Caractérisations complexes
Isométries-Similitudes

Le repère $(O;\vec{u};\vec{v})$ est orthonormé direct.
L'unité de mesure des angles est le radian.

1. Translations

1.1. Ecriture complexe d'une translation

$t_{\vec{V}}$ est la translation de vecteur $\vec{V}$ d'affixe $z_{\vec{V}}$.
M est un point quelconque du plan d'affixe z. $t_{\vec{V}}(M)=M'$ d'affixe z'.
$t_{\vec{V}}(M)=M' \Leftrightarrow \overrightarrow{MM'}=\vec{V} \Leftrightarrow z'-z=z_{\vec{V}} \Leftrightarrow z'=z+z_{\vec{V}}$
Relation du type : $z'=z+b$ où b est un nombre complexe.

1.2. Ecriture matricielle d'une translation

$z_{\vec{V}}=\alpha+i\beta$ $\quad\alpha$ et β sont des nombres réels.
$z=x+iy$ $\quad$ x et y sont des nombres réels.
$z'=x'+iy'$ $\quad$ x' et y' sont des nombres réels.

$$z'=z+z_{\vec{V}}=x'+iy'=x+iy+\alpha+i\beta=x+\alpha+i(y+\beta) \Leftrightarrow \begin{cases} x'=x+\alpha \\ y'=y+\beta \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}.$$

1.3. Composé de deux translations

$\vec{V}_1(z_{\vec{V}_1})$ $\quad t_1$ est la translation de vecteur $\vec{V}_1$ $\quad t_1(M)=M_1(z_1)$ $\quad z_1=z+z_{\vec{V}_1}$

$\vec{V}_2(z_{\vec{V}_2})$ $\quad t_2$ rst la translation de vecteur $\vec{V}_2$ $\quad t_2(M)=M_2(z_2)$ $\quad z_2=z+z_{\vec{V}_2}$

$t_2 o t_1(M)=t_2(M_1)=M'(z')$
$z'=z_1+z_{\vec{V}_2}=z+z_{\vec{V}_1}+z_{\vec{V}_2}$
$t_2 o t_1$ est la translation de vecteur $\vec{V}_1+\vec{V}_2$.
De même $t_1 o t_2$ est la translation de vecteur $\vec{V}_2+\vec{V}_1$ donc $t_2 o t_1=t_1 o t_2$.
On peut vérifier que $(t_3 o t_2) o t_1=t_3 o (t_2 o t_1)=t_3 o t_2 o t_1$ et que $t_{\vec{V}}^{-1}=t_{-\vec{V}}$.
On dit alors que l'ensemble des translations muni de la loi de composition des applications est un groupe commutatif.

2. Rotations

2.1. Ecriture complexe d'une rotation

R est la rotation de centre I et d'angle de mesure θ.
$I(z_I)$ $\quad$ M(z) $\quad$ M'(z')

. Si $M\neq I$ alors $z\neq z_I$

$$R(M)=M' \Leftrightarrow \begin{cases} IM'=IM \\ (\overrightarrow{IM};\overrightarrow{IM'})=\theta \quad (2\pi) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |z'-z_I|=|z-z_I| \\ \arg\left(\dfrac{z'-z_I}{z-z_I}\right)=\theta \quad (2\pi) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left|\dfrac{z'-z_I}{z-z_I}\right|=1 \\ \arg\left(\dfrac{z'-z_I}{z-z_I}\right)=\theta \quad (2\pi) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \quad z'-z=e^{i\theta}(z-z_I)$$

. Si M=I alors $z-z_I=z'-z_I=0$

. Conséquence

$R(M)=M' \quad \Leftrightarrow \quad z'=e^{i\theta}+z_I-e^{i\theta}z_I$

Relation du type ; **z'=az+b** avec a et b nombres complexes et $|a|=1$.

2.2. Ecriture matricielle d'une rotation

$z=x+iy$; $z'=x'+iy'$; $z_I=x_I+iy_I$ et $e^{i\theta}=\cos\theta+i\sin\theta$

x ; y ; x', y' ; x_I et y_I sont des nombres réels.

$R(M)=M' \quad \Leftrightarrow \quad x'+iy'=(\cos\theta+i\sin\theta)(x+iy)+x_I+iy_I-(\cos\theta+i\sin\theta)(x_I+iy_I)$

$\Leftrightarrow \quad x'+iy'=x\cos\theta-y\sin\theta+x_I-x_I\cos\theta+y_I\sin\theta+i(x\sin\theta+y\cos\theta+y_I-x_I\cos\theta-y_I\sin\theta)$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} x_I-x_I\cos\theta+y_I\sin\theta \\ y_I-x_I\cos\theta-y_I\sin\theta \end{pmatrix}$$

Écriture de la forme : $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} \gamma \\ \delta \end{pmatrix}$ avec $\alpha^2+\beta^2=1$

2.3. Problème réciproque

Les nombres complexes a et b sont donnés et $|a|=1$.
On considère l'application F qui au point M(z) associe F(M)=M' tel que z'=az+b..
On détermine l'ensemble des points invariants par F.

