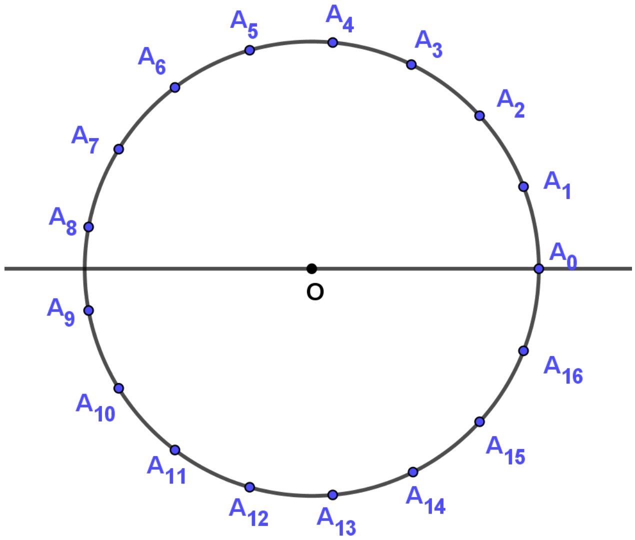
Heptadécagone régulier
Construction

1. Introduction

Un heptadécagone est un polygone ayant 17 côtés.
On veut construire un heptadécagone régulier inscrit dans un cercle trigonométrique (l'unité de longueur est le rayon du cercle).



Les dix-sept sommets ont pour affixes les dix-sept racines dix-septièmes de l'unité.

On note $\omega=e^{i\frac{2\pi}{17}}=\cos\frac{2\pi}{17}+i\sin\frac{2\pi}{17}$.

Les dix-sept racines dix-septièmes de l'unité sont : $\omega^0=1$; ω^1; $\omega^2;\ldots\omega^{16}$.

La somme des 17 racines dix-septièmes de l'unité est nulle.

$1+\omega^1+\omega^2+\ldots+\omega^{16}=0 \quad\Leftrightarrow\quad \omega^1+\omega^2+\ldots+\omega^{16}=-1$

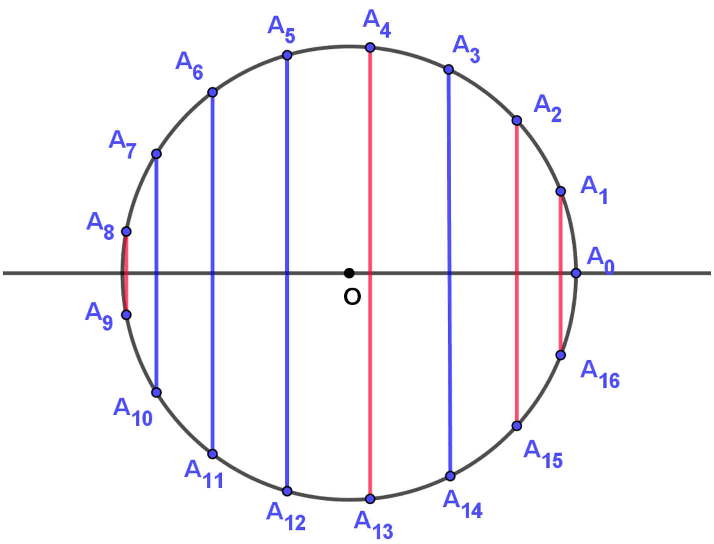
La somme des seize racines dix-septièmes de l'unité distinctes de 1 est égale à -1.

Les seize racines dix-septièmes de l'unité distinctes de 1 sont conjuguées deux à deux.

ω^1 et ω^{16} – ω^2 et ω^{15} –…– ω^8 et ω^9

Pour construire l'heptagone régulier, il suffit de construire A_1 ou $\cos\frac{2\pi}{17}$ à la règle et au compas.

<u>Première étape</u>



On sépare les seize racines dix-septièmes de l'unité en deux groupes de huit éléments et on considère les sommes des deux groupes.

$x_1=\omega^1+\omega^2+\omega^4+\omega^8+\omega^9+\omega^{13}+\omega^{15}+\omega^{16}$ $\qquad x_2=\omega^3+\omega^5+\omega^6+\omega^7+\omega^{10}+\omega^{11}+\omega^{12}+\omega^{14}$

Le choix des éléments des groupes n'est pas arbitraire.
Une racine et son conjugué appartiennent au même groupe donc x_1 et x_2 sont deux nombres réels.
On peut aussi remarquer que les éléments du deuxième groupe sont les cubes des éléments du premier groupe.
$(\omega^1)^3=\omega^3$; $(\omega^2)^3=\omega^6$; $(\omega^4)^3=\omega^{12}$; $(\omega^8)^3=\omega^{24}=\omega^7$; $(\omega^9)^3=\omega^{27}=\omega^{10}$; $(\omega^{13})^3=\omega^{39}=\omega^5$
$(\omega^{15})^3=\omega^{45}=\omega^{11}$; $(\omega^{16})^3=\omega^{48}=\omega^{14}$.

