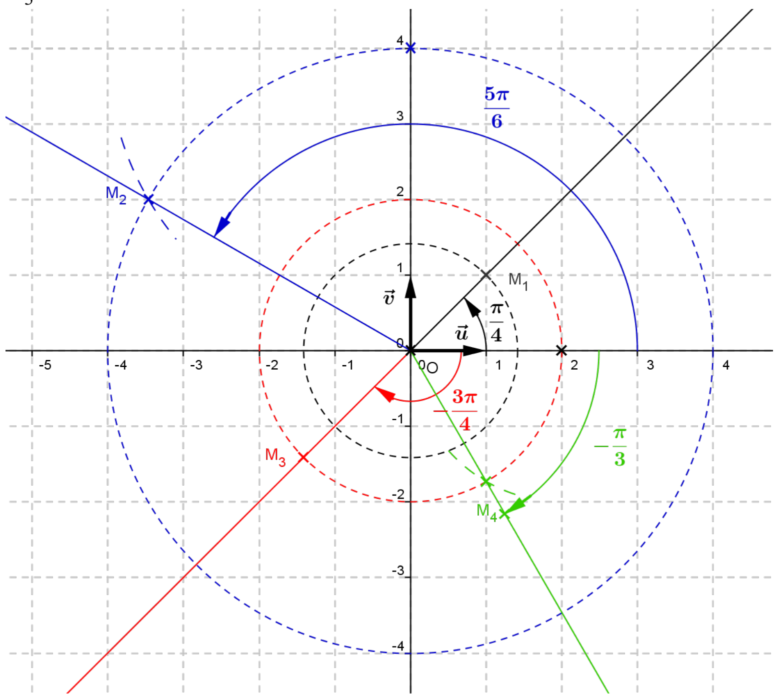
$z=a+bi=re^{i\theta}=r(\cos\theta+i\sin\theta)$

$$\begin{cases} a=r\cos\theta \\ b=r\sin\theta \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} r=\sqrt{a^2+b^2} \\ \cos\theta=\dfrac{a}{r} \text{ et } \sin\theta=\dfrac{b}{r} \end{cases}$$

3.6. Exemples

a) Dessiner l'image et donner la forme algébrique des nombres complexes suivants :

$z_1=\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$; $z_2=4e^{i\frac{5\pi}{6}}$; $z_3=2e^{-i\frac{3\pi}{4}}$; $z_4=2e^{-i\frac{\pi}{3}}$.



M_1 est l'image ponctuelle de z_1 .

$OM_1=|z_1|=\sqrt{2}$,donc M_1 appartient au cercle de centre O et de rayon $\sqrt{2}$.
$(\vec{u};\overrightarrow{OM_1})=\frac{\pi}{4}+2k\pi$. On trace la demi-droite $[Ox_1)$ telle que $(\vec{u};\overrightarrow{Ox_1})=\frac{\pi}{4}+2k\pi$.
M_1 est le point d'intersection du cercle et de la demi droite.

$\Re(z_1)=\sqrt{2}\cos\frac{\pi}{4}=\sqrt{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2}=1$

$\Im(z_1)=\sqrt{2}\sin\frac{\pi}{4}=\sqrt{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2}=1$

$\boxed{z_1=1+i}$

M_2 est l'image ponctuelle de z_2 .

$OM_2=|z_2|=4$,donc M_2 appartient au cercle de centre O et de rayon 4.
$(\vec{u};\overrightarrow{OM_2})=\frac{5\pi}{6}+2k\pi$. On trace la demi-droite $[Ox_2)$ telle que $(\vec{u};\overrightarrow{Ox_2})=\frac{5\pi}{6}+2k\pi$. $\left(\frac{5\pi}{6}=\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{3}\right)$.
M_2 est le point d'intersection du cercle et de la demi droite.

$\Re(z_2)=4\cos\frac{5\pi}{6}=4\times\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=-2\sqrt{3}$

$\Im(z_2)=4\sin\frac{5\pi}{6}=4\times\frac{1}{2}=2$

$\boxed{z_2=-2\sqrt{3}+2i}$

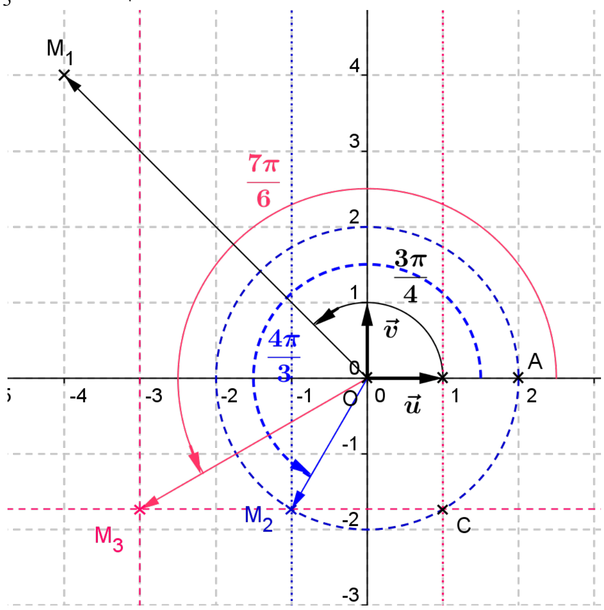
M_3 est l'image ponctuelle de z_3 .