$F(M)=M \quad \Leftrightarrow \quad z'=z \quad \Leftrightarrow \quad az+b=z \quad \Leftrightarrow \quad (a-1)z=-b$

✔ Si a=0 alors $0.z=-b$

. Si b=0 alors $0.z=0$ et tout les points du plan sont invariants donc F est l'application identique (qui est la translation de vecteur nul ou une rotation de centre quelconque et d'angle nul).

. Si $b\neq 0$ alors il n'existe pas de point invariant.
On a z'=z+b, soit $\vec{V}$ le vecteur d'affixe b et F est la translation de vecteur $\vec{V}$.

✔ Si $a\neq 1$ alors $(a-1)z=-b \quad \Leftrightarrow \quad z=\dfrac{-b}{a-1}=\dfrac{b}{1-a}$.

F admet un unique point invariant $I\left(\dfrac{b}{1-a}\right)$.

Remarque

$z_I=az_I+b$

On obtient $\begin{cases} z'=az+b \\ z_I=az_I+b \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} z'-z_I=a(z-z_I) \\ z_I=az_I+b \end{cases}$

Si $M\neq I$ c'est à dire $z\neq z_I$ alors on a : $\dfrac{z'-z_I}{z-z_I}=a$

$|a|=1$ et $\arg(a)=\theta \ (2\pi)$

$a\neq 1$ donc $\theta\neq 0 \ (2\pi)$

$\left|\dfrac{z'-z_I}{z-z_I}\right|=1$ donc $|z'-z_I|=|z-z_I| \quad \Leftrightarrow \quad IM'=MI$

$\arg\left(\dfrac{z'-z_I}{z-z_I}\right)=\theta \ (2\pi)$ donc $(\vec{IM};\vec{IM'})=\theta \ (2\pi)$

Conséquence

F est la rotation de centre I et d'angle de mesure $\theta=\arg(a) \ (2\pi)$.

✔ Conclusion

La caractérisation complexe d'un déplacement (rotation ou translation) est de la forme **z'=az+b** avec a et b nombres complexes et $|a|=1$.

✔ Écriture matricielle d'un déplacement

$a=\alpha+i\beta$ $\quad b=\gamma+i\delta$ $\quad \alpha;\beta;\gamma$ et δ sont des nombres réels.
$z=x+iy$ $\quad z'=x'+iy'$

$$z'=az+b \quad\Leftrightarrow\quad \begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\alpha & -\beta\\ \beta & \alpha\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}\gamma\\ \delta\end{pmatrix} \text{ avec } \alpha^2+\beta^2=1 .$$

2.4. Composé de deux déplacements

d_1 de caractérisation complexe : $z_1=a_1z+b_1$ avec $|a_1|=1$ (a_1 et b_1 sont des nombres complexes).

. Si $a_1=1$ alors d_1 est la translation de vecteur $\vec{V}_1(b_1)$.

. Si $a_1\neq 1$ alors d_1 est la rotation de centre $I\left(\dfrac{b_1}{1-a_1}\right)$ et d'angle de mesure $\theta_1=\arg(a_1)\ (2\pi)$

d_2 de caractérisation complexe : $z_2=a_2z+b_2$ avec $|a_2|=1$ (a_2 et b_2 sont des nombres complexes).

. Si $a_2=1$ alors d_2 est la translation de vecteur $\vec{V}_2(b_2)$.

. Si $a_2\neq 1$ alors d_2 est la rotation de centre $I\left(\dfrac{b_2}{1-a_2}\right)$ et d'angle de mesure $\theta_2=\arg(a_2)\ (2\pi)$.

$d=d_2\circ d_1$ $\quad M(z)$ $\quad d_1(M)=M_1(z_1)$ $\quad z_1=a_1z+b_1$ et $d_2(M_1)=M'(z')$ $\quad z'=a_2z_1+b_2$
$z'=a_2(a_1z+b_1)+b_2=a_2a_1z+a_2b_1+b_2$
$|a_2a_1|=|a_2|\times|a_1|=1\times 1=1$ donc d est un déplacement.

. Si $a_2a_1=1$ alors d est la translation de vecteur $\vec{V}(a_2b_1+b_2)$.

. Si $a_2a_1\neq 1$ alors d est la rotation de centre $I\left(\dfrac{a_2b_1+b_2}{1-a_2a_1}\right)$ et d'angle de mesure $\theta=\theta_1+\theta_2\ (2\pi)$.

Attention : on n'a pas toujours $d_2\circ d_1=d_1\circ d_2$.
On peut vérifier que **l'ensemble des déplacements muni de la loi de composition des applications est un groupe non commutatif.**

3. Homothéties

3.1. Ecriture complexe d'une homothétie

On note h l'homothétie de centre I et de rapport λ avec λ nombre réel non nul.
$M(z)$ $\quad M'(z')$
$h(M)=M' \quad\Leftrightarrow\quad \overrightarrow{IM'}=\lambda\overrightarrow{IM} \quad\Leftrightarrow\quad z'-z_I=\lambda(z-z_I) \quad\Leftrightarrow\quad z'=\lambda z+z_I-\lambda z_I$
Relation du type $z'=az+b$ avec a nombre réel non nul et b nombre complexe.