On obtient :
$$x_1=2\cos\frac{2\pi}{17}+2\cos\frac{4\pi}{17}+2\cos\frac{8\pi}{17}+2\cos\frac{16\pi}{17}$$
$$x_2=2\cos\frac{6\pi}{17}+2\cos\frac{10\pi}{17}+2\cos\frac{12\pi}{17}+2\cos\frac{14\pi}{17}$$

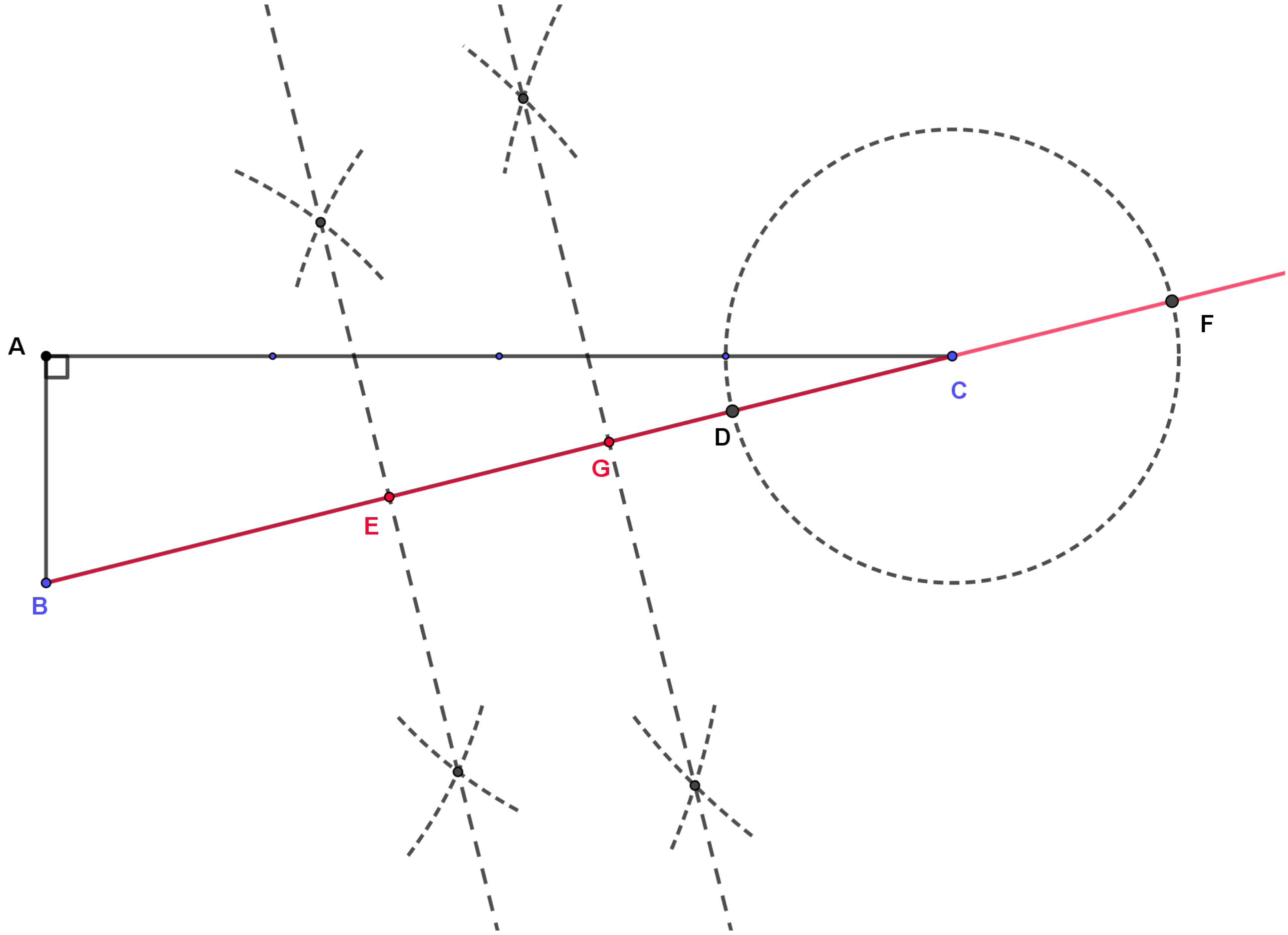
On veut démontrer que $x_1>0$.
$\frac{\pi}{4}=\frac{4\pi}{16}>\frac{4\pi}{17}>\frac{2\pi}{17}$ donc $\cos\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}<\cos\frac{4\pi}{17}<\cos\frac{2\pi}{17}$ et $\cos\frac{2\pi}{17}+\cos\frac{4\pi}{17}>\sqrt{2}$
Car la fonction cosinus est strictement décroissante sur $[0;\pi]$
D'autre part $\frac{8\pi}{17}>\frac{\pi}{2}$ donc $\cos\frac{8\pi}{17}>0$ et $\frac{16\pi}{17}<\pi$ donc $\cos\frac{16\pi}{17}>-1$
conséquence :
$x_1>\sqrt{2}+0-1>0$

$x_1+x_2=-1$ (somme des seize racines dix-septièmes de l'unité distinctes de 1.

