Similitudes planes

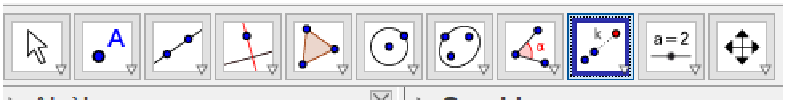
1. Introduction

Nous avons étudié dans la leçon précédente les applications qui conservent les distances et l'orthogonalité : les isométries.
Nous proposons d'étudier les applications qui conservent l'orthogonalité (et non nécessairement les distances).
Nous commencerons à étudier les propriétés des homothéties (en utilisant le logiciel géogébra).
Puis nous étudierons les composées des homothéties et des isométries (ces applications sont les similitudes planes).

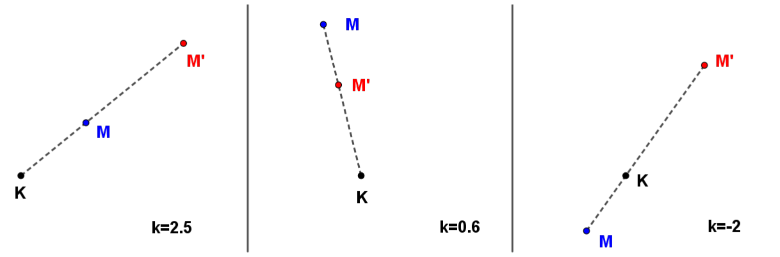
2. Homothéties

2.1. Définition

k est un nombre réel, **non nul**, fixé.
K est un point du plan fixé.
L'application H de P vers P qui au point M associe le point M' tel que $\overrightarrow{KM'}=k.\overrightarrow{KM}$ se nomme homothétie de centre K et de rapport k.
<u>Utilisation de géogébra</u>



L'icône encadrée en bleu est l'icône de l'homothétie.
L'icône de l'homothétie étant encadrée en bleu, on pointe le point M puis le point K et on précise la valeur de k et on obtient M'.

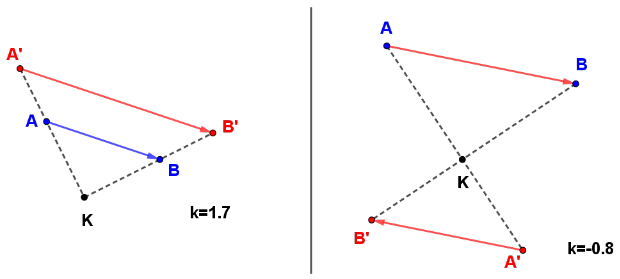


<u>Remarques</u>

- $\overrightarrow{KM'}=k.\overrightarrow{KM}$ les vecteurs $\overrightarrow{KM'}$ et $\overrightarrow{KM}$ sont colinéaires donc les points K, M et M' sont alignés.
- $\overrightarrow{KM'}=k.\overrightarrow{KM} \Leftrightarrow \overrightarrow{KM}=\frac{1}{k}.\overrightarrow{KM'}$, M est l'image de M' par l'homothétie de centre K et de rapp ort $\frac{1}{k}$ donc H est une transformation du plan.

2.2. Image d'un bipoint

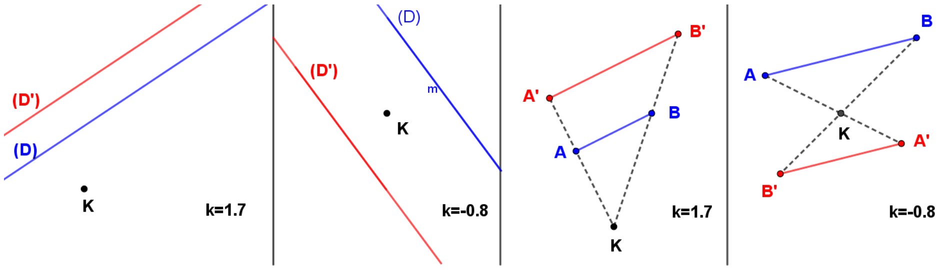
H est l'homothétie de centre K et de rapport k.
On place les points A et B puis on construit A' et B'.



$\overrightarrow{KA'}=k.\overrightarrow{KA}$ $\quad\overrightarrow{KB'}=k.\overrightarrow{KB}$
$\overrightarrow{A'B'}=\overrightarrow{A'K}+\overrightarrow{KB'}=k.\overrightarrow{AK}+k.\overrightarrow{KB}=k;(\overrightarrow{AK}+\overrightarrow{KB})=k.\overrightarrow{AB}$
<u>Conséquence :</u>
$\overrightarrow{A'B'}=k.\overrightarrow{AB}$

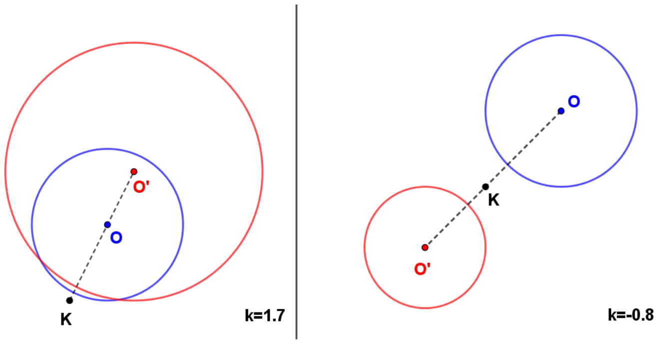
2.3. Image d'une droite et image d'un segment

L'image d'une droite par une homothétie est une droite parallèle.
L'image du segment [AB] est le segment [A'B'], les droites (AB) et (A'B') sont parallèles et :
si $k>0$ alors $A'B'=k\times AB$
si $k<0$ alors $A'B'=-k\times AB$
ou $A'B'=|k|\times AB$



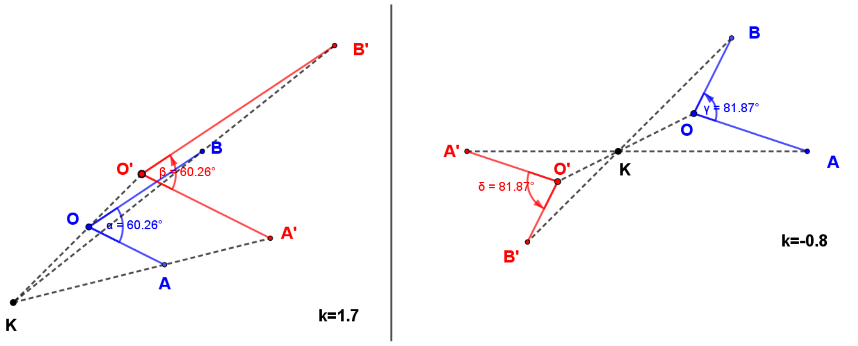
2.4. Image d'un cercle

L'image du cercle de centre O et de rayon r par une homothétie H et le cercle de centre H(O)=O' et de rayon $|k|r$.



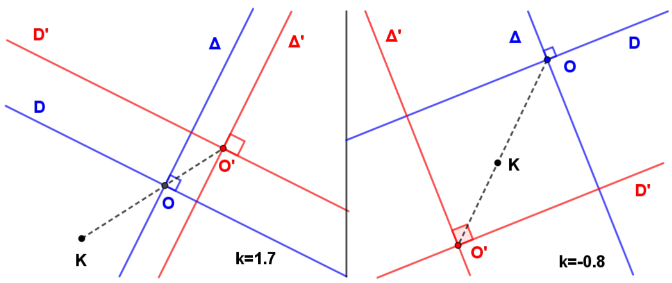
2.5. Image d'un angle orienté

L'image d'un angle orienté par une homothétie H est un angle orienté de même mesure.

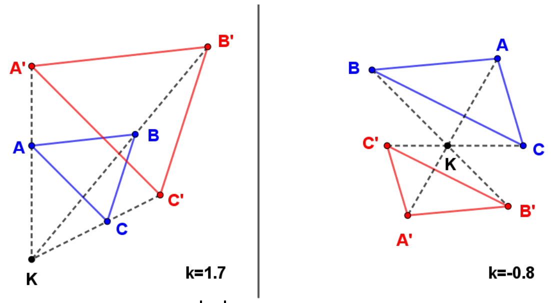


Conséquence

Si deux droites (D) et (Δ) sont perpendiculaires alors les droites (D') et (Δ') sont perpendiculaires.
On dit qu'une homothétie **conserve l'orthogonalité.**



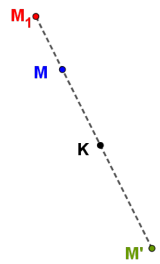
2.6. Image d'un triangle



$A'B'=|k|\times AB$ $A'C'=|k|\times AC$ $B'C'=|k|\times BC$
$\widehat{B'A'C'}=\widehat{BAC}$ $\widehat{A'B'C'}=\widehat{ABC}$ $\widehat{A'C'B'}=\widehat{ACB}$
L'image d'un triangle par une homothétie est **un triangle semblable.**

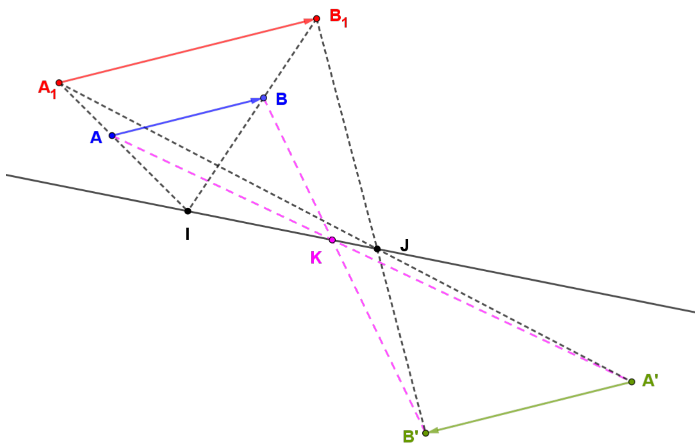
2.8. Composée de deux homothéties

2.8.a. Composée de deux homothéties de même centre
H est l'homothétie de centre K et de rapport k (non nul et égal à 1,7 pour le dessin).
H' est l'homothétie de centre K et de rapport k'(non nul et égal à -0,8 pour le dessin).
On considère l'application $F=H'oH$.