3.2. Ecriture matricielle d'une homothétie

λ est un nombre réel non nul
$z=x+iy$ $\quad x$ et y sont des nombres réels
$z'=x'+iy'$ $\quad x'$ et y' sont des nombres réels
$z_I-\lambda z_I=\gamma+i\delta$

$$h(M)=M' \quad\Leftrightarrow\quad z'=\lambda z+z_I-\lambda z_I \quad\Leftrightarrow\quad x'+iy'=\lambda(x+iy)+\gamma+i\delta \quad\Leftrightarrow\quad \begin{cases}x'=\lambda x+\gamma\\ y'=\lambda y+\delta\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\quad \begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\lambda & 0\\ 0 & \lambda\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}\gamma\\ \delta\end{pmatrix}.$$

3.3. Problème réciproque

Les nombres a réel non nul et b complexe sont donnés.
On considère l'application F du plan P vers le plan P qui au point M(z) associe le point M'(z') tel que $z'=az+b$.

On détermine l'ensemble des points invariants par F.

$F(M)=M \quad \Leftrightarrow \quad z'=z \quad \Leftrightarrow \quad az+b=z \quad \Leftrightarrow \quad (a-1)z=-1$.

✔ Si $a=1$ alors $0.z=-b$.

. Si $b=0$ alors F est l'application identique.

. Si $b\neq 0$ alors F est la translation de vecteur $\vec{V}(b)$.

✔ Si $a\neq 1$ alors $z=\frac{-b}{a-1}=\frac{b}{1-a}$.

F admet un unique point invariant $I\left(\frac{b}{1-a}\right)$ et $z_I=a z_I+b$

$$\begin{cases} z'=az+b \\ z_I=az_I+b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z'-z_I=a(z-z_I) \\ z_I=az_I+b \end{cases}$$

$z'-z_I=a(z-z_I) \quad \Leftrightarrow \quad \overrightarrow{IM'}=a.\overrightarrow{IM}$

donc F est l'homothétie de centre I et de rapport a.

✔ <u>Conclusion</u>

La caractérisation complexe d'une homothétie ou d'une translation est de la forme **z'=az+b**

a est un réel non nul et b est un nombre complexe.

3.4. Composé d'homothéties-translations

F_1 de caractérisation complexe $z_1=a_1 z+b_1$ avec a_1 nombre réel non nul et b_1 nombre complexe.

F_2 de caractérisation complexe $z_2=a_2 z+b_2$ avec a_2 nombre réel non nul et b_2 nombre complexe.

$F=F_1 o F_2$

$F_1(M)=M_1(z_1) \qquad z_1=a_1 z+b_1 \qquad F_2(M_1)=M'(z') \qquad z'=a_2 z_1+b_2=a_2(a_1 z+b_1)+b_2$

$z'=a_2 a_1 z+a_2 b_1+b_2$

$a_2 a_1$ est un nombre réel non nul

. Si $a_2 a_1=1$ alors F est la translation de vecteur $\vec{V}(a_2 b_1+b_2)$.

. Si $a_2 a_1\neq 1$ alots F est l'homothétie de centre $I\left(\frac{a_2 b_1+b_2}{1-a_2 a_1}\right)$ et de rapport : $a_2 a_1$.

Attention ; on n'a pas toujours $F_2 o F_1=F_1 o F_2$.

On peut vérifier que **l'ensemble des homothéties-translations muni de la loi de composition des applications et un croupe non commutatif.**

4. Similitudes planes directes

Une similitude plane directe est le composé d'un déplacement et d'une homothétie de rapport k (réel strictement positif).

Si k=1 alors la similitude plane directe est un déplacement.

4.1. Ecriture complexe d'une similitude plane directe

d_1 est le déplacement de caractérisation complexe $z_1=a_1 z+b_1$ a_1 et b_1 sont des nombres complexes et $|a_1|=1$.

h_2 est l'homothétie de caractérisation complexe $z_2=a_2 z+b_2$ a_2 est un nombre réel strictement positif et b_2 un nombre complexe .

<u>Remarque</u>

On peut écrire : $a_1=e^{i\theta_1}$ $\quad \arg(a_1)=\theta_1 \quad (2\pi)$ et $a_2=k>0$.

$s=h_2 o d_1$

$M(z) \qquad d_1(M)=M_1(z_1) \qquad z_1=a_1 z+b_1 \qquad h_2(M_1)=M'(z') \qquad z'=a_2 z+b_2 \qquad s(M)=M'$

$z'=a_2(a_1 z+b_1)+b_2=a_2 a_1 z+a_2 b_1+b_2$

$|a_2 a_1|=|a_2|\times|a_1|=k\times 1=k \qquad \arg(a_2 a_1)=\theta_1 \quad (2\pi)$

Relation du type : $z'=az+b$ avec a et b nombres complexes et $a=k\,e^{i\theta}\neq 0$.

4.2. Ecriture matricielle d'une similitude plane directe

$z=x+iy \quad z'=x'+iy' \quad a=k(\cos\theta+i\sin\theta) \quad b=\gamma+i\delta$

x ; y;x' ; y' ; θ ; γ et δ sont des nombres réels et k et un nombre réel strictement positif.