$OM_3=|z_3|=2$,donc M_3 appartient au cercle de centre O et de rayon 2.
$(\vec{u};\overrightarrow{OM_3})=-\frac{3\pi}{4}+2k\pi$. On trace la demi-droite $[Ox_3)$ telle que $(\vec{u};\overrightarrow{Ox_3})=-\frac{3\pi}{4}+2k\pi$.
M_3 est le point d'intersection du cercle et de la demi droite.
$\Re(z_3)=2\cos\left(-\frac{3\pi}{4}\right)=2\times\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=-\sqrt{2}$
$\Im(z_3)=2\sin\left(-\frac{3\pi}{4}\right)=2\times\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=-\sqrt{2}$
$\boxed{z_2=-\sqrt{2}-i\sqrt{2}}$

M_4 est l'image ponctuelle de z_4 .

$OM_4=|z_4|=2$,donc M_{43} appartient au cercle de centre O et de rayon 2.
$(\vec{u};\overrightarrow{OM})=-\frac{\pi}{3}+2k\pi$. On trace la demi-droite $[Ox_4)$ telle que $(\vec{u};\overrightarrow{Ox_4})=-\frac{\pi}{3}+2k\pi$.
M_4 est le point d'intersection du cercle et de la demi droite.
$\Re(z_4)=2\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right)=2\times\frac{1}{2}=1$
$\Im(z_4)=2\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)=2\times\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=-\sqrt{3}$
$\boxed{z_4=1-i\sqrt{3}}$

b) Dessiner l'image et donner la forme exponentielle des nombres complexes suivants :
$z_1=-4+4i$; $z_2=-1-i\sqrt{3}$; $z_3=-3-i\sqrt{3}$



M_1 est l'image ponctuelle de $z_1=-4+4i$
Les coordonnées de M_1 sont entières. On place directement le point sur le dessin.
$|z_1|^2=(-4)^2+4^2=16+16=32$
$|z_1|=\sqrt{32}=4\sqrt{2}$

$\cos\theta_1=\frac{-4}{4\sqrt{2}}=\frac{-1}{\sqrt{2}}=-\frac{\sqrt{2}}{2}$ et $\sin\theta_1=\frac{4}{4\sqrt{2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$

Donc, $arg\ z_1=\frac{3\pi}{4}+2k\pi$

$\boxed{z_1=4\sqrt{2}e^{\frac{3i\pi}{4}}}$

M_2 est l'image ponctuelle de $z_2=-1-i\sqrt{3}$

On peut placer le point M_2 . Si on veut une construction à la règle et au compas, il suffit de remarquer que $|z_2|=\sqrt{(-1)^2+(-\sqrt{3})^2}=2$ donc M_2 est le point du cercle de centre O et de rayon 2 ayant pour abscisse -1 et une ordonnée négative.

$\cos\theta_2=\frac{-1}{2}$ et $\sin\theta_2=\frac{-\sqrt{3}}{2}$

Donc, $arg\ z_2=\frac{4\pi}{3}+2k\pi$

$\boxed{z_2=2e^{\frac{4i\pi}{3}}}$

M_3 est l'image ponctuelle de $z_3=-3-i\sqrt{3}$

On peut placer le point M_3 . Si on veut une construction à la règle et au compas, il suffit de remarquer que $\sqrt{3}$ est la hauteur d'un triangle équilatéral de côté 2. Ici il suffit de considérer le triangle équilatéral OAC.

$|z_3|=\sqrt{(-3)^2+(-\sqrt{3})^2}=\sqrt{12}=2\sqrt{3}$

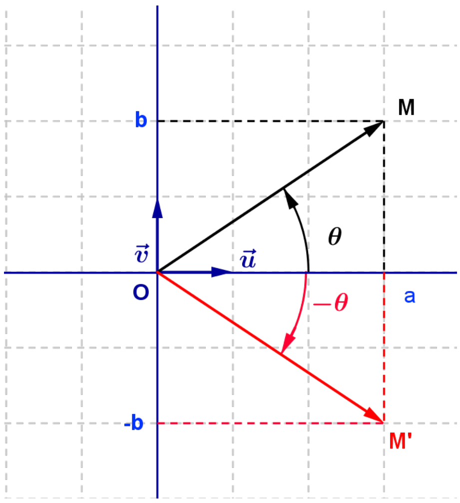
$\cos\theta_3=\frac{-3}{2\sqrt{3}}=-\frac{\sqrt{3}}{2}$ et $\sin\theta_3=\frac{-\sqrt{3}}{2\sqrt{3}}=-\frac{1}{2}$

Donc, $arg\ z_3=\frac{7\pi}{6}+2k\pi$

$\boxed{z_3=2\sqrt{3}e^{\frac{7i\pi}{6}}}$

4. Propriétés

4.1. Nombres complexes conjugués



$z \in \mathbb{C}^*$. $\quad z = a + bi \quad \bar{z} = a - bi$
$z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$
$\bar{z} = r(\cos\theta - i\sin\theta)$

