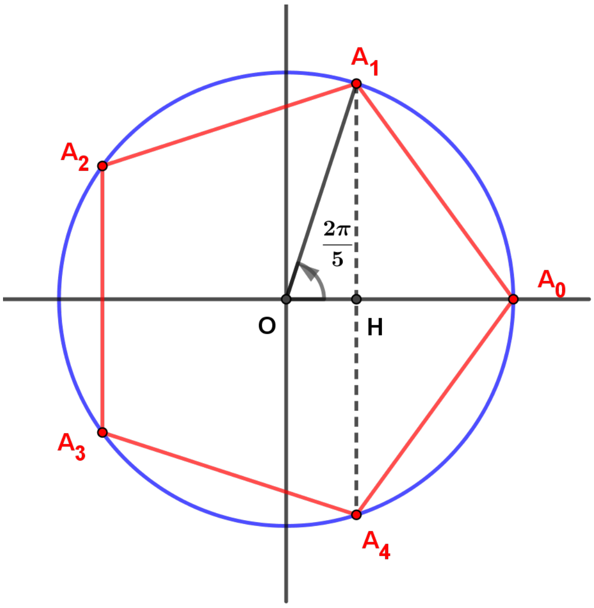
# Pentagone régulier
# Construction

1. Introduction p2
2. Construction du pentagone régulier p3

## 1. Introduction

On veut construire un pentagone régulier inscrit dans un cercle trigonométrique. (L' unité de longueur est le rayon du cercle).




Les affixes des cinq sommets sont les racines cinquièmes de l'unité.

On note $\omega=e^{i2\frac{2\pi}{5}}=\cos\frac{2\pi}{5}+i\sin\frac{2\pi}{5}$

L'affixe de $A_1$ est $\omega$ ou $\omega^1$.
L'affixe de $A_2$ est $\omega^2$
L'affixe de $A_3$ est $\omega^3$
L'affixe de $A_4$ est $\omega^4$
L'affixe de $A_0$ est $\omega^0=1$

$\omega^1$ et $\omega^4$ sont deux nombres complexes conjugués car $\frac{2\pi}{5}+\frac{8\pi}{5}=0\ (2\pi)$ donc $\cos\frac{2\pi}{5}=\cos\frac{8\pi}{5}$.

$\omega^4$ et $\omega^6$ sont deux nombres complexes conjugués car $\frac{4\pi}{5}+\frac{6\pi}{5}=0\ (2\pi)$ donc $\cos\frac{4\pi}{5}=\cos\frac{6\pi}{5}$.

La somme des $5$ racines cinquièmes de l'unité est nulle.
La partie réelle de cette somme est nulle et est égale à :

$$1+\cos\frac{2\pi}{5}+\cos\frac{4\pi}{5}+\cos\frac{6\pi}{5}+\cos\frac{8\pi}{5}=0 \quad\Leftrightarrow\quad 1+2\cos\frac{2\pi}{5}+2\cos\frac{4\pi}{5}=0$$

Or pour tout nombre réel x, on a : $\cos 2x=2\cos^2 x-1$ donc $\cos\frac{4\pi}{5}=2\cos^2\frac{2\pi}{5}-1$.

$$1+2\cos\frac{2\pi}{5}+4\cos^2\left(\frac{2\pi}{5}\right)-2=0 \quad\Leftrightarrow\quad 4\cos^2\left(\frac{2\pi}{5}\right)+2\cos\frac{2\pi}{5}-1=0.$$

