Fiche exercices

EXERCICE 1

Mettre chacun des nombres complexes sous forme algébrique :

- $z_1=2(6-5\text{i})-3(4+\text{i})$
- $z_2=(5+3\text{i})^2$
- $z_3=(3-2\text{i})(3+2\text{i})$
- $z_4=(1+\text{i})^2$
- $z_5=(1+\text{i})^4$
- $z_6=(1+\text{i})^{10}$

EXERCICE 2

a et b désignent deux nombres réels. Mettre les nombres complexes suivants sous forme algébrique :

- $z_1=(a+ib)^2$
- $z_2=(a-ib)^2$
- $z_3=(a+ib)(a-ib)$

EXERCICE 3

On pose $\text{j}=-\frac{1}{2}+\text{i}\frac{\sqrt{3}}{2}$.

1. (a) Donner j^2 et j^3 sous forme algébrique.

(b) En déduire l'écriture algébrique de j^{12} et de j^{29} .

2. Montrer que $1+\text{j}+\text{j}^2=0$.

EXERCICE 4

Résoudre l'équation, d'inconnues les réels a et b :

$(2i-1)a+(\text{i}+3)b=1+\text{i}$

EXERCICE 5

1. Déterminer la ou les valeurs du réel x telle(s) que le nombre $A=(5x+7\text{i})+(3ix+10)$ soit un nombre réel.

2. Déterminer la ou les valeurs du réel x telle(s) que le nombre $B=(5ix+7)(3ix+10)$ soit un nombre imaginaire pur (ce qui signifie que B a une écriture algébrique de la forme $B=ib$, avec b nombre réel).

EXERCICE 6

Écrire la forme algébrique des conjugués des nombres suivants :

1. $z_1 = 4 - 5\mathrm{i}$
2. $z_2 = -5 + 4\mathrm{i}$
3. $z_3 = 2\mathrm{i} + (5 - 3\mathrm{i})$
4. $z_4 = (2 - \mathrm{i})(2 + 3\mathrm{i})$
5. $z_5 = \dfrac{1}{2 - 3\mathrm{i}}$
6. $z_6 = \dfrac{2\mathrm{i}}{5 - \mathrm{i}}$

EXERCICE 7

Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes :

1. $3iz + 2 = 5z$
2. $(2 + 5\mathrm{i})z + 1 + \mathrm{i} = (1 + 2\mathrm{i})z$
3. $\dfrac{z}{2 + \mathrm{i}} + 1 = \dfrac{z}{1 - \mathrm{i}} + \mathrm{i}$

EXERCICE 8

Écrire la forme algébrique de i^n avec n entier naturel non nul.

EXERCICE 9

Écrire les nombres complexes suivants sous forme algébrique.

1. $z_1 = (3 + 2\mathrm{i})(1 - \mathrm{i}) - (2 - \mathrm{i})^2 + (5 - \mathrm{i})(5 + \mathrm{i})$
2. $z_2 = \dfrac{9 - 2\mathrm{i}}{2\mathrm{i}}$
3. $z_3 = \dfrac{5 - 2\mathrm{i}}{2 - 3\mathrm{i}}$
4. $z_4 = (2 - 3\mathrm{i})^2 + \dfrac{17(3 + \mathrm{i})}{4 - \mathrm{i}} + \dfrac{10 - \mathrm{i}}{\mathrm{i}}$
5. $z_5 = \dfrac{(1 + 2\mathrm{i})^2 - (1 - \mathrm{i})^2}{(3 + 2\mathrm{i})^2 - (1 + \mathrm{i})^2}$
6. $\left(\dfrac{1 - \mathrm{i}}{1 + \mathrm{i}}\right)^2$

EXERCICE 10

Écrire sous forme algébrique le nombre complexe conjugué de z_1 et z_2.