Pour tout point M du plan, $H(M)=M_1$ et $H'(M_1)=M'$ donc $\overrightarrow{KM_1}=k.\overrightarrow{KM}$ et $\overrightarrow{KM'}=k'.\overrightarrow{KM_1}$.
Conséquence : $\overrightarrow{KM'}=k'\times k.\overrightarrow{KM}$
$k\times k'\neq 0$ donc M' est l'image de M par l'homothétie de centre K et de rapport $k\times k'$.
<u>Conclusion</u>
F est l'homothétie de centre K et de rapport $k\times k'$.
<u>Cas particulier</u>
Si $k\times k'=1$ alors pour tout point M du plan $\overrightarrow{KM'}=\overrightarrow{KM}$ et $M'=M$.
F est l'application identique et $H'=H^{-1}$.

3.8.b. Composée de deux homothéties de centres distincts
. Exemple 1
H est l'homothétie de centre I et de rapport k (non nul égal à 1,7 sur le dessin).
H' est l'homothétie de centre J $(I\neq J)$ et de rapport k' (non nul égal à -0,8 sur le dessin).
On considère l'application $F=H'oH$



Soient A et B deux points distincts du plan.

$H(A)=A_1 \quad H'(A_1)=A'$ donc $F(A)=A'$

$H(B)=B_1 \quad H'(B_1)=B'$ donc $F(B)=B'$.

On a : $\overrightarrow{A_1B_1}=1{,}7.\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{A'B'}=-0{,}8.\overrightarrow{A_1B_1}$ donc $\overrightarrow{A'B'}=-1{,}7\times 0{,}8.\overrightarrow{AB}$

$\overrightarrow{A'B'}=-1{,}36.\overrightarrow{AB}$

Si F est une homothétie alors son rapport est -1,36.

Si K est son centre alors les points K, A et A' sont alignés de même les points K, B et B' sont alignés.

Donc K est le point d'intersection des droites (AA') et (BB').

<u>Remarque</u>

Il est possible que les droites (AA') et (BB') soient confondues.

On choisit A au hasard et on construit A', si A'=A alors A=K sinon on choisit un point B n'appartenant pas à (AA').

<u>Conjectures</u>

F est l'homothétie de centre K et de rapport -1,36.

Le point K appartient à la droite (IJ).

<u>Démonstration des conjectures</u>

Pour tout point M du plan.

F(M)=M' et $\overrightarrow{A'M'}=-1{,}36.\overrightarrow{AM}$.

A' est l'image de A par l'homothétie de centre K et de rapport -1,36. On note M'' l'image de M par cette homothétie donc $\overrightarrow{A'M''}=-1{,}36.\overrightarrow{AM}$.

conséquence : $M'=M''$ et F est l'homothétie de centre K et de rapport -1,36.

F(I)=H'(I)=I' donc les points J, I et I' sont alignés de même les points K, I et I' sont alignés.

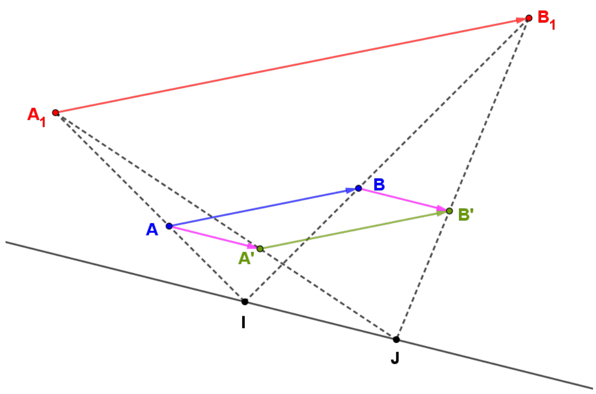
Conséquence : K appartient à la droite (IJ).

. Exemple 2

H est l'homothétie de centre I et de rapport k (non nul égal à 2,5 pour les dessin) ;

H' est l'homothétie de centre J $(I\neq J)$ et de rapport k (non nul égal à 0,4 pour le dessin).

On considère l'application $F=H'oH$.



Soit A et B deux points distincts du plan.

$H(A)=A_1 \quad H'(A_1)=A'$ donc $F(A)=A'$

$H(B)=B_1 \quad H'(B_1)=B'$ donc $F(B)=B'$.

On a : $\overrightarrow{A_1B_1}=2{,}5.\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{A'B'}=0{,}4.\overrightarrow{A_1B_1}$

$\overrightarrow{A'B'}=0{,}4\times 2{,}5.\overrightarrow{AB}$ soit $\overrightarrow{A_1B_1}=\overrightarrow{AB}$.

Si F est une homothétie son rapport est égal à 1, or une homothétie de rapport 1 est l'application identique.

F n'est pas l'application identique donc F n'est pas une homothétie.

$\overrightarrow{A'B'}=\overrightarrow{AB}$ donc le quadrilatère AB'BA est un parallélogramme et $\overrightarrow{AA'}=\overrightarrow{BB'}$.

<u>Conjectures</u>

F est une translation de vecteur $\vec{V}=\overrightarrow{AA'}$.

$\vec{V}$ est un vecteur directeur de la droite (IJ).

<u>Démonstration des conjectures</u>

Pour tout point M du plan $F(M)=M'$ et $\overrightarrow{A'M'}=\overrightarrow{AM}$ donc $\overrightarrow{MM'}=\overrightarrow{AA'}$.

L'image du point M par la translation de vecteur $\vec{V}=\overrightarrow{AA'}$ est le point M'' tel que $\overrightarrow{MM''}=\overrightarrow{AA'}$.
Conséquence : $M'=M''$ et F est la translation de vecteur $\overrightarrow{AA'}$.
$F(I)=I'$ $\quad H'oH(I)=H'(I)=I'$ donc $\overrightarrow{JI'}=0{,}4.\overrightarrow{JI}$.
$\overrightarrow{JI}+\overrightarrow{II'}=0{,}4.\overrightarrow{JI}$ $\Leftrightarrow$ $\overrightarrow{II'}=-0{,}6.\overrightarrow{JI}=0{,}6.\overrightarrow{IJ}$.
Donc $\vec{V}=\overrightarrow{II'}$ est un vecteur directeur de la droite (IJ).

. Cas général

H est l'homothétie de centre I et de rapport k (non nul).
H' est l'homothétie de centre J $(I\neq J)$ et de rapport k' (non nul).
On considère l'application $F=H'oH$.

Premier cas

Si $k\times k'\neq 1$ alors F est une homothétie de rapport $k\times k'$.
Pour déterminer géométriquement son centre K. On choisit au hasard un point A, on construit A_1 puis A' et si A'=A alors A=K sinon on choisit un point B n'appartenant pas à la droite (AA') et on construit B_1 puis B'. K est alors le point d'intersection des droites (AA') et (BB').

Deuxième cas

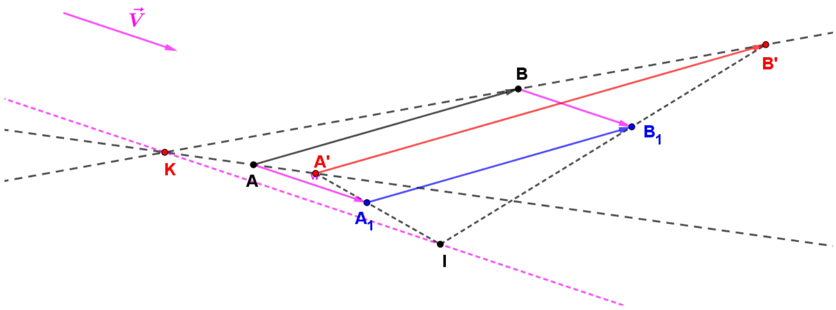
Si $k\times k'=1$ alors F est une translation.
Pour déterminer son vecteur $\vec{V}$, il suffit de construire l'image d'un point quelconque du plan.
Le vecteur $\vec{V}$ est colinéaire au vecteur $\overrightarrow{IJ}$.