$z'=x'+iy'=k(\cos\theta+i\sin\theta)(x+iy)+\gamma+i\delta$

$x'+iy'=(k\cos\theta)x-k(\sin\theta)y+i(k\cos\theta)y+i(k\sin\theta)x+\gamma+i\delta$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x'=(k\cos\theta)x-(k\sin\theta)y+\gamma \\ y'=(k\sin\theta)x+(k\sin\theta)y+\delta \end{cases} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k\cos\theta & -k\sin\theta \\ k\sin\theta & k\cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \gamma \\ \delta \end{pmatrix}$$

4.3. Problème réciproque

Les nombres complexes a et b sont fixés et $a\neq 0$.
On considère l'application F de P vers P qui au point M(z) associe F(M)=M'(z') tel que z'=az+b.
On détermine l'ensemble des points invariants par F

$F(M)=M \Leftrightarrow z'=z \Leftrightarrow az+b=z \Leftrightarrow (a-1)z=-b$

. Si a=1 alors F est la translation de vecteur $\vec{V}(b)$.

. Si $a\neq 1$ alors $z=\dfrac{-b}{a-1}=\dfrac{b}{1-a}$.

F admet un unique point invariant $I\left(\dfrac{b}{1-a}\right)$ et on a : $z_I=a\,z_I+b$.

$$\begin{cases} z'= az+b \\ z_I=a\,z_I+b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z'-z_I=a(z-z_I) \\ z_I=a\,z_I+b \end{cases}$$

Si $|a|=1$ alors F est la rotation de centre I et d'angle $\theta=\arg(a)\ (2\pi)$

Si $|a|=k\neq 1$ on considère l'homothétie h de centre I et de rapport k.

h^{-1} est l'homothétie de centre I et de rapport $\dfrac{1}{k}$.

Soit l'application $F_1=h^{-1}\circ F$.

$F_1(M)=h^{-1}\circ F(M)=h^{-1}(M')=M_1(z_1)$ et $z_1-z_I=\dfrac{1}{k}(z'-z_I)$

Or $z'-z_I=a(z-z_I)$ donc $z_1-z_I=\dfrac{a}{k}(z-z_I)$

$\dfrac{a}{k}=a_1 \qquad |a_1|=1$ car $|a|=k$

$z_1-z_I=a_1(z-z_I)$ avec $|a_1|=1$

F_1 est la rotation de centre I et d'angle de mesure $\arg(a_1)=\arg(a)\ (2\pi)$ car $k>0$

F_1 est l'application identique si $a_1=1$ c'est à dire si $a=k>0$ (et $k\neq 1$).

$F_1=h^{-1}\circ F \Leftrightarrow h\circ F_1=F$.

F est le composé de la rotation de centre I et d'angle de mesure $\theta=\arg a\ (2\pi)$ et de l'homothétie de centre I et de rapport k.

On peut vérifier que $h\circ F_1=F_1\circ h$.

F est la similitude plane directe de centre I, de rapport k et d'angle de mesure $\theta=\arg a\ (2\pi)$.

<u>Conclusion</u>

L'application F qui au point M(z) associe M'(z') tel que **z'=az+b** où a et b sont des nombres complexes avec $a\neq 0$ est :

✔ Si $a=1$ alors F est **la translation** de vecteur $\vec{V}(b)$.

✔ Si $a\neq 1$ alors F admet un unique point invariant $I\left(\dfrac{b}{1-a}\right)$.

✔ Si $a=k>0$ (et $a\neq 1$) alors F est **l'homothétie** de centre I et de rapport k.
✔ Si $|a|=1$ (et $a\neq 1$) alors F est **la rotation** de centre I et d'angle de mesure $\theta=\arg a \quad (2\pi)$.
✔ Si $|a|=k>0$ (et $k\neq 1$ et $\arg a\neq 0 \quad (2\pi)$) alors F est la **similitude plane directe** de centre I, de rapport k et d'angle de mesure $\theta=\arg a \quad (2\pi)$.

Remarque
L'homothétie de centre I et de rapport λ est la similitude plane directe de centre I de rapport $k=-\lambda$ et d'angle de mesure π. Car $a=\lambda=-k=k\,e^{i\pi}$.

4.4. Composé de deux similitudes planes directes

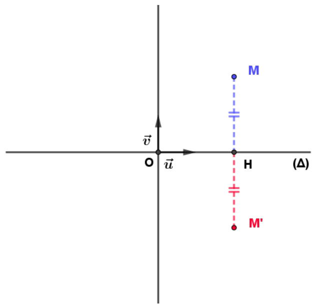
s_1 est la similitude plane directe de centre I_1, de rapport k_1 et d'angle de mesure θ_1.
$s_1(M)=M_1$ et $z_1=k_1e^{i\theta_1}z+b_1$
s_2 est la similitude plane directe de centre I_2, de rapport k_2 et d'angle de mesure θ_2.
$s_2(M)=M_2$ et $z_2=k_2e^{i\theta_2}z+b_2$
$F=s_2 \circ s_1$
$F(M)=s_2\circ s_1(M)=s_2(M_1)=M'$ $\quad z_1=k_1e^{i\theta_1}z+b_1 \qquad z'=k_2e^{i\theta}z_1+b_2$
$z'=k_2k_1e^{i\theta_2}e^{i\theta_1}+k_2e^{i\theta_2}b_1+b_2=\ k_2k_1e^{i(\theta_2+\theta_1)}+k_2e^{i\theta_2}b_1+b_2$
$a=k_2k_1e^{i(\theta_2+\theta_1)}$