$x_1\times x_2=(\omega^1+\omega^2+\omega^4+\omega^8+\omega^9+\omega^{13}+\omega^{15}+\omega^{16})\times(\omega^3+\omega^5+\omega^6+\omega^7+\omega^{10}+\omega^{11}+\omega^{12}+\omega^{14})$.
Si on développe, on obtient une somme de 64 termes, chaque terme est une racine dix-septième de l'unité (exemple : $\omega^9\times\omega^{12}=\omega^{21}=\omega^4$). On peut vérifier que l'on obtient quatre fois chaque racine dix-septième de l'unité distincte de 1 c'est à dire que la somme des 64 termes est égale à -4.
$x_1\times x_2=-4$.

x_1 et x_2 sont donc les solutions de l'équation : $X^2+X-4=0$ et $x_1>0$.
$\Delta=1^2+4\times4=17$
$x_1=\frac{-1+\sqrt{17}}{2}>0$ $\quad x_2=\frac{-1-\sqrt{17}}{2}<0$.
Pour construire x_1 et x_2, on construit d'abord $\sqrt{17}$, longueur de l'hypoténuse d'un triangle dont les longueurs des côtés de l'angle droit sont : 1 et 4.
Cette construction peut-être faite à la règle et au compas.
$AB=1$ $\quad AC=4$ et $BC=\sqrt{17}$

On trace le cercle de centre C de rayon 1.
L'intersection de ce cercle et du segment [BC] est le point D.
$CD=1$ et $BD=\sqrt{17}-1$.
On construit le point E milieu de [BD] donc ;
$$BE=\frac{\sqrt{17}-1}{2}=x_1$$
Le cercle, de centre C et de rayon 1, coupe la droite (BC) en deux points D et F (extérieur au segment {BC]).
$CF=1$ et $BF=\sqrt{17}+1$
On construit le point G milieu de [BF] donc :
$$BG=\frac{\sqrt{17}+1}{2}=-x_2$$

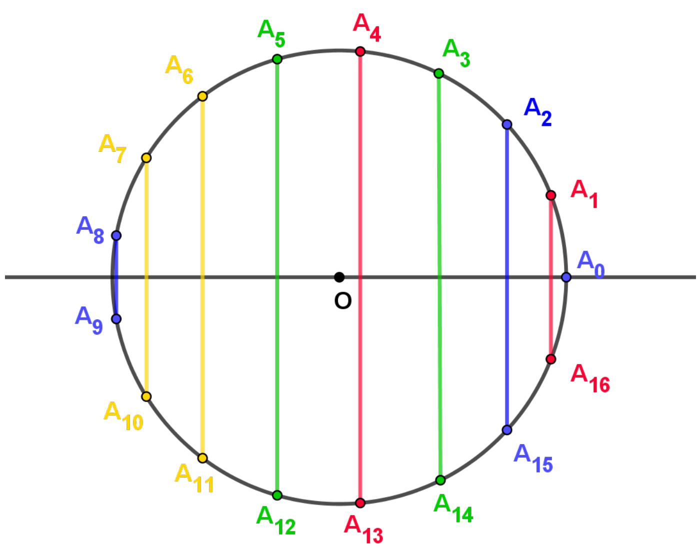


Deuxième étape
On partage les seize racines dix-septième de l'unité en quatre groupes de quatre éléments en séparant les groupes initiaux en deux.

$y_1=\omega^1+\omega^4+\omega^{13}+\omega^{16}$ $\quad$ $y_2=\omega^2+\omega^8+\omega^9+\omega^{15}$

$y_3=\omega^3+\omega^5+\omega^{12}+\omega^{14}$ $\quad$ $y_4=\omega^6+\omega^7+\omega^{10}+\omega^{11}$

Dans chaque groupe, il y a deux éléments et leurs conjugués.
y_1; y_2; y_3 et y_4 sont des nombres réels.



$y_1=2\cos\frac{2\pi}{17}+2\cos\frac{8\pi}{17}$

$0<\frac{2\pi}{17}<\frac{8\pi}{17}<\frac{\pi}{2}$ $\cos\frac{2\pi}{17}>\cos\frac{8\pi}{17}>0$ et $y_1>0$.

$y_3=2\cos\frac{6\pi}{17}+2\cos\frac{10\pi}{17}=4\cos\frac{8\pi}{17}\cos\frac{4\pi}{17}>0$ et $y_3>0$

$y_1+y_3=x_1$

$y_1\times y_2=(\omega^1+\omega^4+\omega^{13}+\omega^{16})\times(\omega^7+\omega^8+\omega^9+\omega^{13})=$

$y_1\times y_2=\omega^3+\omega^9+\omega^{10}+\omega^{16}+\omega^6+\omega^{12}+\omega^{23}+\omega^2+\omega^{15}+\omega^5+\omega^{11}+\omega^1+\omega^7+\omega^8+\omega^{14}=-1$

(somme des seize racines dix-septièmes de l'unité distinctes de 1).