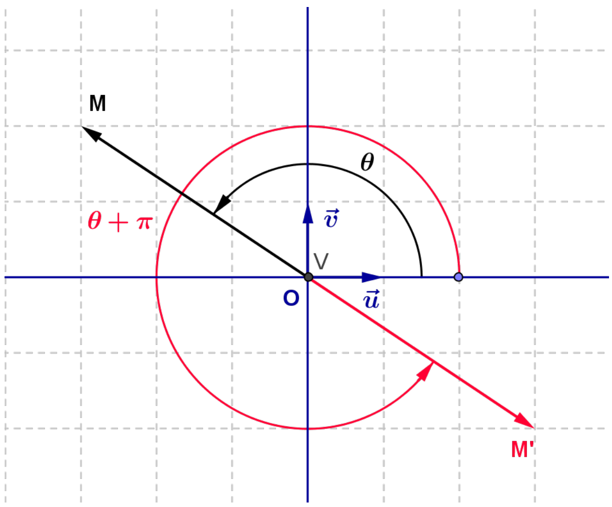
Or, $\cos(-\theta) = \cos\theta$ et $\sin(-\theta) = -\sin\theta$
Donc, $\bar{z} = r(\cos(-\theta) + i\sin(-\theta))$

On a donc $\boxed{arg\,\bar{z} = -arg\,z + 2k\pi}$ et $\boxed{|\bar{z}| = |z| = r}$

> $z \in \mathbb{C}^*$. Si $\boxed{z = re^{i\theta}}$ alors $\boxed{\bar{z} = re^{-i\theta}}$

4.2. Nombres complexes non nuls opposés

$z = a + bi = r(\cos\theta + i\sin\theta) = re^{i\theta}$
$z' = -z = -a - bi = r(-\cos\theta - i\sin\theta) = -re^{i\theta}$
$M(z) \qquad M'(-z)$



M et M' sont symétriques par rapport à O.
On a $\cos(\theta + \pi) = -\cos\theta$ et $\sin(\theta + \pi) = -\sin\theta$
$|-z| = |z|$

> $z \in \mathbb{C}^*$. Si $\boxed{z = re^{i\theta}}$ alors $\boxed{-z = re^{i(\theta + \pi)}}$

4.3. Produit de deux nombres complexes non nuls

$z \in \mathbb{C}^*$. $\quad z = re^{i\theta} \quad r = |z|$ et $arg\,z = \theta + 2k\pi$
$z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$

$z' \in \mathbb{C}^*$. $z'=r'e^{i\theta'}$ $r'=|z'|$ et $arg\, z'=\theta'+2k\pi$
$z'=r'(\cos\theta'+i\sin\theta')$

$z\times z'=(re^{i\theta})\times(r'e^{i\theta'})$
$z\times z'=r(\cos\theta+i\sin\theta)\times r'(\cos\theta'+i\sin\theta')$
$z\times z'=rr'[\cos\theta.\cos\theta'-\sin\theta.\sin\theta'+i(\cos\theta.\sin\theta'+\sin\theta.\cos\theta')]$

Or, $\cos\theta.\cos\theta'-\sin\theta.\sin\theta'=\cos(\theta+\theta')$
et $\cos\theta.\sin\theta'+\sin\theta.\cos\theta'=\sin(\theta+\theta')$

Donc,
$z\times z'=rr'[\cos(\theta+\theta')+i\sin(\theta+\theta')]$

Donc,
$|z\times z'|=r\times r'$ et $arg(z\times z')=arg\, z+arg\, z'+2k\pi$

$z \in \mathbb{C}^*$. $z' \in \mathbb{C}^*$. $z=re^{i\theta}$ $z'=r'e^{i\theta'}$

$\boxed{|z\times z'|=r\times r'}$ et $\boxed{arg(z\times z')=arg\, z+arg\, z'+2k\pi}$

$\boxed{(re^{i\theta})\times(r'e^{i\theta'})=rr'e^{i(\theta+\theta')}}$

<u>Cas particuliers :</u>
$z'=\lambda$ nombre réel non nul ; $z=re^{i\theta}$

- Si $\lambda>0$ alors $\lambda=\lambda e^{i0}$ $arg\,\lambda=0+2k\pi$
  $z\times z'=\lambda re^{i\theta}$
- Si $\lambda>0$ alors $\lambda=-\lambda e^{i\pi}$ $arg\,\lambda=\pi+2k\pi$
  $z\times z'=-\lambda re^{i(\theta+\pi)}$

$M(z)$ et $M_1(\lambda z)$
$\overrightarrow{OM_1}=\lambda\overrightarrow{OM}$
M_1 est **l'image** de M dans **l'homothétie** de **centre** O et de **rapport** λ .

z' est un nombre complexe de module 1.

$z'=u=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha}=\cos\alpha+i\sin\alpha$
$z\times z'=re^{\mathrm{i}(\theta+\alpha)}$
M_1 est **l'image** de M dans **la rotation** de **centre** O et de **d'angle** α .