✔ Si $k_2k_1=1$ alors F est un déplacement.
. Si $\theta_2+\theta_1=0 \quad (2\pi)$ alors F est une translation.
. Si $\theta_2+\theta_1\neq 0 \quad (2\pi)$ alors F est une rotation d'angle de mesure $\theta_2+\theta_1$
✔ Si $k_2k_1\neq 1$ alors F n'est pas un déplacement.
. Si $\theta_2+\theta_1=0 \quad (2\pi)$ alors F est une homothétie de rapport k_2k_1.
. Si $\theta_2+\theta_1\neq 0 \quad (2\pi)$ alors f est une similitude plane directe de rapport k_2k_1 et d'angle $\theta_2+\theta_1$

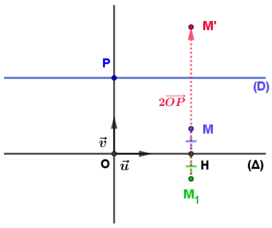
Le centre de la rotation, de l'homothétie ou de de la similitude est déterminé par le calcul.
On peut vérifier que : **L'ensemble des similitudes planes directes muni de la loi de composition des applications est un groupe non commutatif.**

5. Symétrie orthogonale par rapport à une droite

. On note (Δ) la droite d'équation $y=0$ (l'axe des abscisses).
S_Δ est la symétrie orthogonale par rapport à la droite (Δ)



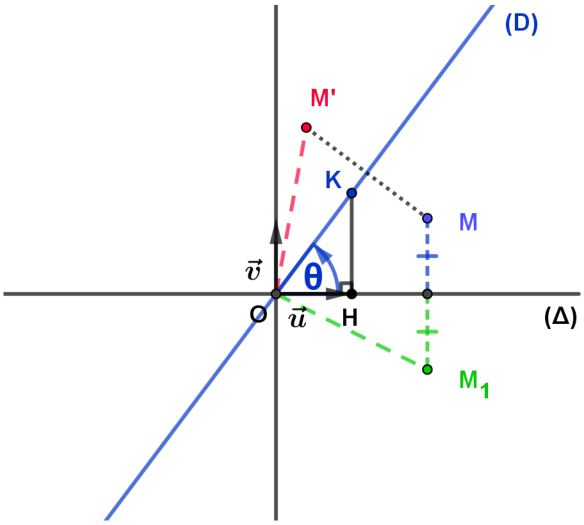
M(z) $\quad S_\Delta(M)=M'(z')$ donc $z'=\bar{z}$.
. On considère (D) la droite d'équation $y=p$ ((D) et (Δ) sont parallèles).



P est le point d'intersection de (D) et de l'axe des ordonnées, les coordonnées de P sont (0;p).

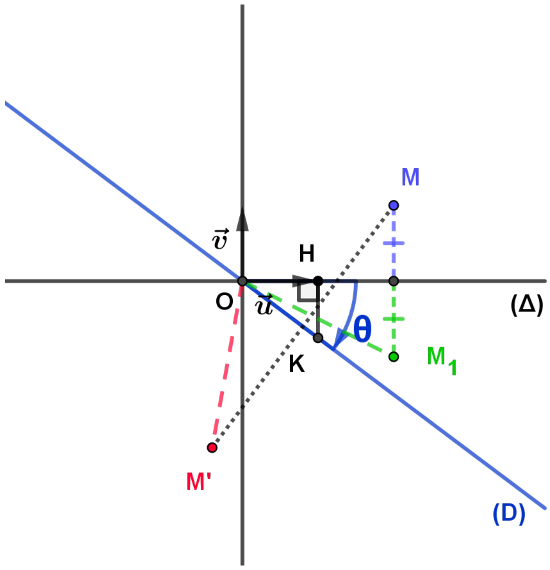
L'affixe de P est ip .
S_Δ est une application involutive donc $S_\Delta o S_\Delta$ est l'application identique.
$S_D = S_D o S_\Delta o S_\Delta = (S_D o S_\Delta) o S_\Delta$
$t = S_D o S_\Delta$ est la translation de vecteur $\vec{V} = 2\overrightarrow{OP}(2\,ip)$
$S_\Delta(M) = M_1(z_1) \qquad z_1 = \bar{z}$
$t(M) = M_2(z_2) \qquad z_2 = z + 2\,ip$
$S_D = t\,o\,S_\Delta \qquad S_D(M) = t\,o\,S_\Delta(M) = t(M_1) = M'$
$z' = z_1 + 2\,ip = \bar{z} + 2\,ip$

. On considère la droite (D) d'équation $y = mx$ avec $m > 0$.