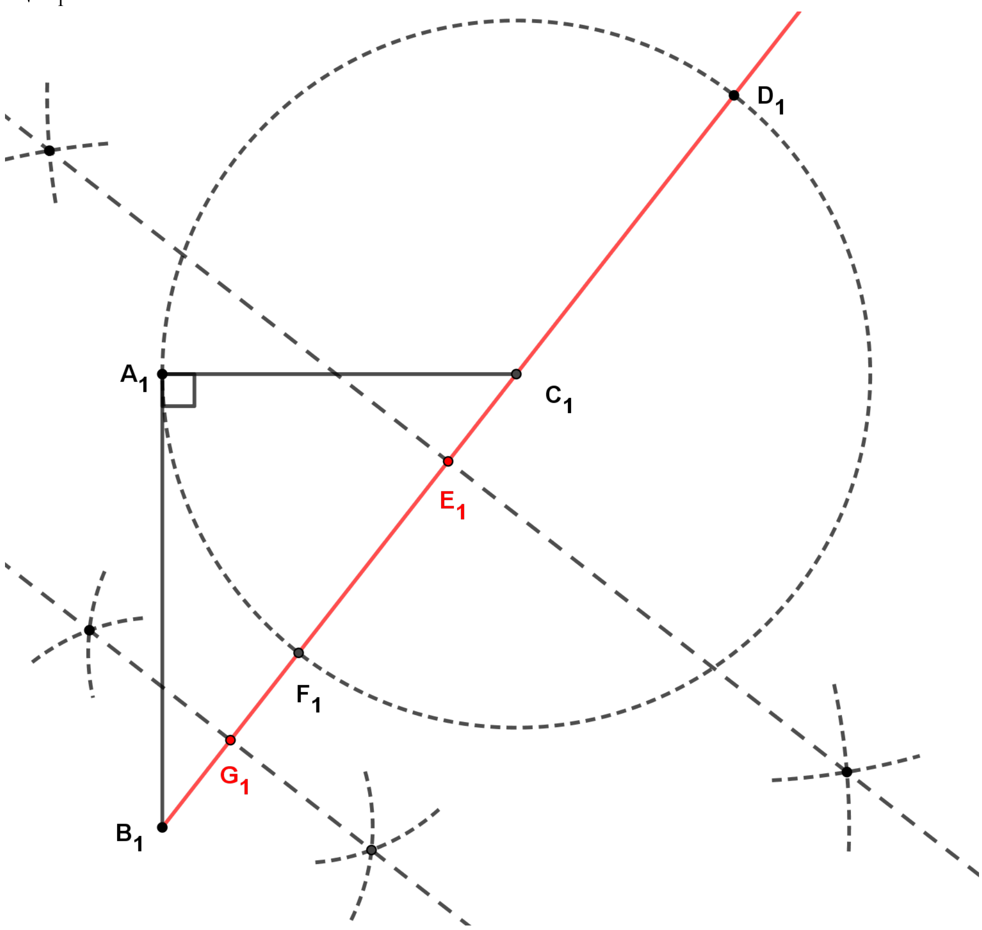
On vérifie de même que : $y_3+y_4=x_2$ et $y_3\times y_4=-1$

y_1 et y_2 sont les solutions de l'équation : $X^2-x_1X-1=0$

$\Delta=x_1^2+4$ $y_1=\frac{x_1+\sqrt{x_i^2+4}}{2}$ $y_2=\frac{x_1-\sqrt{x_1^2+4}}{2}$

Pour construire y_1 et y_2, on construit un triangle $A_1B_1C_1$ rectangle en A_1 tel que $A_1B_1=2$ et $A_1C_1=x_1$ cette construction est faite au compas.

On obtient $B_1C_1=\sqrt{x_1^2+4}$



On construit le cercle de centre C_1 et de rayon x_1 (ce cercle passe par A_1).

Les points d'intersection de ce cercle et de la droite (B_1C_1) sont les points D_1 et F_1 (D_1 étant le point extérieur au segment $[B_1C_1]$).

$C_1D_1=x_1$ $B_1D_1=B_1C_1+C_1D_1=\sqrt{x_1^2+4}+x_1$

On construit le point E_1 milieu du segment $[B_1D_1]$ donc $B_1E_1=\frac{\sqrt{x_1^2+4}+x_1}{2}=y_1$.