3. Composée d'une translation et d'une homothétie

H est l'homothétie de centre I et de rapport k $(k\neq 1)$.
t est la translation de vecteur $\vec{V}$ $(\vec{V}\neq\vec{0})$.
On veut déterminer l'application $F=Hot$.

. **Exemple**

On choisit $k=1{,}7$.
A et B sont deux points distincts du plan.
$t(A)=A_1$ $\quad H(A_1)=A'$ donc $F(A)=A'$.
$t(B)=B_1$ $\quad H(B_1)=B'$ donc $F(B)=B'$.
$\overrightarrow{A_1B_1}=\overrightarrow{AB}$ $\quad \overrightarrow{A'B'}=1{,}7.\overrightarrow{AB}$ donc $\overrightarrow{A'B'}=1{,}7.\overrightarrow{AB}$.
Si F est une homothétie alors son rapport est égal à 1,7.
Soit K son centre , dans les points K, A et A' sont alignés et K, B et B' sont alignés.
Si les droites (AA') et (BB') sont sécantes, K est leur point d'intersection.



Conjectures

F est l'homothétie de centre et de rapport 1,7.
Les vecteurs $\overrightarrow{KI}$ et $\vec{V}$ sont colinéaires.

Démonstration des conjectures

Pour tout point M du plan $t(M)=M_1$ et $H(M_1)=M'$ donc $\overrightarrow{A'M'}=1{,}7.\overrightarrow{AM}$
L'image du point M par l'homothétie de centre K et de rapport $1{,}7$ est le point M''.
Or A' est l'image de A par cette homothétie donc $\overrightarrow{A'M''}=1{,}7.\overrightarrow{AM}$.
Conséquence : $\overrightarrow{A'M''}=\overrightarrow{A'M'}$ et $M''=M'$ donc F est l'homothétie de centre K et de rapport : 1,7.
On considère le triangle KB'I .

$H(B_1)=B'$ donc $\overrightarrow{IB'}=1,7.\overrightarrow{IB_1}$
$F(B)=B'$ donc $\overrightarrow{KB'}=1,7.\overrightarrow{KB}$.
Les triangles $KB'I$ et $BB'B_1$ forment une configuration de Thalès.
Donc $\overrightarrow{BB_1}$ et $\overrightarrow{KI}$ sont colinéaires. $(\overrightarrow{KI}=1,7.\overrightarrow{BB_1})$.
Or $\overrightarrow{BB_1}=\vec{V}$ car $t(B)=B_1$
Conséquence :
$\vec{V}$ et $\overrightarrow{KI}$ sont colinéaires.

. Cas général

$F=H\circ t$ et $k\neq 1$
On choisit un point A quelconque du plan puis on construit $t(A)=A_1$ et $H(A_1)=A'$.
Si A'=A alors K=A sinon on choisit un point B n'appartenant pas à la droite (AA') puis on construit $t(B)=B_1$ et $H(B_1)=B'$.
$A'B'=|k|\times AB$ et les droites (AA') et (BB') sont sécantes en K.
On peut démontrer que $\overrightarrow{KI}=k.\vec{V}$.
<u>Conclusion</u>
F est l'homothétie de centre K et de rapport k.
Les vecteurs $\vec{V}$ et $\overrightarrow{KI}$ sont colinéaires.

. Remarque

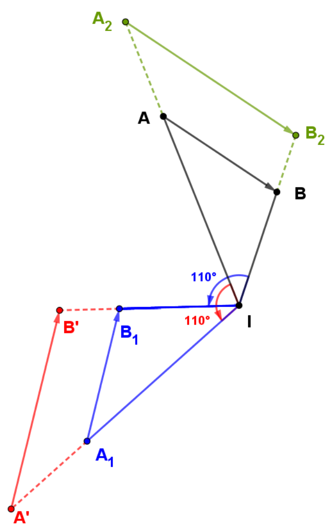
La composée de deux translations est une translation.
La composée d'une translation et d'une homothétie de rapport $k\neq 1$ est une homothétie de rapport k.
La composée de deux homothéties est une homothétie ou une translation.
On dit que la loi de composition des applications est une loi de composition interne dans l'ensemble des homothéties-translations.

4. Composée d'une rotation et d'une homothétie

4.1.Composée d'une rotation et d'une homothétie de même centre

4.1.a. Exemple 1

R est la rotation de centre I et d'angle de mesure 110°.
H est l'homothétie de centre I et de rapport 1,5.
On considère l'application $F=H\circ R$.
Soient A et B deux points distincts du plan.
$R(A)=A_1$ et $H(A_1)=A'$ donc $F(A)=A'$
$R(B)=B_1$ et $H(B_1)=B'$ donc $F(B)=B'$.



$A_1B_1=AB$ et $(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{A_1B_1})=110°$

$\overrightarrow{A'B'}=1{,}5.\overrightarrow{A_1B_1}$ donc $A'B'=1{,}5\times A_1B_1=1{,}5\times AB$ et $(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{A'B'})=110°$ car $1{,}5>0$.

Remarque

$R(A)=A_1$ donc $IA_1=IA$ et $(\overrightarrow{IA};\overrightarrow{IA_1})=110°$ $H(A_1)=A'$ donc $\overrightarrow{IA'}=1{,}5\times\overrightarrow{IA_1}$

$(\overrightarrow{IA};\overrightarrow{IA'})=110°$ et $IA'=1{,}5\times IA$

$H(A)=A_2$ donc $\overrightarrow{IA_2}=1{,}5\overrightarrow{IA}$ $R(A_2)=A''$ donc $(\overrightarrow{IA_2};\overrightarrow{IA''})=110°$ et $IA''=IA_2$

$(\overrightarrow{IA};\overrightarrow{IA''})=110°$ et $IA''=1{,}5\times IA$

Conséquence : $A'=A''$ et $F=H\circ R=R\circ H$.

F est la similitude plane directe de centre I d'angle de mesure 110° et de rapport 1,5.

4.1.b. Exemple 2

R est la rotation de centre I et d'angle de mesure 50°.
H est l'homothétie de centre I et de rapport : -0,6.
On considère l'application $F=H\circ R$.
Or $-0{,}6=-1\times0{,}6$ donc $H=H_1\circ H_2$ avec H_1 homothétie de centre I et de rapport 0,6 et H_2 est l'homothétie de centre I et de rapport -1.
H_2 est la symétrie centrale de centre I donc $H_2=R_2$ rotation de centre I et d'angle de mesure 180°.
$F=H\circ R=H_1\circ H_2\circ R=H_1\circ R_2\circ R$
$R_1=R_2\circ R$ est la rotation de centre I et d'angle de mesure 50°+ 180°-360°=-130°
(car 50°+180°>180°).
$F=H_1\circ R_1$ **est la similitude plane directe de centre I, d'angle de mesure -130° et de rapport 0,6.**

4.2. Composée d'une rotation et d'une homothétie de centres distincts

4.2.a. Exemple 1

R est la rotation de centre I et d'une d'angle de mesure 30°.
H est l'homothétie de centre K et de rapport 2,5.
On considère l'application $F=H\circ R$.

$F(A)=H\circ R(A)=H(A_1)=A'$

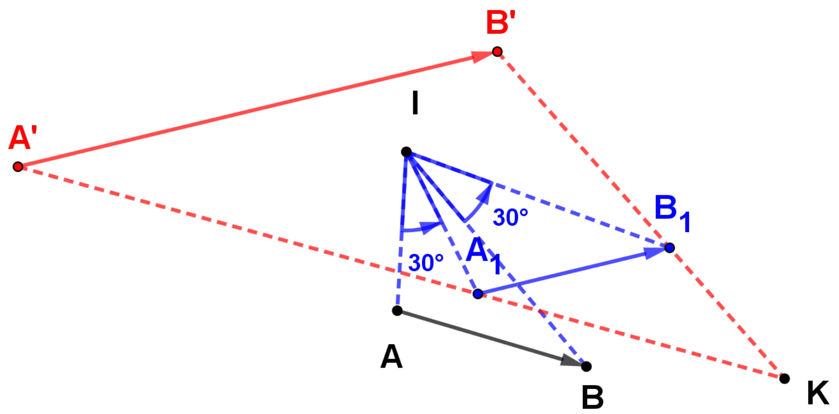
$F(B)=H\circ R(B)=H(B_1)=B'$

$A_1B_1=AB$ $(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{A_1B_1})=30°$

$\overrightarrow{A'B'}=2{,}5\overrightarrow{A_1B_1}$

$A'B'=2{,}5\times A_1B_1=2{,}5\times AB$

$(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{A'B'})=(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{A_1B_1})=30°$.



On admet que $F=H'\circ R'$ avec R' rotation de centre J et d'angle de mesure 30° et H' homothétie de centre J et de rapport 2,5.