4.4. Inverse d'un nombre complexe non nul

$z \in \mathbb{C}^*$. $z=re^{i\theta}$
$\frac{1}{z}=\frac{\bar{z}}{|z|^2}$, or $|z|^2=r^2$ et $\bar{z}=re^{-i\theta}$

Donc, $\frac{1}{z}=\frac{r e^{-i\theta}}{r^2}=\frac{1}{r}e^{-i\theta}$

Donc, $arg\frac{1}{z}=-arg\, z+2k\pi$

$z\in\mathbb{C}^*$. $z=r e^{i\theta}$

$\boxed{\left|\frac{1}{z}\right|=\frac{1}{r}}$ et $\boxed{arg\frac{1}{z}=-arg\, z+2k\pi}$

$\boxed{\frac{1}{z}=\frac{1}{r}e^{-i\theta}}$

4.5. Quotients de deux nombres complexes non nuls

$z\in\mathbb{C}^*$. $\quad z=r e^{i\theta}$
$z'\in\mathbb{C}^*$. $\quad z'=r' e^{i\theta'}$

$\frac{z}{z'}=z\times\frac{1}{z'}$

$arg\left(\frac{z}{z'}\right)=arg(z)+arg\left(\frac{1}{z'}\right)+2k\pi$

$arg\left(\frac{z}{z'}\right)=arg(z)-arg(z')+2k\pi$

$z\in\mathbb{C}^*$. $z=r e^{i\theta}$ et $z'\in\mathbb{C}^*$. $\quad z'=r' e^{i\theta'}$

$\boxed{\left|\frac{z}{z'}\right|=\frac{|z|}{|z'|}}$ et $\boxed{arg\left(\frac{z}{z'}\right)=arg(z)-arg(z')+2k\pi}$

$\boxed{\frac{z}{z'}=\frac{r}{r'}e^{i(\theta-\theta')}}$

4.6. Formules d'Euler

$e^{i\theta}=\cos\theta+i\sin\theta$ et $e^{-i\theta}=\cos\theta-i\sin\theta$

$\cos\theta=\frac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2}$ et $\sin\theta=\frac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{2i}$

5. Compléments

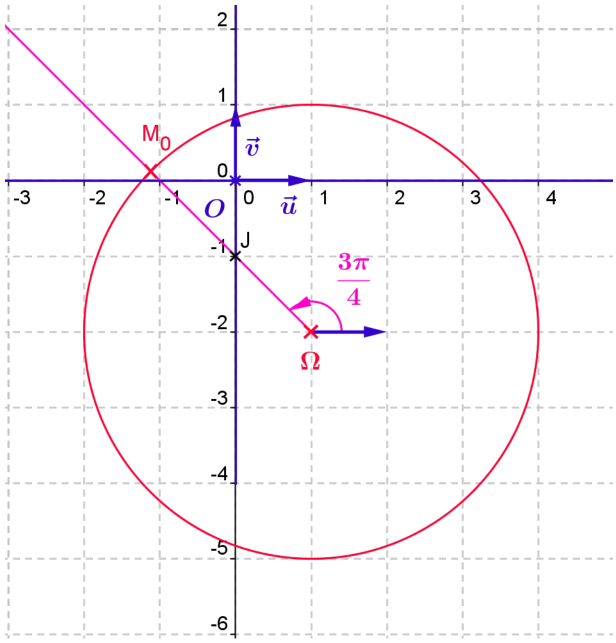
5.1. Caractérisation d'un cercle dans le plan complexe

Ω est un point du plan complexe d'affixe ω .
r est un nombre réel strictement positif.
M est un point du plan complexe d'affixe z .
$(\mathscr{C})$ est le cercle de centre Ω et de rayon r .
$M\in(\mathscr{C})\Leftrightarrow z=\omega+re^{i\theta}$ avec $\theta\in\mathbb{R}$

Démonstration :
$M\in(\mathscr{C})\Leftrightarrow \omega M=r\Leftrightarrow |z-\omega|=r$
Soit $\theta=arg(z-\omega)+2k\pi$
$M\in(\mathscr{C})\Leftrightarrow |z-\omega|e^{i\theta}=re^{i\theta}$
Or, $|z-\omega|e^{i\theta}=z-\omega$

$M\in(\mathscr{C})\Leftrightarrow z-\omega=re^{i\theta}$
$M\in(\mathscr{C})\Leftrightarrow z=\omega+re^{i\theta}$

Exemple :
$\Omega(1-2i)$ $\quad r=3$
$M\in(\mathscr{C})\Leftrightarrow z=1-2i+3e^{i\theta}$ avec $\theta\in\mathbb{R}$



Pour $\theta=\frac{3\pi}{4}$, on obtient le point M_0 du cercle $(\mathscr{C})$.

$z_0=1-2i+3^{i\frac{3\pi}{4}}$
Or, $e^{i\frac{3\pi}{4}}=\cos\frac{3\pi}{4}+i\sin\frac{3\pi}{4}=-\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}$
$z_0=1-\frac{3\sqrt{2}}{2}+i\left(-2+\frac{3\sqrt{2}}{2}\right)$

5.2. Interprétation géométrique du rapport $\dfrac{z-z_B}{z-z_A}$

a) A et B sont deux points distincts fixés du plan complexe : $A(z_A)$; $B(z_B)$.
Soit $M(z)$ un point quelconque du plan complexe.
Si $M\neq A$ alors $\overrightarrow{AM}(z-z_A)$ et $AM=|z-z_A|$ et $arg(z-z_A)=(\vec{u};\overrightarrow{AM})+2k\pi$.
Si $M\neq B$ alors $\overrightarrow{BM}(z-z_B)$ et $AM=|z-z_B|$ et $arg(z-z_B)=(\vec{u};\overrightarrow{BM})+2k\pi$.