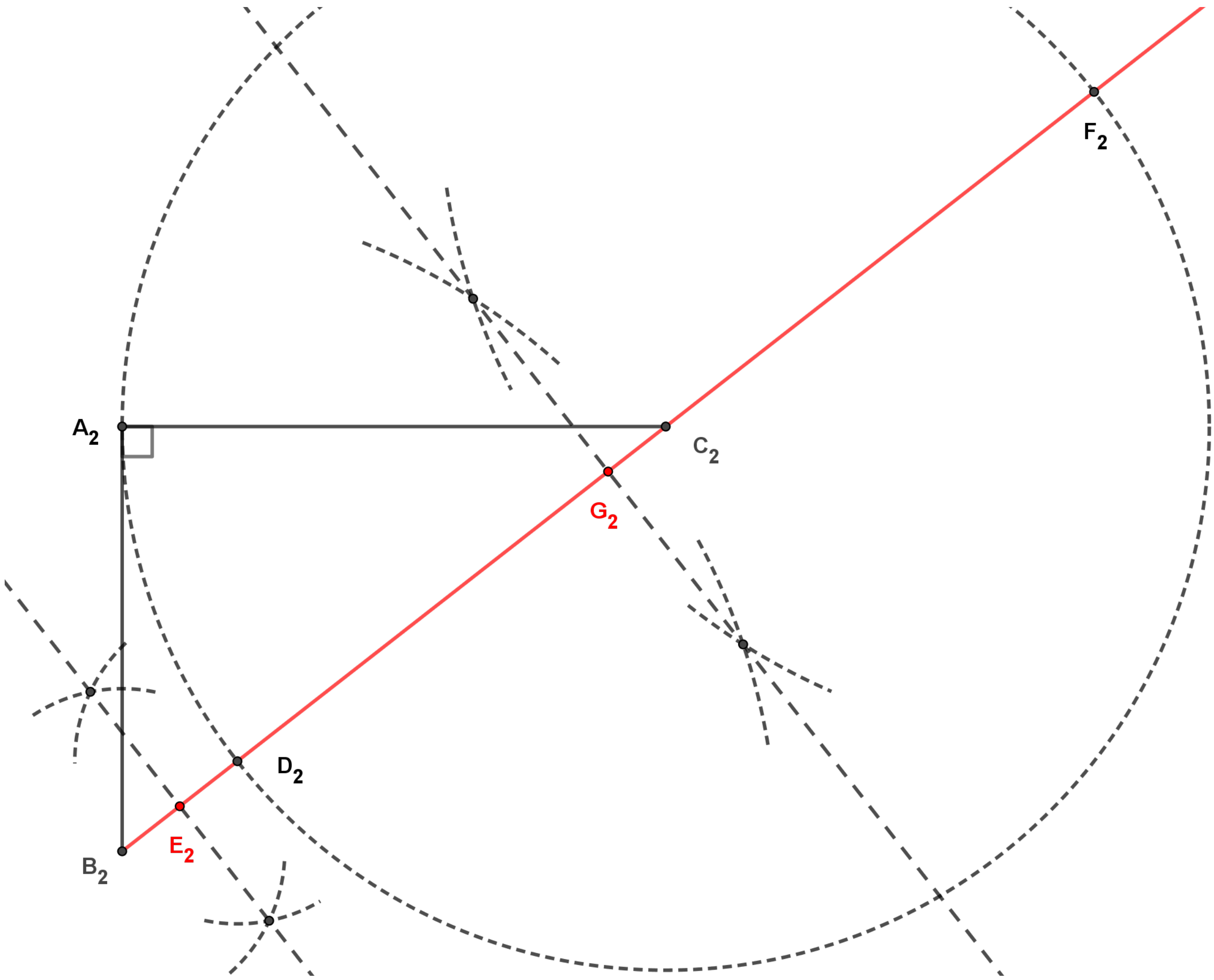
$y_3+y_4=x_2$ et $y_3\times y_4=-1$

y_3 et y_4 sont les solutions : $X^2-x_2X-1=0$ $\Delta=x_2^2+4$

$y_3=\dfrac{x_2+\sqrt{x_2^2+4}}{2}>0$ $y_4=\dfrac{x_2-\sqrt{x_2^2+4}}{2}<0$.

Attention : $x_2<0$

On construit un triangle $A_2B_2C_2$ rectangle en A_2 tel que $A_2B_2=2$ et $B_2C_2=-x_2>0$
On peut effectuer cette construction à la règle et au compas.



On construit le cercle de centre C_2 et de rayon $-x_2$ (ce cercle passe par A_2).
Les points d'intersection de ce cercle et de la droite (B_2C_2) sont les points D_2 et F_2 (D_2 étant le point intérieur au segment $[B_2C_2]$).

$C_2D_2=-x_2$ $B_2D_2=B_2C_2-C_2D_2=\sqrt{x_2^2+4}+x_2$

On construit le point E_2 milieu du segment $[B_2D_2]$.

$B_2D_2=\dfrac{\sqrt{x_2^2+4}+x_2}{2}=y_3>0$

$C_2F_2=-x_2$ et $B_2F_2=B_2C_2+C_2D_2=\sqrt{x_2^2+4}-x_2$

On construit le point G_2 milieu du segment $[B_2F_2]$.

Donc $B_2G_2=\dfrac{\sqrt{x_2^2+4}-x_2}{2}=-y_4$

Troisième étape

On pose :

$z_1=\omega^1+\omega^{16}=2\cos\dfrac{2\pi}{17}$

$z_2=\omega^4+\omega^{13}=2\cos\dfrac{8\pi}{17}$

$0<\dfrac{2\pi}{17}<\dfrac{8\pi}{17}<\dfrac{\pi}{2}$ donc $\cos\dfrac{2\pi}{17}>\cos\dfrac{8\pi}{17}>0$ et $z_1>z_2$.

$z_1+z_2=\omega^1+\omega^4+\omega^{13}+\omega^{16}=y_1$

$z_1\times z_2=(\omega^1+\omega^{16})\times(\omega^4+\omega^{13})=\omega^5+\omega^{14}+\omega^3+\omega^{12}=y_3$

z_1 et z_2 sont les solutions de l'équation : $X^2\times y_1X+y_3=0$

$\Delta=y_1^2-4y_3>0$ car l'équation admet deux racines réelles distinctes.

$z_1=\dfrac{y_1+\sqrt{\Delta}}{2}>0$ et $z_2=\dfrac{y_1-\sqrt{\Delta}}{2}>0$ le produit des racines est positif.

On remarque : $\Delta=y_1^2-(2\sqrt{y_3})^2$.

On construit d'abord $\sqrt{y_3}$.

On construit un segment de diamètre [AB] tel que AB=1.

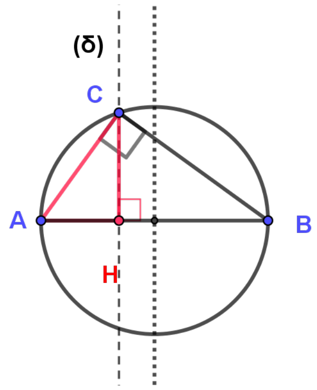
On trace le cercle de diamètre [AB].

H est le point du segment [AB] tel que $AH=y_3$

(δ) est la perpendiculaire à (AB) passant par H.

C est l'un des point d'intersection du cercle de diamètre [AB] et de (δ) .

Le triangle ABC est rectangle en C.



Les triangles ABC et ABH sont semblables (leurs angles sont égaux deux à deux.