$z_1 = (-3 + 2\mathrm{i}\sqrt{2})(1 + \mathrm{i})$ $\qquad\qquad$ $z_2 = \dfrac{4 - \mathrm{i}}{2 + \mathrm{i}}$

EXERCICE 11

$z_1=\frac{3-2i}{-2+4i}$ $z_2=\frac{3+2i}{-2-4i}$

Sans calcul, montrer que z_1+z_2 est un nombre réel et que z_1-z_2 est un imaginaire pur.

EXERCICE 12

Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes :

1. $5iz+1-i=2z-3i$
2. $(8+i)z-5i=(5-i)z+2$
3. $\frac{2z+1}{1-i}+5=\frac{3z+2}{2-i}-i$

CORRECTION

EXERCICE 1

$z_1=2(6-5i)-3(4+i)$

$\boxed{z_1=-13i}$

$z_2=(5+3i)^2$

$z_2=25+30i+9i^2$

$\boxed{z_2=16+30i}$

$z_3=(3-2i)(3+2i)$

$z_3=9-4i^2$

$\boxed{z_3=13}$

$z_4=(1+i)^2$

$z_4=1^2+2i+i^2$

$\boxed{z_4=2i}$

$z_5=(1+i)^4$

$z_5=[(1+i)^2]^2$

$z_5=(2i)^2$

$\boxed{z_5=-4}$

$z_6=(1+i)^{10}$

$z_6=[(1+i)^2]^5$

$z_6=(2i)^5$

$\boxed{z_6=32i}$

EXERCICE 2

$z_1=(a+ib)^2$

$z_1=a^2+2abi+i^2b^2$

$\boxed{z_1=a^2-b^2+2abi}$

$z_2=(a-ib)^2$

$z_2=a^2-2abi+i^2b^2$

$\boxed{z_2=a^2-b^2-2abi}$

$z_3=(a+ib)(a-ib)$

$z_3=a^2-i^2b^2$

$\boxed{z_3=a^2+b^2}$

EXERCICE 3

1. (a)

$$j^2=\left(-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2$$

$$j^2=\frac{1}{4}-i\frac{\sqrt{3}}{2}+i^2\frac{3}{4}$$

$$\boxed{j^2=-\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}}$$

On peut remarquer que $\boxed{j^2=\bar{j}}$

$$j^3=\left(-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(-\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

$$j^3=\frac{1}{4}+\frac{3}{4}$$

$$\boxed{j^3=1}$$

(b) $j^{12}=(j^3)^4$

$$\boxed{j^{12}=1^4=1}$$

$$j^{29}=j^{27}\times j^2$$

$$j^{29}=(j^3)^9\times j^2$$

$$j^{29}=j^2$$

$$\boxed{j^{29}=-\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}}$$

2. $1+j+j^2=1-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}$

$$\boxed{1+j+j^2=0}$$

EXERCICE 4

$$(2i-1)a+(i+3)b=1+i$$

$$2ia-a+ib+3b=1+i$$

$$-a+3b-1+i(2a+b-1)=0$$

donc:

$$\begin{cases}-a+3b-1=0\\ 2a+b-1=0\end{cases}$$

$$\begin{cases}-2a+6b=2\\ 2a+b=1\end{cases}$$

On ajoute membre à membre les deux équations:

$$7b=3$$

$$b=\frac{3}{7}$$

Par suite,

$$a=3b-1$$

$$a=\frac{9}{7}-1=\frac{2}{7}$$

Le couple $\boxed{\left(\frac{2}{7};\frac{3}{7}\right)}$ est la solution de l'équation.

EXERCICE 5

1. $A=(5x+7\mathrm{i})+(3ix+10)$

$A=(5x+10)+\mathrm{i}(7+3x)$

A est un nombre réel $\Leftrightarrow\ 7+3x=0\ \Leftrightarrow\ x=\frac{-7}{3}$

Pour $x=\frac{-7}{3}$ le nombre A est un nombre réel.