Si $z\neq z_A$ (c'est à dire $M\neq A$)alors on considère le rapport $Z=\dfrac{z-z_B}{z-z_A}$.

$$|Z|=\frac{|z-z_B|}{|z-z_A|}=\frac{BM}{AM}$$

Si $z\neq z_A$ et $z\neq z_B$ (c'est à dire $M\neq A$ et $M\neq B$)alors

$$arg(Z)=arg\left(\frac{z-z_B}{z-z_A}\right)+2k\pi$$
$$arg(Z)=arg(z-z_B)-arg(z-z_A)+2k\pi$$
$$arg(Z)=(\vec{u};\overrightarrow{BM})-(\vec{u};\overrightarrow{AM})+2k\pi$$
$$arg(Z)=(\overrightarrow{AM};\vec{u})+(\vec{u};\overrightarrow{BM})+2k\pi$$
$$arg(Z)=(\overrightarrow{AM};\overrightarrow{BM})+2k\pi$$

$$\boxed{arg\left(\frac{z-z_B}{z-z_A}\right)=(\overrightarrow{AM};\overrightarrow{BM})+2k\pi}$$

b) Déterminer le point M du plan complexe tel que : $\dfrac{z-z_B}{z-z_A}=\dfrac{1}{2}+i\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

$\left|\dfrac{1}{2}+\mathrm{i}\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right|=1$ et $arg\left(\dfrac{1}{2}+\mathrm{i}\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)=\dfrac{\pi}{3}+2k\pi$.

$$\frac{z-z_B}{z-z_A}=\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\Leftrightarrow\begin{cases}\left|\dfrac{z-z_B}{z-z_A}\right|=\left|\dfrac{1}{2}+\mathrm{i}\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right|(1)\\ \arg\left(\dfrac{z-z_B}{z-z_A}\right)=\arg\left(\dfrac{1}{2}+\mathrm{i}\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)+2k\pi(2)\end{cases}$$

$(1)\Leftrightarrow\dfrac{MB}{MA}=1\Leftrightarrow MB=MA$

$(2)\Leftrightarrow(\overrightarrow{AM};\overrightarrow{BM})=\dfrac{\pi}{3}+2k\pi$

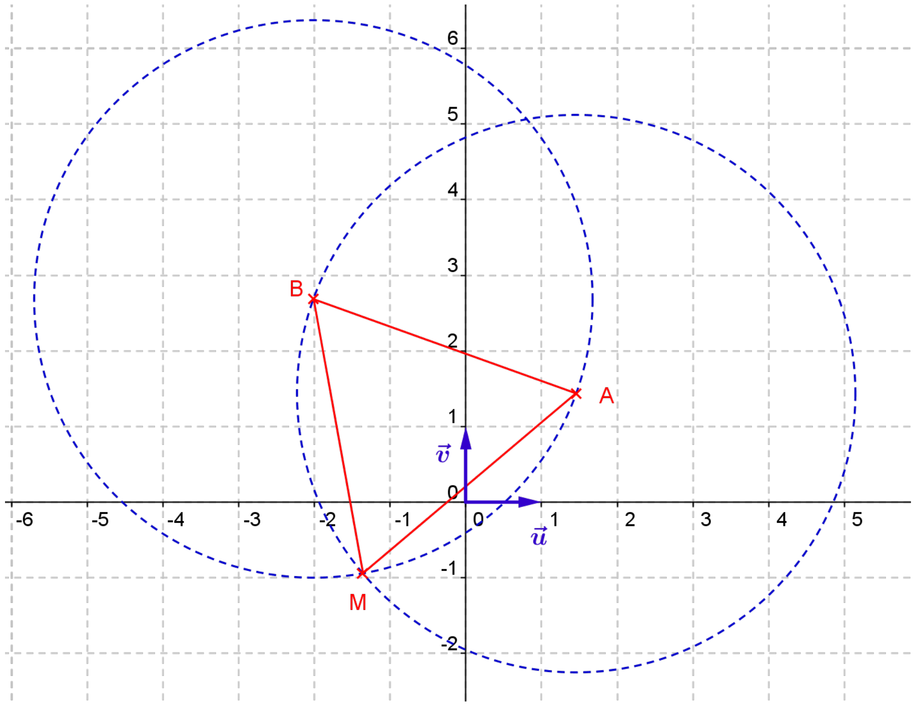
<u>Remarque :</u>

$$(\overrightarrow{AM};\overrightarrow{BM})=(\overrightarrow{AM};\overrightarrow{MA})+(\overrightarrow{MA};\overrightarrow{MB})+(\overrightarrow{MB};\overrightarrow{BM})+2k\pi$$
$$(\overrightarrow{AM};\overrightarrow{BM})=\pi+(\overrightarrow{MA};\overrightarrow{MB})+\pi+2k\pi$$
$$(\overrightarrow{AM};\overrightarrow{BM})=(\overrightarrow{MA};\overrightarrow{MB})+2k\pi$$

Donc, $\dfrac{z-z_B}{z-z_A}=\dfrac{1}{2}+i\dfrac{\sqrt{3}}{2}\Leftrightarrow\begin{cases}MB=MA\\(\overrightarrow{MA};\overrightarrow{MB})=\dfrac{\pi}{3}+2k\pi\end{cases}$

Le triangle ABM est un triangle équilatéral direct (c'est à dire ABM dans le sens trigonométrique).