(remarque : la similitude plane inverse de centre A et de rapport $\sqrt{y_3}$ et d'axe (d) bissectrice de l'angle $\widehat{BAC}$ transforme le triangle ABC en triangle ACH).

On obtient ; $\dfrac{AC}{AB}=\dfrac{AH}{AC}$ $\Leftrightarrow$ $AC^2=AB\times AH=AH$ (car AB=1)

$AC^2=AH=y_3$ $\Leftrightarrow$ $AC=\sqrt{y_3}$

$AB=y_1$ $\quad$ $AC=2\sqrt{y_3}$

On trace le segment [AB] puis le cercle de diamètre [AB].

On trace le cercle de centre A et de rayon $2\sqrt{3}$, C est l'un des points d'intersection de ces deux cercles.

Le triangle ABC est un rectangle en C.

$BC^2=y_1^2-(2\sqrt{y_3})^2=\Delta$ $\Leftrightarrow$ $BC=\sqrt{\Delta}$

$z_1=\dfrac{y_1+\sqrt{\Delta}}{2}$

On trace le' cercle de centre B passant par C.

On note D le point d'intersection de ce cercle et de la droite (AB) extérieur au segment [AB].

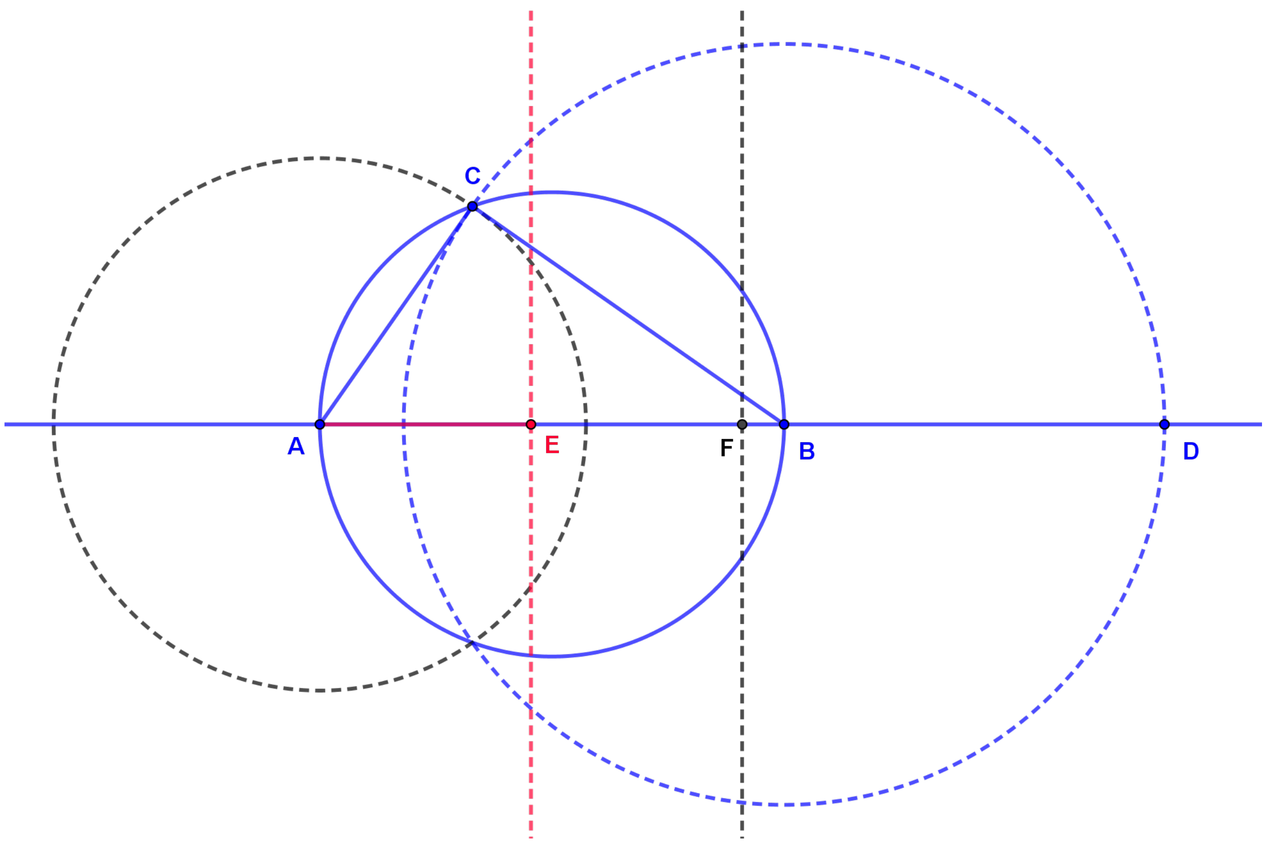
$AD = y_1 + \sqrt{\Delta}$

Soit F le milieu de [AD].

$AD = \dfrac{y_1 + \sqrt{\Delta}}{2} = z_1 = 2\cos\dfrac{2\pi}{17}$

Soit E le milieu de [AF]

$AE = \cos\dfrac{2\pi}{17}$



Conclusion

On peut construire à la règle et au compas un heptagone régulier.