$\boxed{A=-\frac{35}{3}+10=-\frac{5}{3}}$

2. $B=(5ix+7)(3ix+10)$

$B=15i^2x^2+50ix+21ix+70$

$B=70-15x^2+71ix$

B est un nombre imaginaire pur $\Leftrightarrow\ 70-15x^2=0\ \Leftrightarrow\ 5(14-3x^2)=0\ \Leftrightarrow\ 3x^2=14\ \Leftrightarrow\ x^2=\frac{14}{3}$

Pour $x=\frac{\sqrt{14}}{\sqrt{3}}$ ou $x=-\frac{\sqrt{14}}{\sqrt{3}}$, c'est à dire, pour $x=\frac{\sqrt{42}}{3}$ ou $x=-\frac{\sqrt{42}}{3}$, B est un imaginaire pur.

Si $x=\frac{\sqrt{42}}{3}$ alors $\boxed{B=\frac{71\sqrt{42}}{3}\mathrm{i}}$

Si $x=\frac{-\sqrt{42}}{3}$ alors $\boxed{B=-\frac{71\sqrt{42}}{3}\mathrm{i}}$

EXERCICE 6

1. $\boxed{\overline{z_1}=4+5\mathrm{i}}$

2. $\boxed{\overline{z_2}=-5-4\mathrm{i}}$

3. $z_3=2\mathrm{i}+5-3\mathrm{i}=5-\mathrm{i}$

$\boxed{\overline{z_3}=5+\mathrm{i}}$

ou $\boxed{\overline{z_3}=\overline{2\mathrm{i}}+\overline{5-3\mathrm{i}}=-2\mathrm{i}+5+3\mathrm{i}=5+\mathrm{i}}$

4. $z_4=(2-\mathrm{i})(2+3\mathrm{i})$

$\overline{z_4}=\overline{(2-\mathrm{i})}\times\overline{(2+3\mathrm{i})}$

$\overline{z_4}=(2+\mathrm{i})(2-3\mathrm{i})$

$\overline{z_4}=4+2i-6i+3$

$\boxed{\overline{z_4}=7-4i}$

5. $\overline{z_5}=\overline{\frac{1}{2-3i}}=\frac{1}{2+3i}$

$\boxed{\overline{z_5}=\frac{2-3i}{(2+3i)(2-3i)}=\frac{2-3i}{4+9}=\frac{2}{13}-\frac{3}{13}i}$

6. $\overline{z_6}=\frac{\overline{2i}}{\overline{5-i}}=\frac{-2i}{5+i}$

$\boxed{\overline{z_6}=\frac{-2i(5-i)}{(5+i)(5-i)}=\frac{-2-10i}{25+1}=\frac{-1}{13}-\frac{5}{13}i}$

EXERCICE 7

1. $(-5+3i)z=-2$

$z=\frac{-2}{-5+3i}=\frac{-2(-5-3i)}{(-5+3i)(-5-3i)}=\frac{10+6i}{25+9}=\frac{5}{17}+\frac{3}{17}i$

$\boxed{S=\{\frac{5}{17}+\frac{3}{17}i\}}$

2. $(2+5i)z+1+i=(1+2i)z$

$[(2+5i)-(1+2i)]z=-1-i$

$(1+3i)z=-1-i$

$z=\frac{-1-i}{1+3i}=\frac{(-1-i)(1-3i)}{(1+3i)(1-3i)}=\frac{-1+3i-i-3}{1+9}=\frac{-4+2i}{10}=\frac{-2}{5}+\frac{1}{5}i$