Pour la figure : A et B donnés, on construit les cercles de centre A et passant par B et de centre B et passant par A, et on choisit le triangle équilatéral direct.



c) Déterminer le point M du plan complexe tel que : $\frac{z-z_B}{z-z_A}=i$

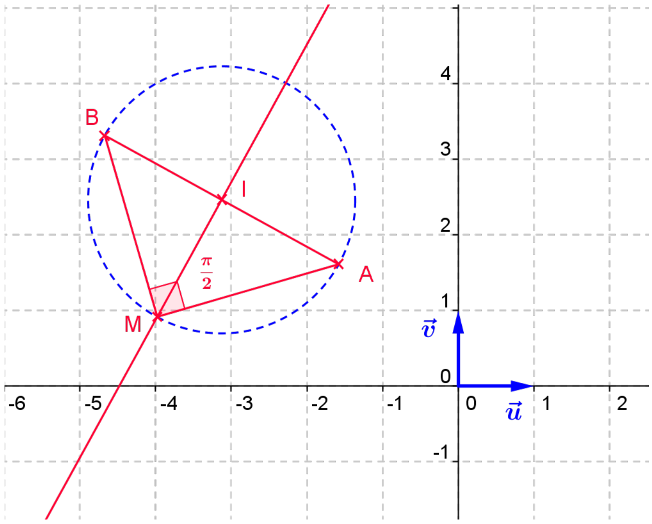
$|i|=1$ et $arg(i)=\frac{\pi}{2}+2k\pi$.

$$\frac{z-z_B}{z-z_A}=i \Leftrightarrow \begin{cases} \left|\frac{z-z_B}{z-z_A}\right|=1\,(1) \\ \arg\left(\frac{z-z_B}{z-z_A}\right)=\arg(i)+2k\pi\,(2) \end{cases}$$

$(1)\Leftrightarrow \frac{MB}{MA}=1 \Leftrightarrow MB=MA$
$(2)\Leftrightarrow (\overrightarrow{AM};\overrightarrow{BM})=\frac{\pi}{2}+2k\pi$
$\Leftrightarrow (\overrightarrow{MA};\overrightarrow{MB})=\frac{\pi}{2}+2k\pi$

Donc, $\frac{z-z_B}{z-z_A}=i \Leftrightarrow \begin{cases} MB=MA \\ (\overrightarrow{MA};\overrightarrow{MB})=\frac{\pi}{2}+2k\pi \end{cases}$
Le triangle ABM est un triangle rectangle isocèle direct en M.

Pour la figure : A et B donnés, on construit le cercle de diamètre [AB] et la médiatrice de [AB] et on choisit le triangle rectangle isocèle direct.



5.3. Formule de Moivre

- **Théorème**

> Pour tout entier naturel n , non nul et pour tout nombre réel θ , on a :
> $\boxed{(e^{i\theta})^n = e^{in\theta}}$ ou $\boxed{(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos n\theta + i\sin n\theta}$

On veut démontrer en utilisant un raisonnement par récurrence que pour tout entier naturel n non nul que $(e^{i\theta})^n = e^{in\theta}$

<u>Initialisation</u>
$(e^{i\theta})^1 = e^{i\theta}$ et $e^{i1\theta} = e^{i\theta}$
Donc, la propriété est vérifiée pour $n=1$
<u>Hérédité :</u>
Pour démontrer que la propriété est héréditaire pour tout entier naturel non nul n on suppose que $(e^{i\theta})^n = e^{in\theta}$ et on doit démontrer que $(e^{i\theta})^{n+1} = e^{i(n+1)\theta}$
Or $(e^{i\theta})^{n+1} = (e^{i\theta})^n \times e^{i\theta} = (e^{i\theta})^n = e^{in\theta} \times e^{i\theta} = e^{in\theta + i\theta} = e^{i(n+1)\theta}$
<u>Conclusion :</u>
Le principe de récurrence nous permet d'affirmer que pour tout entier naturel non nul n on a $(e^{i\theta})^n = e^{in\theta}$.
Donc $(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos n\theta + i\sin n\theta$

- On convient que $(\cos\theta + i\sin\theta)^0 = (e^{i\theta})^0 = 1$ or $\cos 0\times\theta + i\sin 0\times\theta = e^{i0\times\theta} = 1$
donc $(\cos\theta + i\sin\theta)^0 = (e^{i\theta})^0 = \cos 0\times\theta + i\sin 0\times\theta = e^{i0\times\theta}$
- $(e^{i\theta})^{-1} = (\frac{1}{e^{i\theta}}) = e^{-i\theta}$ ou $(\cos\theta + i\sin\theta)^{-1} = \frac{1}{\cos\theta + i\sin\theta} = \frac{\cos\theta - i\sin\theta}{\cos^2\theta + \sin^2\theta} = \cos\theta - i\sin\theta$
L'inverse d'un nombre complexe de module 1 est égal à son conjugué.

5.4. Racines n ième de l'unité

- <u>Définition</u>

n est un entier naturel supérieur ou égal à 2.

On nomme racine $n^{\text{ième}}$ de l'unité tout nombre complexe z solution de l'équation $z^n = 1$.
- <u>Théorème</u>
Pour tout entier naturel supérieur ou égal à 2, il existe n racines $n^{\text{ième}}$ de l'unité notées : $\omega_0 = 1$; $\omega_1 = e^{i\frac{2\pi}{n}}$; $\omega_2 = e^{i\frac{4\pi}{n}}$; ... ; $\omega_p = e^{i\frac{2p\pi}{n}}$; ... ; $\omega_{n-1} = e^{i\frac{2(n-1)\pi}{n}}$.