Remarque

$x_1 = \dfrac{-1+\sqrt{17}}{2}$ $\qquad x_1 = \dfrac{-1-\sqrt{17}}{2}$

$y_1 = \dfrac{x_1 + \sqrt{x_1^2+4}}{2} = \dfrac{-1+\sqrt{17}+\sqrt{34-2\sqrt{17}}}{4}$

$y_3 = \dfrac{x_2 + \sqrt{x_2^2+4}}{2} = \dfrac{-1-\sqrt{17}+\sqrt{34+2\sqrt{17}}}{4}$

$z_1 = 2\cos\dfrac{2\pi}{17} = \dfrac{y_1+\sqrt{y_1^2-4y_3}}{2}$

On obtient :

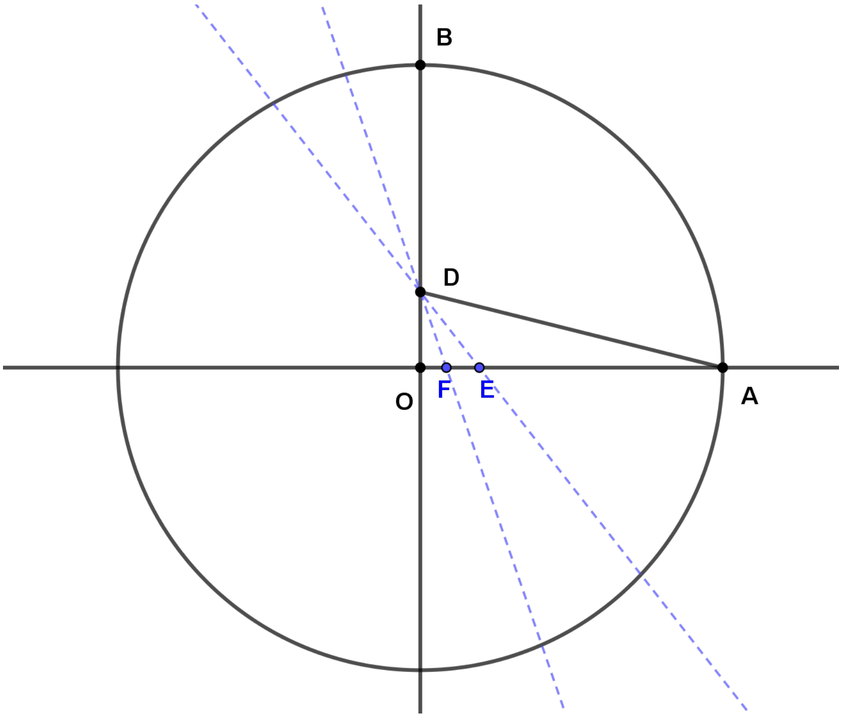
$\cos\dfrac{2\pi}{17} = \dfrac{1}{16}[-1+\sqrt{17}+\sqrt{34-2\sqrt{17}}+\sqrt{68+12\sqrt{17}+2(-1+\sqrt{17})\sqrt{34-2\sqrt{17}}-16\sqrt{34+2\sqrt{17}}}]$

2. Construction de Richmond (1893)

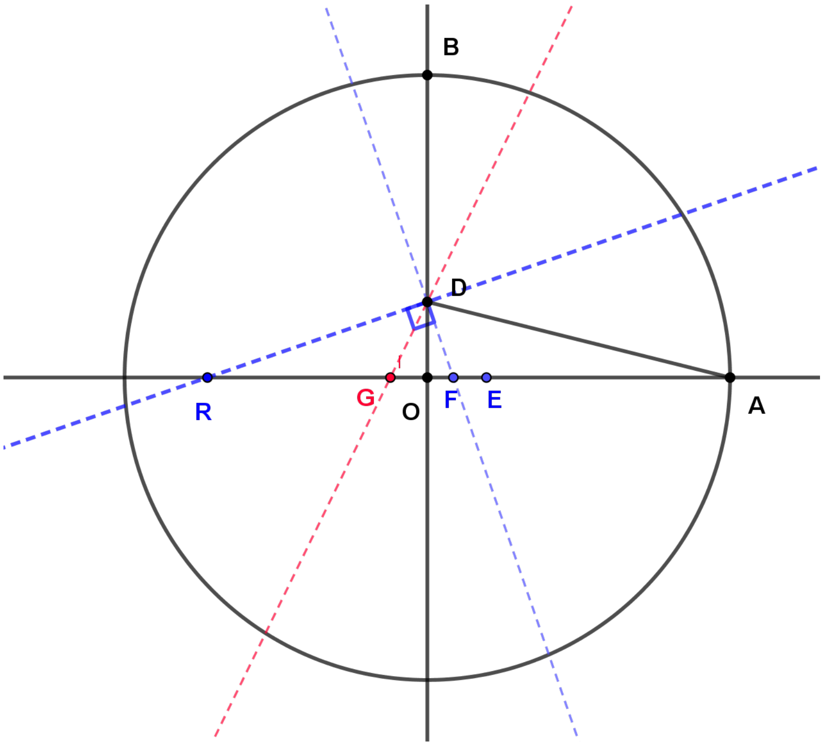
Première étape
On considère un cercle trigonométrique (L'unité choisie dans ceyye partie n'est pas la même que celle de la première partie).

On construit le point D d'affixe : $\frac{1}{4}i$ (remarque : $AD=\frac{\sqrt{17}}{4}$).