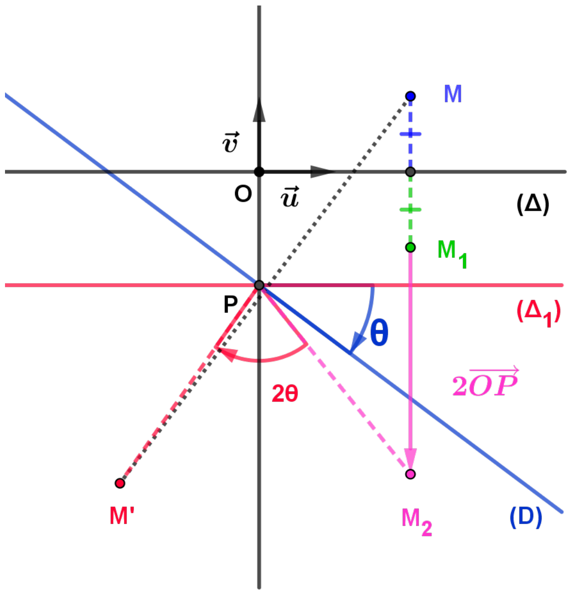
H est le point de coordonnées (1;0) et d'affixe $z_H = 1$.
K est le point de coordonnées (1;m) et d'affixe $z_K = 1 + im$.
$(\vec{u};\overrightarrow{OK}) = \theta \qquad \theta$ appartient à l'intervalle $\left]0;\frac{\pi}{2}\right[$. Donc $\cos\theta > 0$ et $\sin\theta > 0$.
On considère le triangle OHK rectangle en H.
$\cos\theta = \frac{OH}{OK} \qquad \sin\theta = \frac{KH}{OK}$
$OH = 1 \qquad OK = m$ car $m > 0$
$OK = \sqrt{1+m^2}$
$\cos\theta = \frac{1}{\sqrt{1+m^2}} \qquad \sin\theta = \frac{m}{\sqrt{1+m^2}}$
$S_D = (S_D o S_\Delta) o S_\Delta$
$R = S_D o S_\Delta$ est la rotation de centre O et d'angle de mesure 2θ .
$S_\Delta(M) = M_1(z_1) \qquad z_1 = \bar{z}$
$R(M) = M_2(z_2) \qquad z_2 e^{2i\theta} z$
$S_D = R\,o\,S_\Delta$
$S_D(M) = R\,o\,S_\Delta(M) = R(M_1) = M'(z')$
$z' = e^{2i\theta} z_1 = e^{2i\theta}\bar{z}$
$\cos 2\theta = 2\cos^2 2\theta - 1 = 2\times\left(\frac{1}{\sqrt{1+m^2}}\right)^2 - 1 = \frac{2}{1+m^2} - 1 = \frac{1-m^2}{1+m^2}$
$\sin 2\theta = 2\sin\theta\cos\theta = \frac{2m}{1+m^2}$
$e^{2i\theta} = \frac{1-m^2}{1+m^2} + i\frac{2m}{1+m^2}$

. On considère la droite (D) d'équation $y = mx$ avec $m < 0$.



H est le point de coordonnées (1;0) et d'affixe $z_H=1$.
K est le point de coordonnées $(1;m)$ et d'affixe $z_K=1+im$
$(\vec{u};\overrightarrow{OK})=\theta$ θ appartient à l'intervalle $\left]\frac{-\pi}{2}:0\right[$. Donc $\cos\theta>0$ et $\sin\theta<0$.
On considère le triangle OHK rectangle en H.
$\cos\theta=\frac{OH}{OK}$ $\sin\theta=-\frac{KH}{OK}$
$OH=1$ $HK=|m|=-m$ car $m<0$ $OK=\sqrt{1+m^2}$
$\cos\theta=\frac{1}{\sqrt{1+m^2}}$ $\sin\theta=\frac{m}{\sqrt{1+m^2}}$
On vérifie de même que : $S_D(M)=M'(z')$ $z'=e^{2i\theta}\bar{z}$

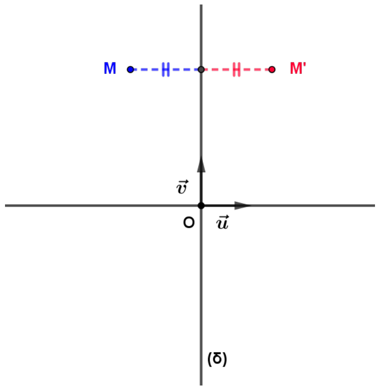
. On considère la droite (D) d'équation $y=mx+p$.
P est le point de coordonnées (0;p) et d'affixe ip.
Δ_1 est la droite d'équation $y=p$



$S_D=(S_D\circ S_{\Delta_1})\circ(S_{\Delta_1}\circ S_\Delta)\circ S_\Delta$
$S_\Delta(M)=M_1(z_1)$ $z_1=\bar{z}$
$S_{\Delta_1}\circ S_\Delta$ est la translation de vecteur $\vec{V}(2ip)$
$S_{\Delta_1}\circ S_\Delta(M)=M_2(z_2)$ $z_2=z+2ip$