Preuve

$z^n=1$.

Pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 2, $0^n=0$ donc 0 n'est pas une racine $n^{\text{ième}}$ de l'unité.

Pour tout z tel que $z^n=1$ alors $|z|^n=|1|=1$ donc $|z|=1$.

arg z= $\theta + 2k\pi$ k est un entier relatif donc $z=e^{i\theta}$

arg $z^n = n\theta + 2k\pi$ arg 1 = $0 + 2k\pi$

$z^n=1 \quad \Leftrightarrow \quad n\theta = 0 + 2k\pi \quad \Leftrightarrow \quad \theta=\frac{2k\pi}{n}$.

Il existe n valeurs distinctes possibles modulo 2π de k pour les arguments des racines $n^{\text{ième}}$ de l'unité : $k=0;\ k=1;\ldots k=p;\ldots k=n-1$

1 admet n racines $n^{\text{ième}}$ distinctes : $\omega_0=1;\ \omega_1=e^{i\frac{2\pi}{n}};\ \omega_2=e^{i\frac{4\pi}{n}};\ldots\omega_p=e^{i\frac{2p\Pi}{n}};\ldots\omega_{n-1}=e^{i\frac{2(n-1)\pi}{n}}$.

On remarque pour $0\leqslant p\leqslant n-1$ on a : $\omega_p=\omega_1{}^p$.

$\omega_1=e^{i\frac{2\pi}{n}}$ est la racine $n^{\text{ième}}$ primaire de l'unité.

. Somme des racines $n^{\text{ième}}$ de l'unité

La somme des racines $n^{\text{ième}}$ de l'unité est nulle.

Preuve

Pour tout entier naturel supérieur ou égal à 2, on doit calculer $\sum_{p=0}^{n-1}\omega_p=\sum_{p=0}^{n-1}\omega_1{}^p$.

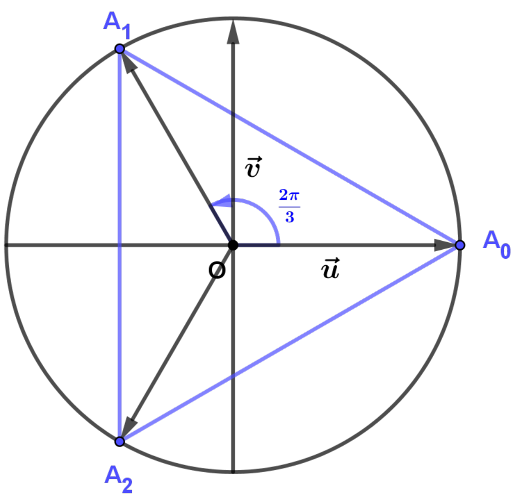
Or $\omega_1{}^n=1 \quad \Leftrightarrow \quad \omega_1{}^n-1=0 \quad \Leftrightarrow \quad (\omega_1-1)(\omega_1{}^{n-1}++\omega_1{}^p+\ldots+\omega_1+1)=0 \quad \Leftrightarrow \quad (\omega_1-1)\sum_{p=0}^{n-1}\omega_1{}^p=0$.

$\omega_1=e^{i\frac{2\pi}{n}}\neq 1$ car $n>1$ donc $\sum_{p=0}^{n-1}\omega_1{}^p=0$.

. Interprétation graphique

On note A_p le point d'affixe $\omega_p=\omega_1{}^p$. Les n points A_p sont les sommets d'un polygone régulier à n côtés inscrit dans un cercle de rayon 1.

. $n=3$



$A_0A_1A_2$ est un triangle équilatéral.

On note j la racine cubique primaire de l'unité.

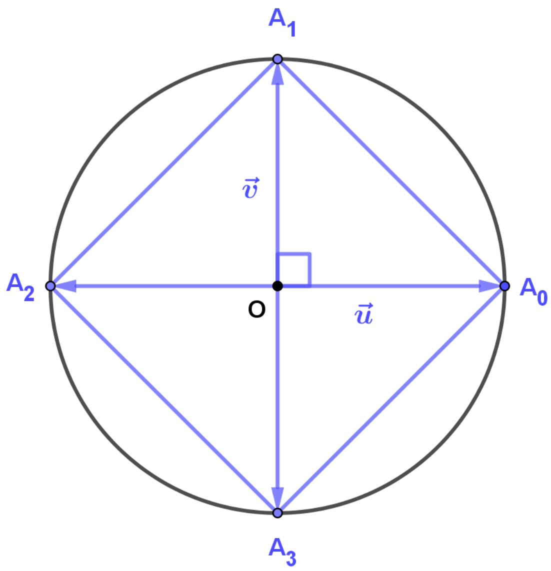
$$j=\omega_1=e^{i\frac{2\pi}{3}}=\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right)+i\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right)=-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$j^2=\omega_2=e^{i\frac{4\pi}{3}}=\cos\left(\frac{4\pi}{3}\right)+i\sin\left(\frac{4\pi}{3}\right)=-\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}$