$\boxed{S=\{-\frac{2}{5}+\frac{1}{5}i\}}$

3. $\frac{z}{2+i}+1=\frac{z}{1-i}+i$

$\left(\frac{1}{2+i}-\frac{1}{1-i}\right)z=-1+i$

$\left(\frac{2-i}{(2+i)(2-i)}-\frac{1+i}{(1-i)(1+i)}\right)z=-1+i$

$\left(\frac{2-i}{5}-\frac{1+i}{2}\right)z=-1+i$

$\left(\frac{2(2-i)-5(1+i)}{10}\right)z=-1+i$

$\left(\frac{-1-7i}{10}\right)z=-1+i$

$z=\frac{10(-1+i)}{-1-7i}=\frac{(-10+10i)(-1+7i)}{(-1-7i)(-1+7i)}=\frac{10-70i-10i-70}{50}=\frac{-60-80i}{50}=\frac{-6}{5}-\frac{8}{5}i$

$\boxed{S=\{-\frac{6}{5}-\frac{8}{5}i\}}$

EXERCICE 8

$\boxed{i^1=1}$ $\boxed{i^2=-1}$ $\boxed{i^3=-i}$ $\boxed{i^4=1}$

n est un entier naturel non nul, on effectue la division euclidienne de n par 4 :

$n=4q+r$ avec $0\leqslant r<4$ $q\in\mathbb{N}$ et $r\in\mathbb{N}$

$i^n=(i^4)^q\times i^r=i^r$

Si $r=0$ alors $\boxed{i^n=1}$

Si $r=1$ alors $\boxed{i^n=i}$

Si $r=2$ alors $\boxed{i^n=-1}$

Si $r=3$ alors $\boxed{i^n=-i}$

EXERCICE 9

Écrire les nombres complexes suivants sous forme algébrique.

1. $z_1=(3+2i)(1-i)-(2-i)^2+(5-i)(5+i)$
2. $z_2=\frac{9-2i}{2i}$
3. $z_3=\frac{5-2i}{2-3i}$
4. $z_4=(2-3i)^2+\frac{17(3+i)}{4-i}+\frac{10-i}{i}$
5. $z_5=\frac{(1+2i)^2-(1-i)^2}{(3+2i)^2-(1+i)^2}$
6. $z_6=\left(\frac{1-i}{1+i}\right)^2$

1. $z_1=(3+2i)(1-i)-(2-i)^2+(5-i)(5+i)$

$z_1=3-3i+2i+2-4+4i+1+25+1$

$z_1=28+3i$

2. $z_2=\frac{9-2i}{2i}=\frac{(9-2i)(-2i)}{(2i)(-2i)}=\frac{-4-18i}{4}=-1-\frac{9}{2}i$

3. $z_3=\frac{5-2i}{2-3i}=\frac{(5-2i)(2+3i)}{(2-3i)(2+3i)}=\frac{10+15i-4i+6}{4+9}=\frac{16}{13}+\frac{11}{13}i$

4. $z_4=(2-3i)^2+\frac{17(3+i)}{4-i}+\frac{10-i}{i}$

$z_4=4-12i-9+\frac{17(3+i)(4+i)}{(4-i)(4+i)}+\frac{(10-i)(-i)}{i(-i)}$

$z_4=-5-12i+\frac{17(12+3i+4i-1)}{16+1}+\frac{-1-10i}{1}$

$z_4=-5-12i+11+7i-1-10i$

$z_4=5-15i$

5. $z_5=\frac{(1+2i)^2-(1-i)^2}{(3+2i)^2-(1+i)^2}$

$z_5=\frac{1+4i-4-1+2i+1}{9+12i-4-1-2i+1}$

$z_5=\frac{-3+6i}{5+10i}$

$z_5=\frac{(-3+6i)(5-10i)}{(5+10i)(5-10i)}$

$z_5=\frac{-15+30i+30i+60}{25+100}$

$z_5=\frac{45+60i}{125}=\frac{9}{25}+\frac{12}{25}i$

6. $z_6=\left(\frac{1-i}{1+i}\right)^2$

$z_6=\frac{1-2i-1}{1+2i-1}=\frac{-2i}{2i}=-1$

EXERCICE 10

Écrire sous forme algébrique le nombre complexe conjugué de z_1 et z_2.