$F(J)=H'\circ R'(J)=H'(J)=J$

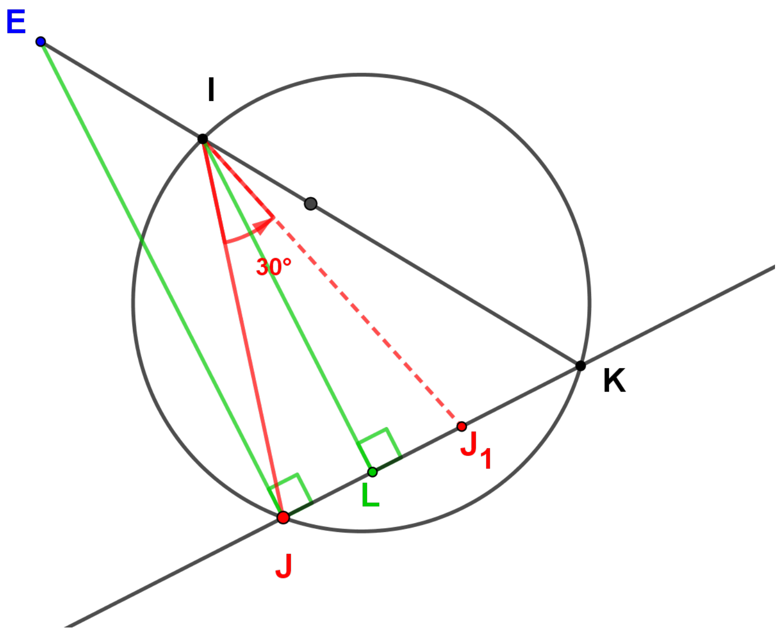
F est la similitude plane directe de centre J, de rapport 2,5 et d'angle de mesure 30°.

Proposition d'une construction du point J.

On construit le point G image de K par la rotation de centre I et d'angle de mesure -30°.
Donc R(G)=K et $H(K)=K$ conséquence : F(G)=K. D'autre part F(J)=J.
Conséquence :
$(\overrightarrow{JG};\overrightarrow{JK})=30°$
Or $(\overrightarrow{IG};\overrightarrow{IK})=30°$
Le point J est un point du cercle circonscrit au triangle IKG : $\widehat{GIK}$ et $\widehat{GJK}$ sont deux angles inscrits dans le cercle précédent, qui interceptent le même arc.

On suppose que le problème est résolu

C'est à dire $R(J)=J_1$ et $H(J_1)=J$ .On nomme L le milieu de $[JJ_1]$.



$KJ=2{,}5\times KJ_1$ donc $JJ_1=1{,}5\times KJ_1$ et $LJ_1=0{,}75\times KJ_1$
Conséquence :
$LK=1{,}75\times KJ_1$ on considère le point E qui est le point d'intersection de la droite (IK) et de la perpendiculaire à (JK) en J.

Les triangles KIL et KEJ forment une configuration de Thalès.

Donc $\frac{KJ}{KL}=\frac{KE}{KI}$ et $\frac{2{,}5\times KJ_1}{1{,}75\times KJ_1}=\frac{KE}{KI}=\frac{2{,}5}{1{,}75}=\frac{1}{0{,}7}=\frac{10}{7}$.

E est l'image de I par l'homothétie de centre K et de rapport : $\frac{10}{7}$.

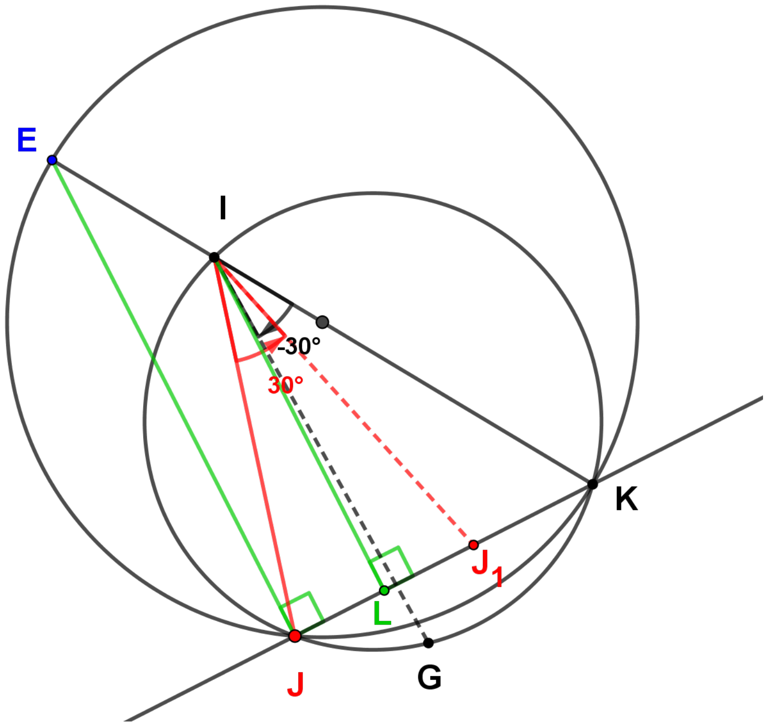
[EK] est un diamètre du cercle circonscrit au triangle EKJ.

Synthèse

On construit le point G image de K par la rotation de centre I et d'angle de mesure -30°.
On trace le cercle circonscrit au triangle IKG.

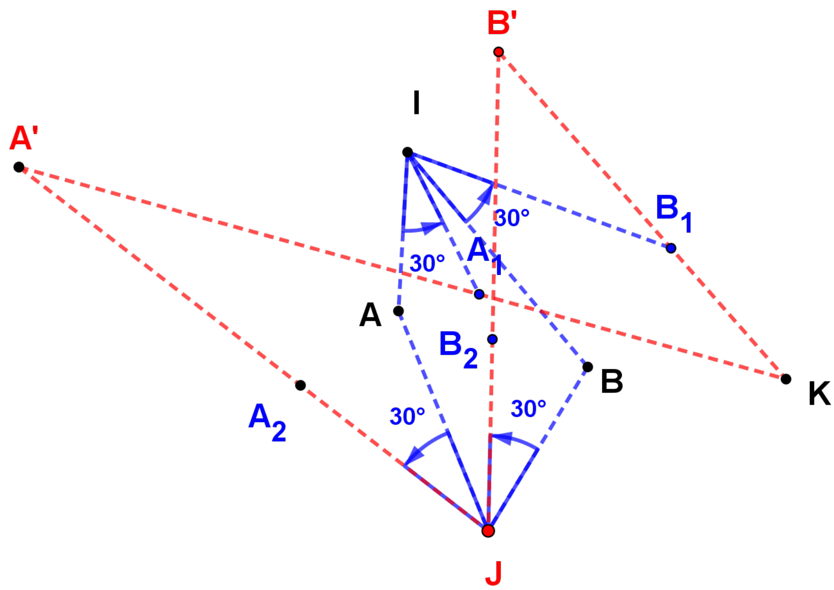
On construit le point E image de I par l'homothétie de centre K et de rapport $\frac{10}{7}$.

On trace le cercle de diamètre [EK].
Les deux cercles sont sécants en K et J.



Remarque
R’ est la rotation de centre J et d’angle de mesure 30°.
H’ est l’homothétie de centre J et de rapport 2,5 .
$F=H'oR'=R'oH'$

On propose une nouvelle construction des points A’ et B’ de la première figure.
$F(A)=H'oR'(A)=H'(A_2)=A'$
$F(B)=H'oR'(B)=H'(B_2)=B'$



4.2.b. Exemple 2
R est la rotation de centre I et d’une d’angle de mesure 130°.
H est l’homothétie de centre K et de rapport 0,4.
On considère l’application $F=HoR$.
$F(A)=HoR(A)=H(A_1)=A'$

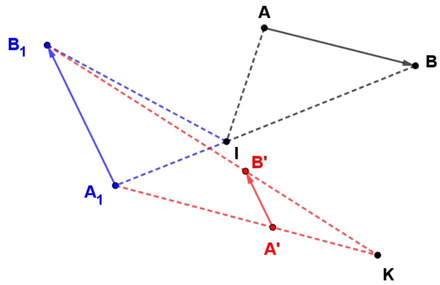
$F(B)=H\circ R(B)=H(B_1)=B'$

$A_1B_1=AB \qquad (\overrightarrow{AB};\overrightarrow{A_1B_1})=130°$

$\overrightarrow{A'B'}=0{,}4\,\overrightarrow{A_1B_1}$

$A'B'=0{,}4\times A_1B_1=0{,}4\times AB$

$(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{A'B'})=(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{A_1B_1})=130°$



On admet que $F=H'\circ R'$ avec R' rotation de centre J et d'angle de mesure 130° et H' homothétie de centre J et de rapport 0,4.

$F(J)=H'\circ R'(J)=H'(J)=J$

F est la similitude plane directe de centre J , de rapport 0,4 et d'angle de mesure 130°.

<u>Proposition d'une construction du point J.</u>

On construit le point G image de K par la rotation de centre I et d'angle de mesure -130°.

Donc R(G)=K et $H(K)=K$ conséquence : F(G)=K. D'autre part F(J)=J.