Donc $\cos\frac{2\pi}{5}$ est une solution de l'équation : $4X^2+2X-1=0$

$0<\frac{2\pi}{5}<\frac{\pi}{2}$ donc $\cos\frac{2\pi}{5}>0$

$\Delta=2^2+4\times4=20=(2\sqrt{5})^2$

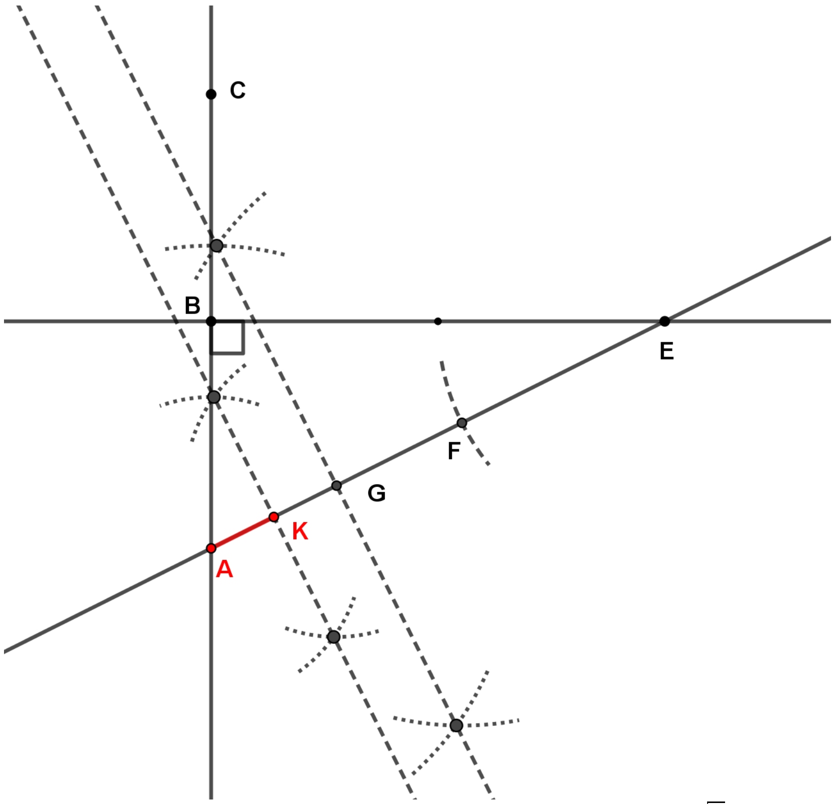
$X_1=\frac{-2-2\sqrt{5}}{8}=\frac{-1-\sqrt{5}}{4}$ $\qquad X_2=\frac{-2+2\sqrt{5}}{8}=\frac{-1+\sqrt{5}}{4}$

$X_1<0$ et $X_2>0$ donc $\cos\frac{2\pi}{5}=\frac{-1+\sqrt{5}}{4}$

<u>Remarque</u>

Si on est capable de tracer la longueur $\frac{-1+\sqrt{5}}{4}$ en utilisant la règle et le compas alors on est capable de placer le point H tel que $OH=\cos\frac{2\pi}{5}$ puis les points $A_1$ et $A_4$ et en reportant l'angle $\frac{2\pi}{5}$ on peut placer les points $A_2$ et $A_3$.

L'unité de longueur est donnée.
On place sur une droite (d) le point A puis les points B et C tels que AB=1 et AC =2 (BC=1).
On trace la médiatrice $(\delta)$ de [AC], sur $(\delta)$ on place le point E tel que BE=2.




Le triangle ABE est rectangle en B $AE^2=AB^2+AE^2=1^5+2^2=5$ donc $AE=\sqrt{5}$.
Sur le segment [AE], on place le point F tel que EF=1 donc $AF=-1+\sqrt{5}$..

G est le milieu de [AF] donc $AG=\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$.

K est le milieu de [AG] donc $AK=\frac{-1+\sqrt{5}}{4}$.

$A\,K=\cos\frac{2\pi}{5}$.

Le pentagone régulier est constructible à la règle et au compas.

## 2. Construction du pentagone régulier

Soit $\mathscr{C}$ un cercle trigonométrique.
$OA_0=OB=OA'=OB'=1$.
$(O;\overrightarrow{OA_0};\overrightarrow{OB})$ est un repère orthonormé direct.

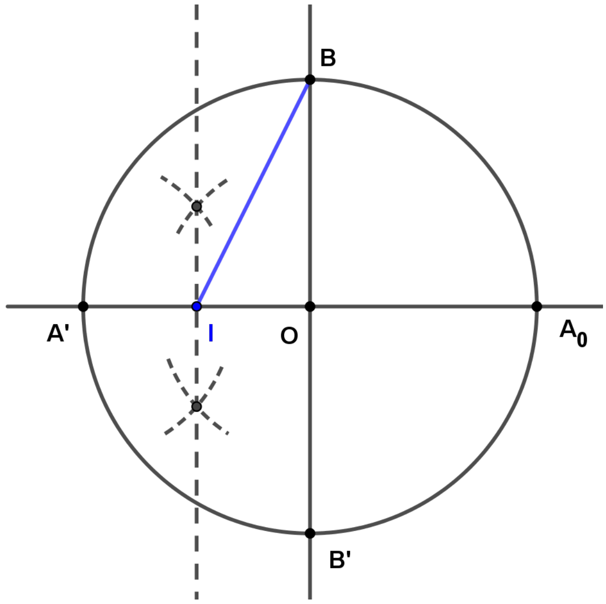
<u>Première étape</u>

On construit I le milieu de [OA'].

L'affixe du point I est : $-\frac{1}{2}$.

En utilisant le théorème de Pythagore dans le triangle OIB rectangle en B.