On a : $1+j+j^2=0 \qquad j+j^2=-1 \qquad \bar{j}=j^2$

$\overrightarrow{OA_0}+\overrightarrow{OA_1}+\overrightarrow{OA_2}=\vec{0}$

. $n=4$



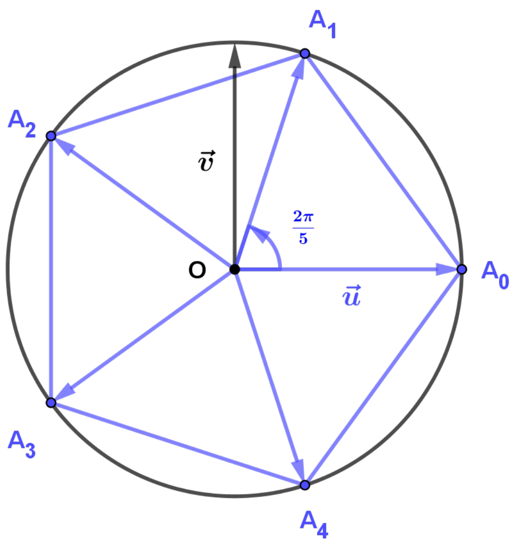
$A_0A_1A_2A_3$ est un carré.

$\omega_0=1;\ \omega_1=i;\ \omega_2=-1$ et $\omega_3=-i$

$1+i-1-i=0$

$\overrightarrow{OA_0}+\overrightarrow{OA_1}+\overrightarrow{OA_2}+\overrightarrow{OA_3}=\vec{0}$

. $n=5$



$A_oA_1A_2A_3A_4$ est un pentagone régulier

$\omega_1=e^{i\frac{2\pi}{5}}=\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)+i\sin\left(\frac{2\pi}{5}\right)$

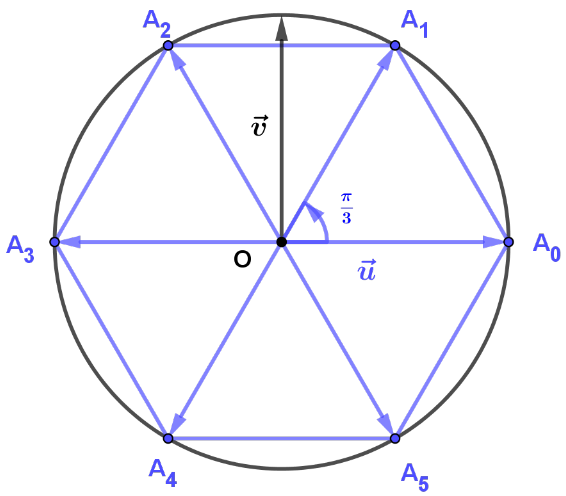
$\omega_2=e^{i\frac{4\pi}{5}}=\cos\left(\frac{4\pi}{5}\right)+i\sin\left(\frac{4\pi}{5}\right)$

$\omega_3=\bar{\omega}_2 \qquad \omega_4=\bar{\omega}_1$

$\overrightarrow{OA_0}+\overrightarrow{OA_1}+\overrightarrow{OA_3}+\overrightarrow{OA_4}=0$

$\omega_0+\omega_1+\omega_2+\omega_3+\omega_4=0$

. $n=6$



$A_0A_1A_2A83\ A_4A_5$ est un hexagone régulier.

$\omega_0=1$

$\omega_1=e^{i\frac{2\pi}{6}}=e^{i\frac{\pi}{3}}=\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)=\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}$

$\omega_2=e^{i\frac{2\pi}{3}}=\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right)+i\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right)=-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}$

$\omega_3=-1$

$\omega_4=e^{i\frac{4\pi}{3}}=\cos\left(\frac{4\pi}{3}\right)+i\sin\left(\frac{4\pi}{3}\right)=-\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}$

$\omega_5=e^{i\frac{5\pi}{3}}=\cos\left(\frac{5\pi}{3}\right)+i\sin\left(\frac{5\pi}{3}\right)=\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}$

$\omega_4=\overline{\omega}_2 \qquad \omega_5=\overline{\omega}_1$

$\omega_0+\omega_1+\omega_2+\omega_3+\omega_4+\omega_5=0$

$\overrightarrow{OA_0}+\overrightarrow{OA_1}+\overrightarrow{OA_2}+\overrightarrow{OA_3}+\overrightarrow{OA_4}+\overrightarrow{OA_4}=\vec{0}$

. On remarque, si u est un nombre pair alors 1 et -1 sont des racines $n^{\text{ième}}$ de l'unité, et si n est un nombre impair alors 1 est l'unique racine $n^{\text{ième}}$ réelle de l'unité donc il existe un nombre pair de racines $n^{\text{ième}}$ de l'unité complexes non réelles et ces racines sont conjuguées deux à deux.

Si $0<p<n$ et $n\neq 2p$ alors ω_p et ω_{n-p} sont des nombres complexes conjugués car :

$\frac{2(n-p)\pi}{n}=-\frac{-2p\pi}{n}+2\pi$

<u>Exemple : n=17</u>

ω_1 et ω_{16} sont deux nombres conjugués et $\omega_1+\omega_{16}=2\cos\left(\frac{2\pi}{17}\right)$.

De même $\omega_2+\omega_{15}=2\cos\left(\frac{4\pi}{17}\right)$ . . .