Conséquence :

$(\overrightarrow{JG};\overrightarrow{JK})=130°$

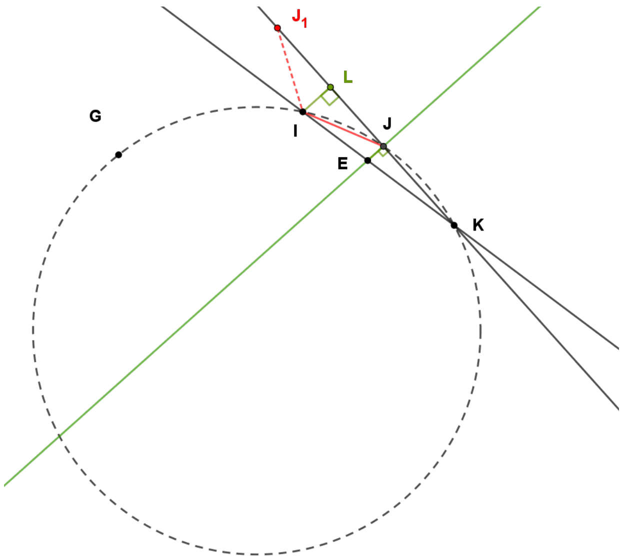
Or $(\overrightarrow{IG};\overrightarrow{IK})=130°$

Le point J est un point du cercle circonscrit au triangle IKG : $\widehat{GJK}$ et $\widehat{GJK}$ sont deux angles inscrits, dans le cercle précédent, qui interceptent le même arc.

<u>On suppose que le problème est résolu</u>

C'est à dire $R(J)=J_1$ et $H(J_1)=J$ .On nomme L le milieu de $[JJ_1]$.

k=0,4<1 donc J appartient à l'intervalle $[KJ_1]$.



$KJ=0{,}4\,KJ_1 \qquad KJ=0{,}4\times(KJ+JJ_1) \qquad 0{,}6\,KJ=0{,}4\,JJ_1 \qquad JJ_1=\frac{0{,}6}{0{,}4}\times FJ=1{,}5\times KJ$

$LJ=\frac{1}{2}\times JJ_1=0{,}75\times KJ$

$LK=KJ+LJ=1{,}75\times KJ$

On considère le point E point d'intersection de la droite (IK) et de la perpendiculaire à la droite (JK) en J.
Les triangles KIL et KEJ forment une configuration de thalès.

$\frac{KJ}{KL}=\frac{KE}{KI}$ et $\frac{KJ}{1,75\times KJ}=\frac{KE}{KI}=\frac{1}{1,75}$ soit $KE=\frac{1}{1,75}\times KI=\frac{4}{7}\times KI$.

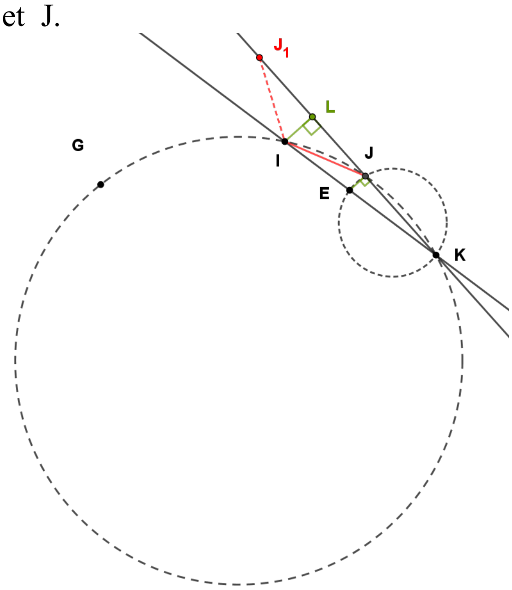
E est l'image de I par l'homothétie de centre K et de rapport : $\frac{4}{7}$.

$[EK]$ est un diamètre du cercle circonscrit au triangle EKJ.

<u>Synthèse</u>
On construit le point G image de K par la rotation de centre I et d'angle : -130°.
On trace le circonscrit au triangle IKG.

On construit le point E image de I par l'homothétie de centre K et de rapport $\frac{4}{7}$.

On trace le cercle de diamètre [EK].
Les deux cercles sont sécants en K et J.



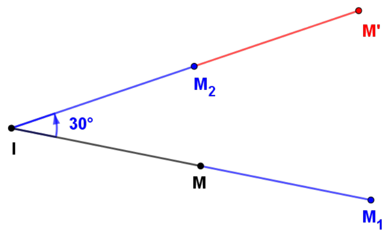
<u>Remarque</u>
R' est la rotation de centre J et d'angle de mesure : 130°.
H' est l'homothétie de centre I et de rapport 0,4.
$F=H'oR'=R'oH'$

4.2.c. Conséquences et vocabulaire

- On nomme similitude plane directe, toute composée d'un déplacement et d'une homothétie de rapport k strictement positif.
  Le rapport de l'homothétie est le rapport de la similitude.
- Une homothétie de rapport k strictement négatif est la composée d'une rotation d'angle de mesure 180° et d'une homothétie de rapport -k (strictement positif).
  Donc la composée d'un déplacement et d'une homothétie de rapport k strictement négatif est une similitude plane directe de rapport -k.
- Une similitude plane directe de rapport 1 est un déplacement.
- Une homothétie de rapport strictement positif est une similitude plane directeur de rapport k.
- Si $k\neq 1$ toute similitude plane directe admet un unique point invariant que l'on nomme centre de la similitude.
  Remarque :
  Pour une rotation d'angle de mesure non nulle, le centre de la rotation est aussi le centre de la similitude.
- La composée d'une rotation et d'une homothétie de rapport k $(k>0$ et $k\neq 1)$ similitude plane directe de rapport k et de centre l'unique point invariant, et d'angle l'angle de la rotation.

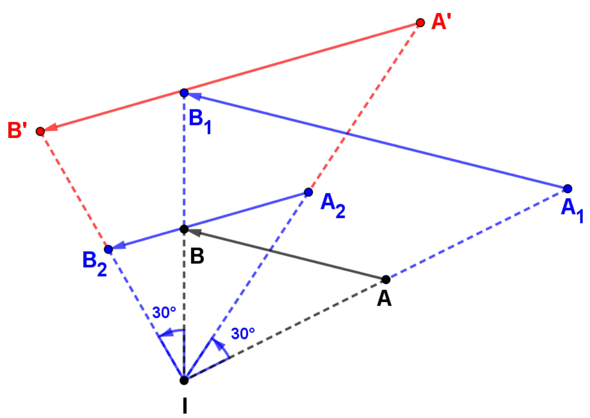
4.3. Propriétés des similitudes planes directes

4.3.a. Soit $\mathscr{S}$ la similitude plane directe de rapport k $(k>0$ et $k\neq 1)$, de centre I et d'angle de mesure θ .
On a donc $\mathscr{S}=H\circ R=R\circ H$ avec H homothétie de centre I et de rapport k et R rotation de centre I et et d'ange de mesure θ .
$\mathscr{S}(M)=R\circ H(M)=R(M_1)=M'$
$\overrightarrow{IM_1}=k.\overrightarrow{IM}$ (donc $IM_1=k\times IM$) et $IM_1=IM'$ et $(\overrightarrow{IM_1};\overrightarrow{IM'})=\theta$
Conséquences :
$IM'=k\times IM$ et $(\overrightarrow{IM};\overrightarrow{IM'})=\theta$.
$\mathscr{S}(M)=H\circ R(M)=H(M_2)=M'$
$IM_2=IM$ et $(\overrightarrow{IM};\overrightarrow{IM_2})=\theta$ et $\overrightarrow{IM'}=k.\overrightarrow{IM_2}$ (donc $IM'=k\times IM_2$).
Conséquences :
$IM'=k\times IM$ et $(\overrightarrow{IM};\overrightarrow{IM'})=\theta$.
Pour la figure $k=1,9$ et $\theta=30°$



4.3.b. Image d'un bipoint

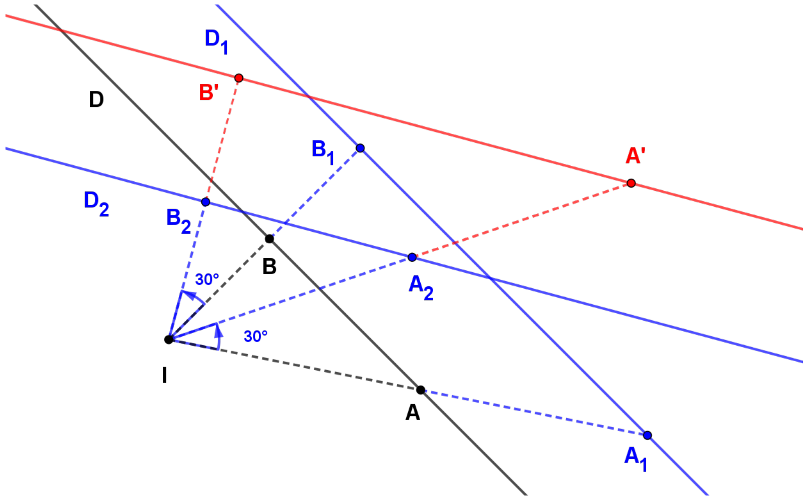
A et B sont deux points distincts du plan
$\mathscr{S}(A)=R\circ H(A)=R(A_1)=A'$
$\mathscr{S}(B)=R\circ H(B)=R(B_1)=B'$
$\overrightarrow{A_1B_1}=k.\overrightarrow{AB}$ et $A'B'=A_1B_1$ et $(\overrightarrow{A_1B_1};\overrightarrow{A'B'})=\theta$
Conséquence :
$A'B'=k\times AB$ et $(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{A'B'})=\theta$
$\mathscr{S}(A)=H\circ R(A)=H(A_2)=A'$
$\mathscr{S}(B)=H\circ R(B)=H(B_2)=B'$
$A_2B_2=AB$ et $(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{A_2B_2})=\theta$ et $\overrightarrow{A'B'}=k.\overrightarrow{A_2B_2}$
Conséquence :
$A'B'=k\times AB$ et $(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{A'B'})=\theta$
Pour la figure $k=1,9$ et $\theta=30°$