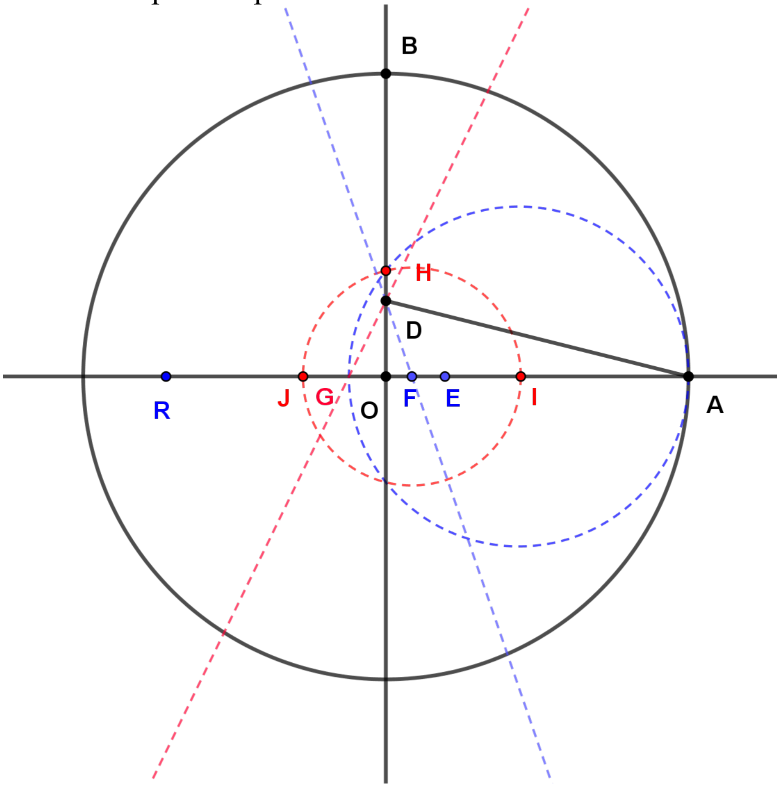
Puis on construit l'angle $\widehat{ODF}=\frac{1}{4}\widehat{ODA}$.



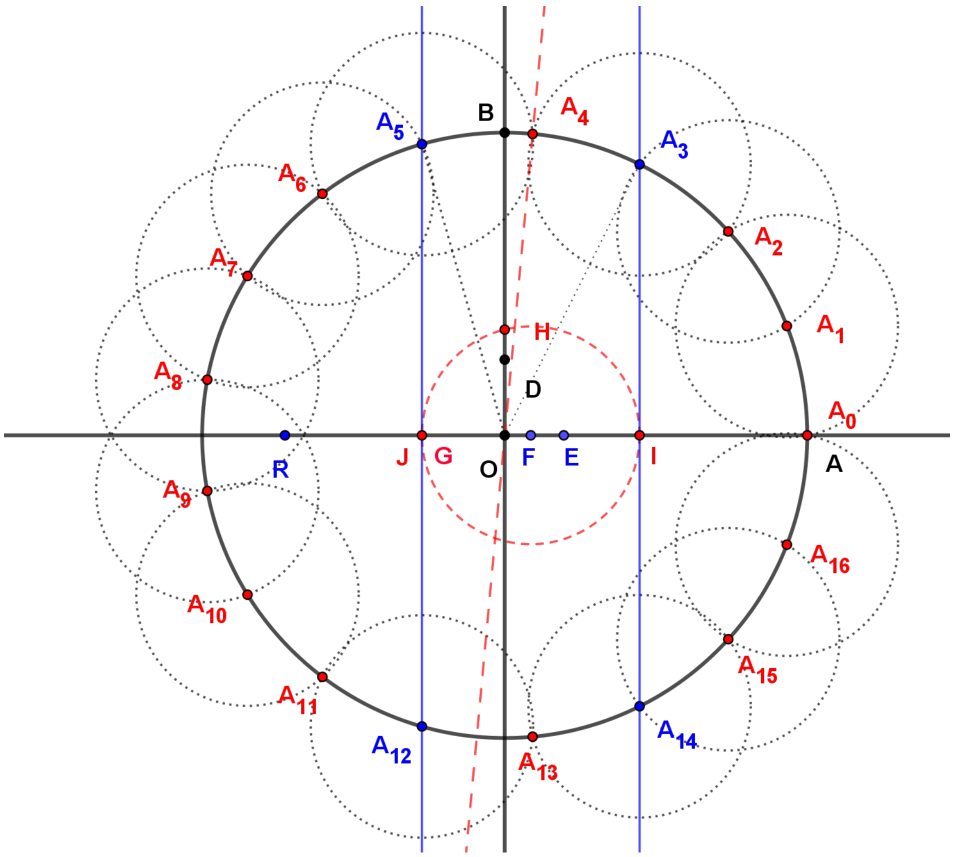
Deuxième étape
On construit la perpendiculaire à (DF) passant par D, on obtient la droite (RD).
(DG) est la bissectrice de $\widehat{RDF}$ donc $\widehat{GDF}=\frac{\pi}{4}$



Troisième étape
On construit le cercle de diamètre [AG].
H est le point d'intersection d'ordonnée positive du cercle précédent et de droite (OA).
On construit le cercle de centre F et passant par H.



Quatrième étape
I et J sont les deux points d'intersection du dernier cercle construit et de l'axe des abscisses.



En menant les perpendiculaires à l'axe des abscisses en I et J, on obtient 4 sommets de l'heptadécagone $A_{3,}$ $A_{5,}$ A_{12} et A_{14}.

En traçant la bissectrice de $\widehat{A_3OA_5}$, on obtient A_4 et $\frac{2\pi}{17}$.

Puis on construit les autres sommets de l'heptagone.