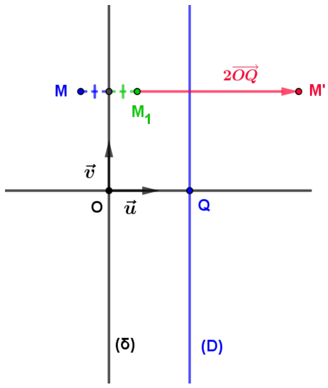
$S_D \circ S_{\Delta_1}$ est la rotation de centre P et d'angle de mesure 2θ.
$S_D \circ S_{\Delta_1}(M)=M_3(z_3)$ $z_3-ip=e^{2i\theta}(z-ip)$ soit $z_3=e^{2i\theta}z+ip-ip\,e^{2i\theta}$
$S_\Delta(M)=M_1$ $z_1=\bar{z}$ $S_{\Delta_1}\circ S_\Delta(M_1)=M_1'$ $z_1'=z_1+2ip=\bar{z}+2ip$
$S_D \circ S_{\Delta_1}(M_1')=M'=S_D(M)$ $z'=e^{2i\theta}z_1'+ip-ip\,e^{2i\theta}$
$z'=e^{2i\theta}(\bar{z}+2ip)+ip-ip\,e^{2i\theta}$
$z'=e^{2i\theta}\bar{z}+ip+ip\,e^{2i\theta}$

. On considère la droite $(D)=(\delta)$: $x=0$ l'axe des ordonnées.



M(z) $z=x+iy$ x et y sont des nombres réels.
M'(z') $z'=-x+iy=-(x-iy)=-\bar{z}$ donc $z=-\bar{z}$

. On considère la droite (D) d'équation $y=q$ (q est un nombre réel).
Q est le point de coordonnées (q;0) et d'affixe $z_Q=q$.



$S_D=(S_D \circ S_\delta)\circ S_\delta$
$S_\delta(M)=M_1(z_1)$ $z_1=-\bar{z}$
$S_D \circ S_\delta$ est la translation de vecteur $\vec{V}=2\overrightarrow{OQ}$.
$S_D \circ S_\delta(M)=M_2$ $z_2=z+2q$
$S_D(M)=S_D \circ S_\delta(M_1)=M'(z')$
$z'=z_1+2q=-\bar{z}+2q$

. **Écriture complexe d'une symétrie orthogonale par rapport à une droite**

Pour toute droite (D) du plan, pour tout point M(z) on a $S_D(M)=M'(z')$ tel que $z'=a\bar{z}+b$ avec a et b sont des nombres complexes et $|a|=1$.

. **Écriture matricielle d'une symétrie orthogonale par rapport à une droite**

$a=\alpha+i\beta$ $\alpha^2+\beta^2=1$ $b=\gamma+i\delta$
M(x;y) $S_D(M)=M'(x';y')$
$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \beta & -\alpha \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} \gamma \\ \delta \end{pmatrix}$$

6. Antidéplacements plans

- Les antidéplacements plans sont les symétries orthogonales par rapport aux droites ou les composés d'une symétrie orthogonale par rapport à une droite (D) et d'une translation de vecteur non normal à (D).
- **Écriture complexe d'un antidéplacement plan**
  f est un antidéplacement plan.
  $f=t\circ S_D$ (t est une translation de vecteur $\vec{V}$ éventuellement nul)
  M(z) $S_D(M)=M_1(z_1)$ $z_1=a\bar{z}+b_1$
  $t(M)=M_2(z_2)$ $z_2=z+b_2$
  $f(M)=t(M_1)=M'(z')$ $z'=z_1+b_2=a\bar{z}+b_1+b_2$
  <u>Conclusion</u>
  L'écriture complexe d'un antidéplacement est : $z'=a\bar{z}+b$ avec a et b nombres complexes et $|a|=1$.
- **Écriture matricielle d'un antidéplacement plan**
  $$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \beta & -\alpha \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} \gamma \\ \delta \end{pmatrix} \quad \text{avec} \quad \alpha^2+\beta^2=1$$

7. Similitudes planes inverses

- On nomme similitude plane inverse, tout composé d'une homothétie de rapport k strictement positif et d'un antidéplacement.
- **Écriture complexe d'une similitude plane inverse**
  $s=f\circ S_D$
  h est une homothétie de rapport $k>0$, M(z) $h(M)=M_1(z_1)$ $z_1=kz+b_1$.
  f est un antidéplacement $f(M)=M_2(z_2)$ $z_2=a_2\bar{z}+b_2$ avec $|a_2|=1$.
  $s(M)=f(M_1)=M'(z')$
  $z'=a_2\bar{z_1}+b_2=a_2(k\bar{z}+\bar{b_1})+b_2=k\,a_2\bar{z}+a_2\bar{b_1}+b_2$ car k est un nombre réel donc $\bar{k}=k$.
  On note : $a=k\,a_2$ et $b=a_2\bar{b_1}+b_2$ donc $z'=a\bar{z}+b$ avec a et b nombres complexes a non nul.
  <u>Conclusion</u>
  L'écriture complexe d'une similitude plane inverse est : $z'=a\bar{z}+b$ avec a et b nombres complexes a non nul.
  Le rapport de la similitude est : $|a|=k$.
- **Écriture matricielle d'une similitude plane inverse**
  $a=\alpha+i\beta$ $b=\gamma+i\delta$ $z=x+iy$ $z'=x'+iy'$
  $z'=a\bar{z}+b \Leftrightarrow x'+iy'=(\alpha+i\beta)(x-iy)+\gamma+i\delta=\alpha x+\beta y+\gamma+i(\beta x-\alpha y+\delta)$
  $$\Leftrightarrow \begin{cases} x'=\alpha x+\beta y+\gamma \\ y'=\beta x-\alpha y+\delta \end{cases} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \beta & -\alpha \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} \gamma \\ \delta \end{pmatrix}$$
- **Problème réciproque**
  a et b sont des nombres complexes fixés, a non nul.
  Soit F l'application qui au point M(z) associe le point M'(z') tel que $z'=a\bar{z}+b$.
  On détermine l'ensemble des points invariants par F.
  $F(M)=M \Leftrightarrow z=a\bar{z}+b$
  En utilisant les notations précédentes on obtient :
  $$\Leftrightarrow \begin{cases} x=\alpha x+\beta y+\gamma \\ y=\beta x-\alpha y+\delta \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (1-\alpha)x-\beta y=\gamma \\ -\beta x+(1+\alpha)y=\delta \end{cases}$$
  On calcule le déterminant du système.
  $$\Delta=\begin{vmatrix} 1-\alpha & -\beta \\ -\beta & 1+\alpha \end{vmatrix}=1-\alpha^2-\beta^2$$
  1[er] cas
  $\Delta=0 \Leftrightarrow 1-\alpha^2-\beta^2=0 \Leftrightarrow \alpha^2+\beta^2=1 \Leftrightarrow |a|=1$