4.3.c. Image d'une droite – Image d'un segment

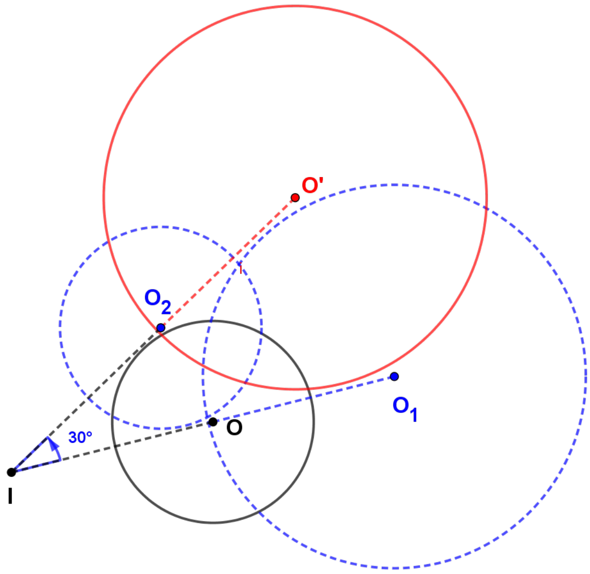
L'image du segment [AB] est le segment [A'B'] et $A'B'=k\times AB$
L'image de la droite D=(AB) est la droite D'=(A'B') et $(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{A'B'})=\theta$

Pour la figure $k=1{,}9$ et $\theta=30°$



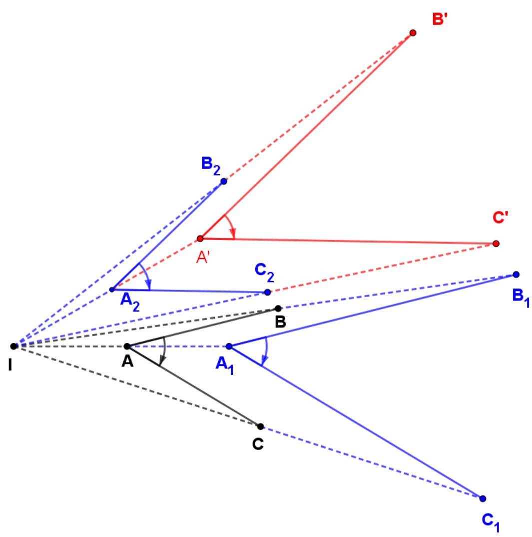
4.3.d. Image d'un cercle

L'image du cercle de centre O et de rayon r est le cercle de centre O'=$\mathscr{S}$(O) et de rayon $r'=k\times r$.
Pour la figure $k=1{,}9$ et $\theta=30°$



4.3.e. Image d'un angle orienté

L'image d'un angle orienté est un angle orienté de même mesure.
Pour la figure $k=1{,}9$ et $\theta=30°$

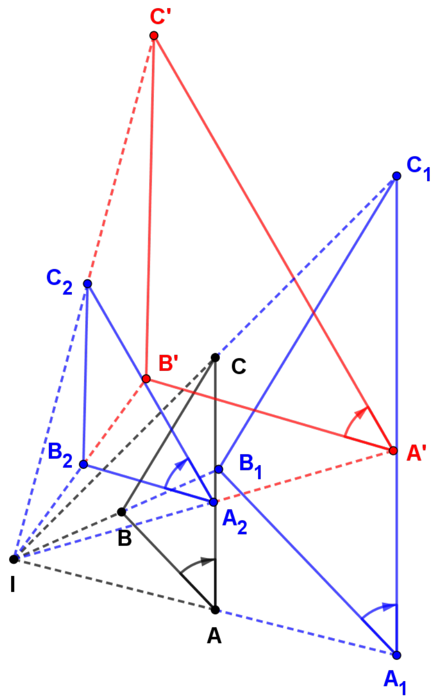


4.3.f. Image d'un triangle

L'image d'un triangle est un triangle directement semblable.

C'est à dire $A'B'=k\times AB$ et $A'C'=k\times AC$ et $B'C'=k\times BC$ et $(\overrightarrow{A'B'};\overrightarrow{A'C'})=(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC})$ et $(\overrightarrow{B'A'};\overrightarrow{B'C'})=(\overrightarrow{BA};\overrightarrow{BC})$ et $(\overrightarrow{C'A'};\overrightarrow{C'B'})=(\overrightarrow{CA};\overrightarrow{CB})$

Pour la figure $k=1{,}9$ et $\theta=30°$



5. Similitudes inverses

5.1. Composée d'une homothétie et d'une symétrie d'axe D

5.1.a. Le centre de l'homothétie de rapport strictement positif appartient à D

$\mathcal{S}= S_D \circ H = H \circ S_D$

H est l'homothétie de centre I et de rapport k (strictement positif).

S_D est la symétrie orthogonale par rapport à la droite D.

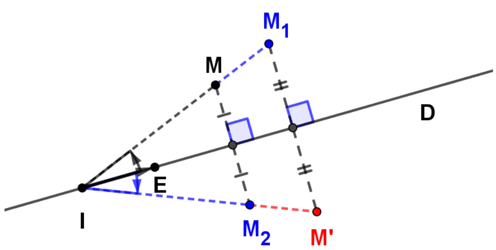
. Image d'un point

Pour out point M du plan distinct de I.

$\mathcal{S}(M)= S_D \circ H(M)=S_D(M_1)=M'$

$\mathcal{S}(M)= H \circ S_D(M)=H(M_2)=M'$

Pour la figure $k=1{,}4$ et $\overrightarrow{IE}$ est un vecteur directeur de D.



$\overrightarrow{IM_1}=k.\overrightarrow{IM}$ et $IM'=IM_1$ et $(\overrightarrow{IE};\overrightarrow{IM'})=-(\overrightarrow{IE};\overrightarrow{IM_1})$.

Or $k>0$ donc $IM'=k\times IM$ et $(\overrightarrow{IE};\overrightarrow{IM'})=-(\overrightarrow{IE};\overrightarrow{IM})$

$IM_2=IM$ et $(\overrightarrow{IE};\overrightarrow{IM_2})=-(\overrightarrow{IE};\overrightarrow{IM})$ et $\overrightarrow{IM'}=k.\overrightarrow{IM_2}$

Or $k>0$ donc $IM'=k\times IM$ et $(\overrightarrow{IE};\overrightarrow{IM'})=-(\overrightarrow{IE};\overrightarrow{IM})$

$\mathcal{S}$ est la similitude plane inverse de centre I, de rapport k et d'axe D.

. Image d'un bipoint

A et B sont des points distincts du plan

$\mathcal{S} = S_D \circ H = H \circ S_D$

$\mathcal{S}(A) = S_D \circ H(A) = S_D(A_1) = A'$ $\mathcal{S}(B) = S_D \circ H(B) = S_D(B_1) = B'$

$\overrightarrow{A_1B_1} = k.\overrightarrow{AB}$ et $A'B' = A_1B_1$ et $(\overrightarrow{IE};\overrightarrow{A'B'}) = -(\overrightarrow{IE};\overrightarrow{A_1B_1})$.

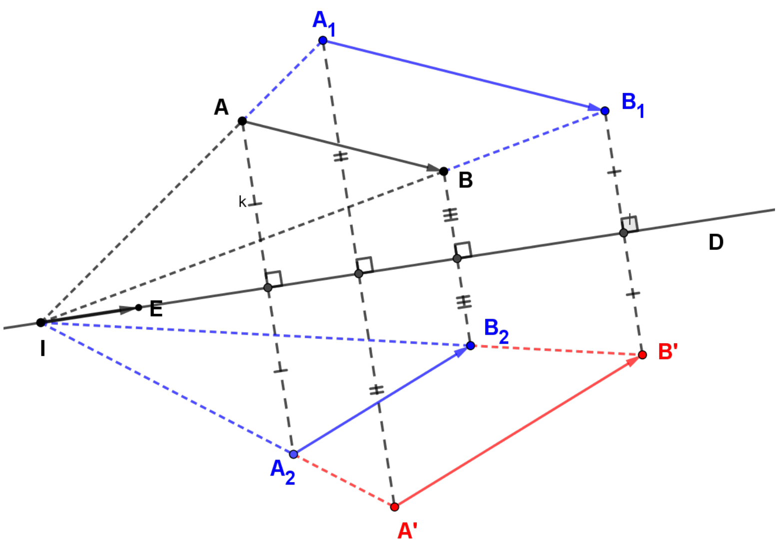
Or $k>0$ donc $A'B' = k \times AB$ et $(\overrightarrow{IE};\overrightarrow{A'B'}) = -(\overrightarrow{IE};\overrightarrow{AB})$

$\mathcal{S}(A) = H \circ S_D(A) = H(A_2) = A'$ $\mathcal{S}(B) = H \circ S_D(B) = H(B_2) = B'$

$A_2B_2 = AB$ et $(\overrightarrow{IE};\overrightarrow{A_2B_2}) = -(\overrightarrow{IE};\overrightarrow{AB})$ et $\overrightarrow{A'B'} = k.\overrightarrow{A_2B_2}$

Or $k>0$ donc $A'B' = k \times AB$ et $(\overrightarrow{IE};\overrightarrow{A'B'}) = -(\overrightarrow{IE};\overrightarrow{AB})$

Pour la figure $k=1,4$.