On obtient : $IB^2 = \frac{1}{4} + 1 - \frac{5}{4}$ donc $IB = \frac{\sqrt{5}}{2}$ .




Deuxième étape

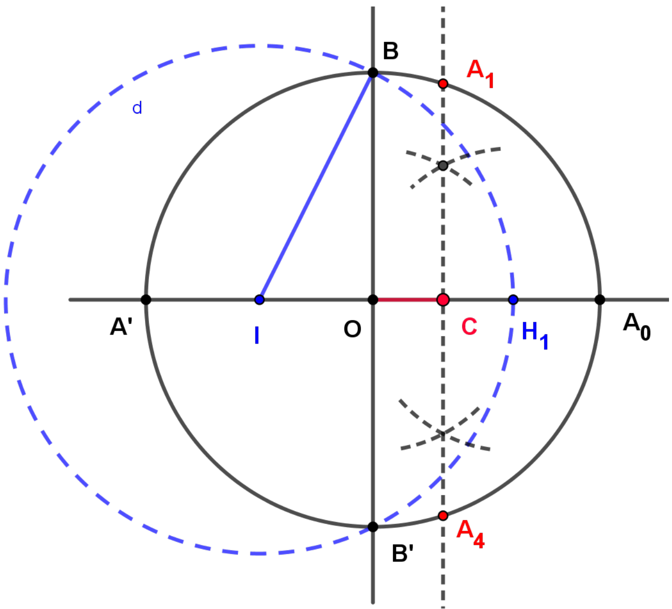
On trace le cercle ( $\mathscr{C}_1$ ) de centre $I$ passant par B, on note $H_1$ le point d'intersection de ( $\mathscr{C}_1$ ) et de $(A'A_0)$ appartenant au segment $[OA_0]$ .

Donc $IH_1 = \frac{\sqrt{5}}{2}$ et $H_1\left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2}\right)$ .

Soit $C$ le milieu de $[OH_1]$.

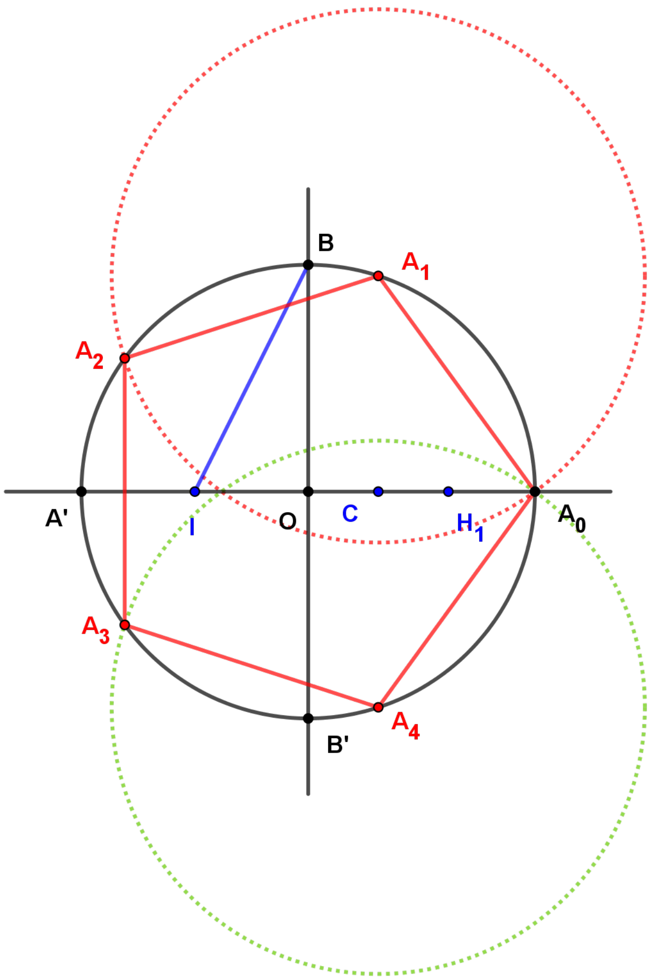
L'affixe du point $C$ est $\left(-\frac{1}{4} + \frac{\sqrt{5}}{4}\right)$ et $OC = \cos\frac{2\pi}{5}$ .

Les points $A_1$ et $A_4$ sont les points de ( $\mathscr{C}$ ) ayant pour abscisse $\cos\frac{2\pi}{5}$ .




Troisième étape

Pour terminer la construction, il suffit de construire les cercles de centres respectifs $A_1$ et $A_4$ passant par $A_0$.


B
$A_1$
$A_2$
A'
I
O
C
$H_1$
$A_0$
$A_3$
$A_4$
B'