Pour tous points M et N du plan. $F(M)=M'$ et $F(N)=N'$.

$z_{M'}=a\bar{z}_M+b \qquad z_{N'}=a\bar{z}_N+b$

$z_{M'}-z_{N'}=a(\bar{z}_M-\bar{z}_N)=a(\overline{z_M-z_N})$

$M'N'=|z_{M'}-z_{N'}|=|a|\times|\overline{z_M-z_N}|=|a|\times|z_M-z_N|=|a|\times MN=MN$ car $|a|=1$.

F est donc une isométrie et F n'est pas un déplacement.

✔ $\beta=0$ et $\alpha=1$

Le système devient : $\begin{cases} 0.x+0.y=\gamma \\ 0.x+2.y=\delta \end{cases}$

+ Si $\gamma=0$ alors l'ensemble des points invariants par F est la droite (D) d'équation : $y=\frac{\delta}{2}$

F est la symétrie orthogonale par rapport à la droite (D).

+ Si $\gamma\neq 0$ alors F n'admet pas de point invariant et F n'est pas une translation.

F est un antidéplacement sans point invariant.

✔ $\beta=0$ et $\alpha=-1$

Le système devient : $\begin{cases} 2.x+0.y=\gamma \\ 0.x+0.y=\delta \end{cases}$.

+ Si $\delta=0$ alors l'ensemble des points invariants par F est la droite (D) d'équation : $x=\frac{\gamma}{2}$

F est la symétrie orthogonale par rapport à la droite (D).

+ Si $\delta\neq 0$ alors F n'admet pas de point invariant et F n'est pas une translation.

F est un antidéplacement sans point invariant.

✔ $\beta\neq 0$

On multiplie la première équation par $-\beta$ et la deuxième équation par $(1-\alpha)$.

Le système devient : $\begin{cases} -\beta(1-\alpha)x+\beta^2 y=-\beta\gamma \\ -\beta(1-\alpha)x+(1-\alpha^2)y=(1-\alpha)\delta \end{cases}$ or $1-\alpha^2=\beta^2$.

+ Si $-\beta\gamma=(1-\alpha)\delta$ alors l'ensemble des points invariants par F est la doite (d) d'équation : $-\beta(1-\alpha)x+\beta^2 y=-\beta\gamma$

F est la symétrie orthogonale par rapport à la droite (D).

+ Si $-\beta\gamma\neq(1-\alpha)\delta$ alors F n'admet pas de point invariant et F n'est pas une translation.

F est un antidéplacement sans point invariant.

✔ <u>Conclusion</u>

Si $\alpha^2+\beta^2=1$ alors F est un antidéplacement.

$2^{\text{ième}}$ cas

$\Delta\neq 0 \iff \alpha^2+\beta^2\neq 1 \iff |a|=k\neq 1$

Le système admet un unique couple solution et F admet un unique point invariant : I.

Soit h l'homothétie de centre I et de rapport k.

h^{-1} est l'homothétie de centre I et de rapport $\frac{1}{k}$.

$h^{-1}(M)=M_1(z_1) \qquad z_1=\frac{1}{k}z+b_1$

On considère l'application $G=h^{-1}\circ F$

$G(M)=h^{-1}(M')=M'_1(z'_1)$

$z'_1=\frac{1}{k}z'+b_1=\frac{1}{k}(a\bar{z}+b)+b_1=\frac{1}{k}a\bar{z}+\frac{b}{k}+b_1$

On note : $a'=\frac{1}{k}a$ et $b'=\frac{b}{k}+b_1$

$z'_1=a'\bar{z}+b'$ et $|a'|=\frac{1}{k}|a|=1$

G est un antidéplacement et le point I est invariant par G.

G est une symétrie orthogonale par rapport à une droite.

$G = h^{-1} \circ F \quad \Leftrightarrow \quad h \circ G = F$

<u>Conclusion</u>

F est une similitude plane inverse de rapport $k=|a|$ et de centre I.