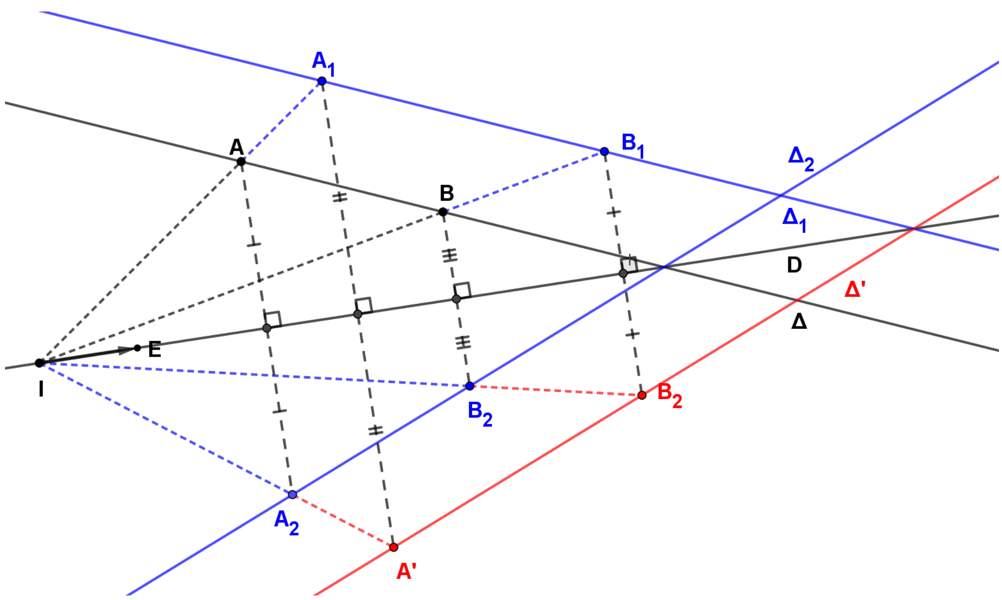


. Image d'une droite – Image d'un segment

L'image du segment [AB] est le segment [A'B'] $A'B' = k \times AB$.

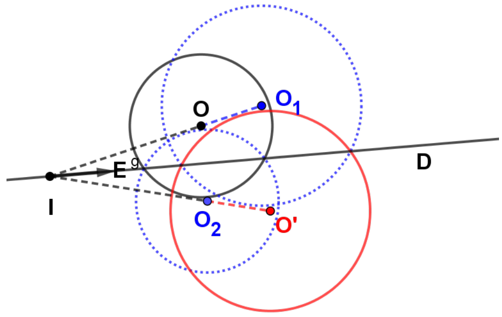
L'image de la droite (AB) est la droite (A'B') $(\overrightarrow{IE};\overrightarrow{A'B'}) = -(\overrightarrow{IE};\overrightarrow{AB})$

Pour la figure $k=1,4$.



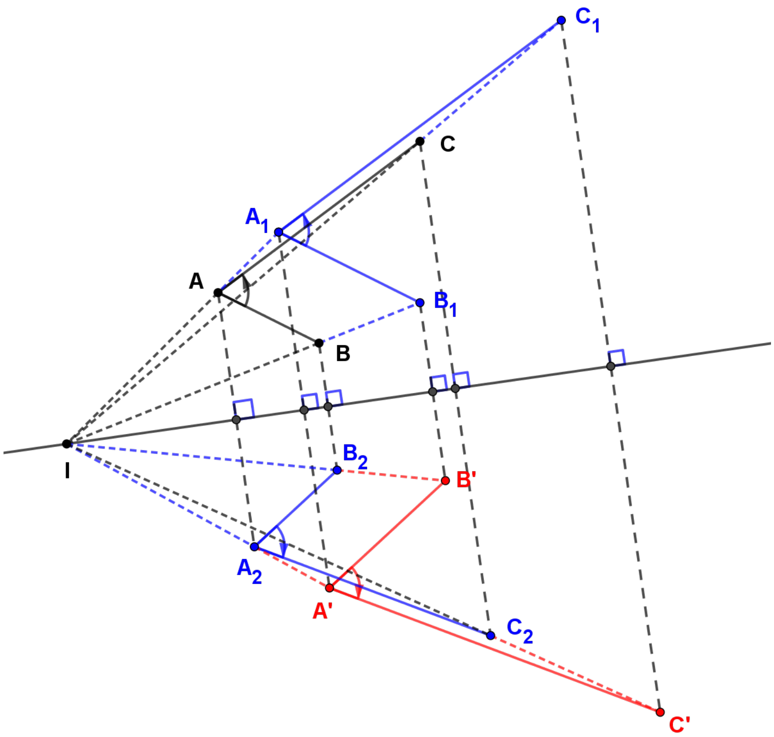
. Image d'un cercle

L'image du cercle de centre O et de rayon r est le cercle de centre $\mathcal{S}(O) = O'$ et de rayon $k \times r$.



. Image d'un angle orienté

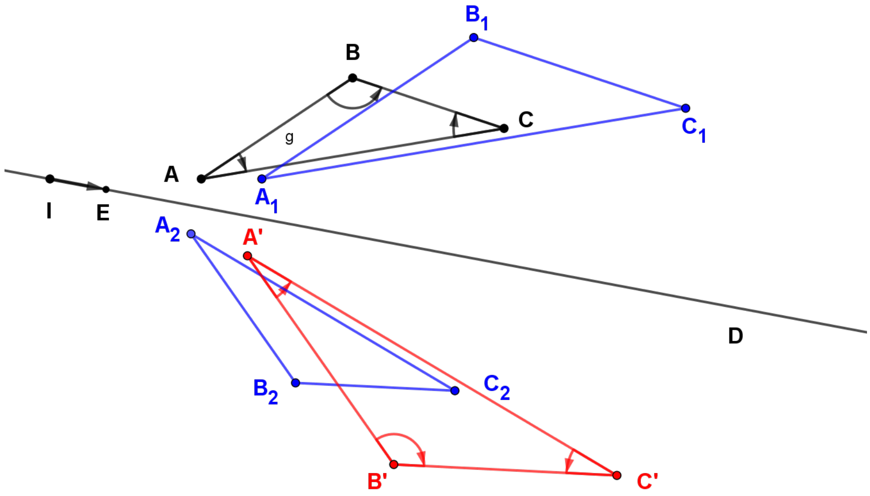
L'image d'un angle orienté est un angle orienté de mesure opposée.



. Image d'un triangle

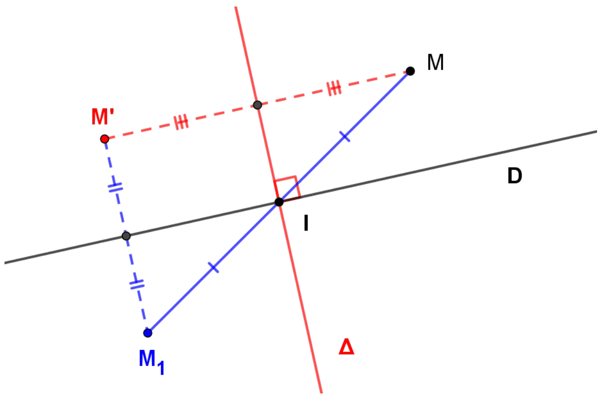
L'image du triangle ABC est le triangle semblable A'B'C'.
$A'B'=k\times AB$
$A'C'=k\times AC$
$B'C'=k\times BC$

$(\overrightarrow{A'B'};\overrightarrow{A'C'})=-(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC})$
$(\overrightarrow{B'A'};\overrightarrow{B'C'})=-(\overrightarrow{BA};\overrightarrow{BC})$
$(\overrightarrow{C'A'};\overrightarrow{C'B'})=-(\overrightarrow{CA};\overrightarrow{CB})$



5.1.b. Cas particulier

H est l'homothétie de centre I et de rapport -1, I appartient à D.
$\mathcal{S} = S_D \circ H$
H est aussi la symétrie centrale de centre I ou la rotation de centre I et d'angle de mesure 180°.
Donc $H = S_D \circ S_\Delta$ avec Δ la perpendiculaire à D passant par I.
$\mathcal{S} = S_D \circ S_D \circ S_\Delta = S_\Delta$
$\mathcal{S}$ est la symétrie orthogonale par rapport à Δ .

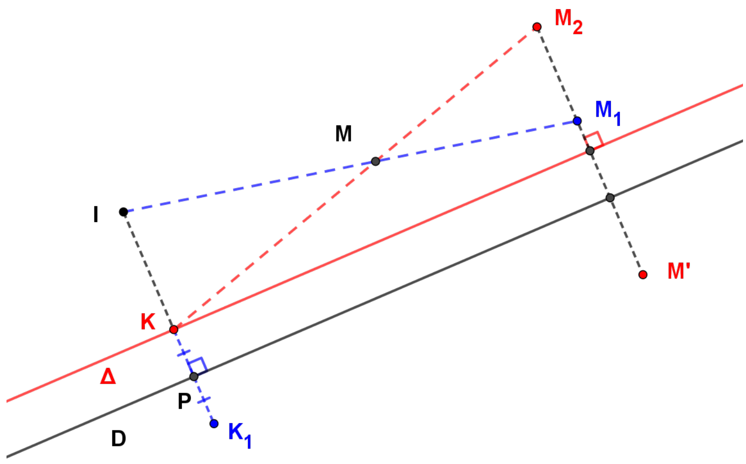


5.1.c. Le rapport de l'homothétie est négatif différent de -1

H est l'homothétie de centre I et de rapport $k<0$ et $k \neq -1$.
I appartient à D.
$\mathcal{S} = S_D \circ H$
$H = s_I \circ H'$ s_I est la symétrie centrale de centre I et H' est l'homothétie de centre I et de rapport $-k>0$.
s_I est l'homothétie de centre I et de rapport -1.
$\mathcal{S} = S_D \circ s_I \circ H'$
$s_I = S_D \circ S_\Delta$ Δ est la perpendiculaire à D passant par I.
$\mathcal{S} = S_D \circ S_D \circ S_\Delta \circ H' = S_\Delta \circ H'$
$\mathcal{S}$ est la similitude plane inverse de centre I de rapport -k et d'axe Δ .

5.1.d. Le centre de l'homothétie I n'appartient pas à D.

H est l'homothétie de centre I et de rapport k>0 et distinct de 1.
I n'appartient pas à D.
. Exemple 1
On choisit k=1,8 (cas où k>1)
$\mathcal{S} = S_D \circ H$



On se propose de démontrer l'existence d'un point K invariant par $\mathscr{S}$.

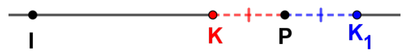
$H(K)=K_1$ $\quad \overrightarrow{IK_1}=1{,}8.\overrightarrow{IK}$ Les points I, K et K_1 sont alignés.

$S_D(K_1)=K$ La droite (KK_1) est orthogonale à D.

<u>Conséquence</u>

S'il existe, le point K appartient à la droite perpendiculaire à la droite D passant par I, cette droite est sécante avec la droite D en P.

On doit déterminer le point K sur la droite (IP) tel que



et $\overrightarrow{IK_1}=1{,}8.\overrightarrow{IK}$

Donc $\overrightarrow{KK_1}=\overrightarrow{IK_1}-\overrightarrow{IK}=0{,}8.\overrightarrow{IK}$ et $\overrightarrow{KP}=\frac{1}{2}.\overrightarrow{KK_1}=0{,}4.\overrightarrow{IK}$.

On obtient $\overrightarrow{IP}=\overrightarrow{IK}+\overrightarrow{KP}=1{,}4.\overrightarrow{IK}$ soit $\overrightarrow{IK}=\frac{1}{1{,}4}.\overrightarrow{IP}=\frac{5}{7}.\overrightarrow{IP}$.

K est l'image de P par l'homothétie de centre I et de rapport $\frac{5}{7}$.

Δ est la droite parallèle à D passant par K.

t est la translation de vecteur directeur $\vec{V}=\overrightarrow{K_1K}$. On a $t=S_\Delta o S_D$

H'= $t o H$ est une homothétie de rapport 1,8.

$t o H(K)=t(K_1)=K$ donc K est le centre de H'.

$H'=t o H \quad \Leftrightarrow \quad t^{-1} o H'=H$

$t^{-1}=S_D o S_\Delta$

$\mathscr{S}=S_D o H=S_D o S_D o S_\Delta o H'=S_\Delta o H'$

<u>Conclusion</u>

$\mathscr{S}$ est la similitude plane inverse de centre K et de rapport : 1,8.

$\mathscr{S}(M)=S_\Delta o H'(M)=S_\Delta(M_2)=M'$.

. Exemple 2

On choisit $k=0{,}6$ (car $0<k<1$).

$\mathscr{S}=S_D o H$.

On se propose de déterminer l'existence d'un point K invariant par $\mathscr{S}$.

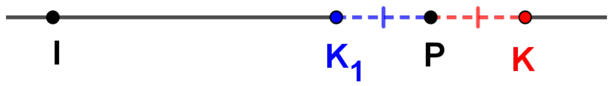
$H(K)=K_1$ $\quad \overrightarrow{IK_1}=0{,}6.\overrightarrow{IK}$ Les points I, K et K_1 sont alignés.

$S_D(K_1)=K$ La droite (KK_1) est orthogonale à D.

<u>Conséquence</u>

S'il existe, le point K appartient à la droite perpendiculaire à la droite D passant par I, cette droite est sécante avec la droite D en P.

On doit déterminer le point K sur la droite (IP) tel que



et $\overrightarrow{IK_1}=0{,}6.\overrightarrow{IK}$

Donc $\overrightarrow{KK_1}=\overrightarrow{IK_1}-\overrightarrow{IK}=-0{,}4.\overrightarrow{IK}$ et $\overrightarrow{K_1P}=\frac{1}{2}.\overrightarrow{K_1K}=0{,}2.\overrightarrow{IK}$.

On obtient : $\overrightarrow{IP}=\overrightarrow{IK_1}+\overrightarrow{K_1P}=0{,}6.\overrightarrow{IK}+0{,}2.\overrightarrow{IK}=0{,}8.\overrightarrow{IK}$

$\overrightarrow{IK}=\frac{1}{0{,}8}.\overrightarrow{IP}=\frac{5}{4}.\overrightarrow{IP}=1{,}25.\overrightarrow{IP}$

K est l'image de P par l'homothétie de centre I et de rapport 1,25.

Δ est la droite parallèle à D passant par K.

t est la translation de vecteur $\vec{V}=\overrightarrow{K_1K}$.

On a donc : $t=S_\Delta o S_D$

$H'=t\,o\,H$ est une homothétie de rapport 0,6.

$H'(K)t\,o\,H(K)=t(K_1)=K$

K est le centre de H'.

$H'=t\,o\,H \quad\Leftrightarrow\quad t^{-1}o\,H'=H$

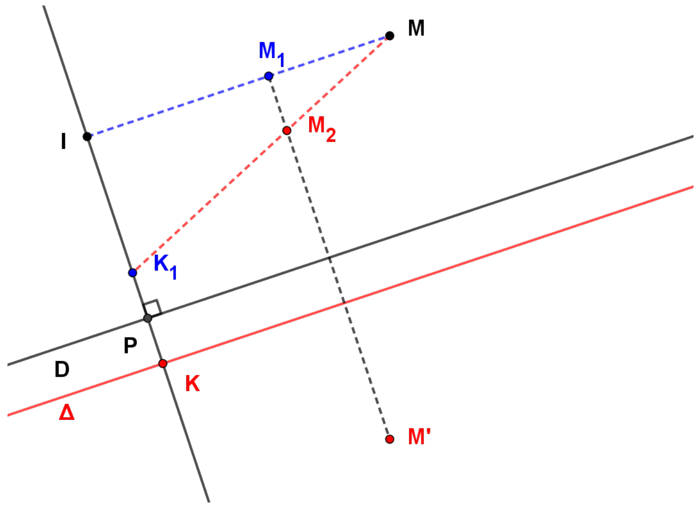
$t^{-1}=S_D\,o\,S_\Delta$

$\mathscr{S}=S_D\,o\,H=S_D\,o\,S_D\,o\,S_\Delta\,o\,H'=S_D\,o\,H'$

<u>Conclusion</u>

$\mathscr{S}$ est la similitude plane inverse de centre K et de rapport 0,6 et d'axe Δ .

$\mathscr{S}(M)=S_\Delta\,o\,H'(M)=S_\Delta(M_2)=M'$



. Cas général

H est l'homothétie de centre I et de rapport $k>0$ et $k\neq 1$.

S_D est la symétrie orthogonale par rapport à D.

$\mathscr{S}=S_D\,o\,H$

On admet qu'il existe un unique point K invariant par $\mathscr{S}$.

On note Δ la parallèle à D passant par K.

$\mathscr{S}$ est la similitude plane inverse de rapport k et de centre K et d'axe Δ .

5.2. Conclusions

. On nomme similitude plane inverse de rapport $k>0$, toute composée d'une homothétie de rapport k et d'un antidéplacement.

. Si le rapport de l'homothétie est 1 alors la similitude plane inverse de rapport 1 est un antidéplacement donc une symétrie orthogonale par rapport à une droite (il y a une infinité de points invariants) ou une symétrie glissée (il y a aucun point invariant).

- Si le rapport de l'homothétie H est $k > 0$ et différent de 1 alors la similitude admet un unique point K invariant pour la similitude $\mathscr{S} = S_D \circ H$ et $\mathscr{S} = S_\Delta \circ H'$ avec H' homothétie de centre K et de rapport k et Δ parallèle à D passant par K.