$z_1=(-3+2i\sqrt{2})(1+i)$ $\qquad$ $z_2=\frac{4-i}{2+i}$

✔ $z_1=(-3+2i\sqrt{2})(1+i)$

1$^{\text{ière}}$ méthode:

On écrit z_1 sous forme algébrique:

$z_1=-3+2i\sqrt{2}-3i-2\sqrt{2}=-3-2\sqrt{2}+i(-3+2\sqrt{2})$

$\overline{z_1}=-3-2\sqrt{2}+i(3-2\sqrt{2})$

2$^{\text{ième}}$ méthode:

$\overline{z_1}=\overline{(-3+2i\sqrt{2})(1+i)}$

$\overline{z_1}=\overline{(-3+2i\sqrt{2})}\times\overline{(1+i)}$

$\overline{z_1}=(-3-2i\sqrt{2})\times(1-i)$

$\overline{z_1}=-3+3i-2i\sqrt{2}-2\sqrt{2}$

$\overline{z_1}=-3-2\sqrt{2}+i(3-2\sqrt{2})$

✔ $z_2=\frac{4-i}{2+i}$

1ière méthode:

On écrit z_2 sous forme algébrique:

$$z_2=\frac{4-i}{2+i}=\frac{(4-i)(2-i)}{(2+i)(2-i)}=\frac{8-1+i(-4-2)}{5}=\frac{7}{5}-i\frac{6}{5}$$

$$\overline{z_2}=\frac{7}{5}+i\frac{6}{5}$$

2ième méthode:

$$\overline{z_2}=\overline{\left(\frac{4-i}{2+i}\right)}$$

$$\overline{z_2}=\frac{4+i}{2-i}$$

$$\overline{z_2}=\frac{(4+i)(2+i)}{(2-i)(2+i)}$$

EXERCICE 11

$z_1=\frac{3-2i}{-2+4i}$ $\qquad$ $z_2=\frac{3+2i}{-2-4i}$

Sans calcul, montrer que z_1+z_2 est un nombre réel et que z_1-z_2 est un imaginaire pur.

On remarque que $z_2=\overline{z_1}$

$$z_1+z_2=z_1+\overline{z_1}=2\Re(z_1)$$

Donc z_1+z_2 est un nombre réel.

$$z_1-z_2=z_1-\overline{z_1}=2i\Im(z_1)$$

Donc z_1-z_2 est un imaginaire pur.

EXERCICE 12

Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes :

1. $5iz+1-i=2z-3i$
2. $(8+i)z-5i=(5-i)z+2$
3. $\frac{2z+1}{1-i}+5=\frac{3z+2}{2-i}-i$

1. $5iz+1-i=2z-3i$

$(-2+5i)z=-1-2i$

$z=\frac{-1-2i}{-2+5i}$

$z=\frac{(-1-2i)(-2-5i)}{(-2+5i)(-2-5i)}=\frac{2-10+5i+4i}{4+25}=\frac{-8+9i}{29}$

$S=\{-\frac{8}{29}+\frac{9}{29}i\}$

2. $(8+i)z-5i=(5-i)z+2$

$(8+i-5+i)z=2+5i$

$(3+2i)z=2+5i$

$z=\frac{2+5i}{3+2i}=\frac{(2+5i)(3-2i)}{(3+2i)(3-2i)}=\frac{6+10-4i+15i}{9+4}=\frac{16+11i}{13}$

$S=\{\frac{16}{13}+\frac{11}{13}i\}$

3. $\frac{2z+1}{1-i}+5=\frac{3z+2}{2-i}-i$

$\left(\frac{2}{1-i}-\frac{3}{2-i}\right)z=\frac{2}{2-i}-i-\frac{1}{1-i}-5$

$\left(\frac{2(1+i)}{2}-\frac{3(2+i)}{5}\right)z=\frac{2(2+i)}{5}-i-\frac{1+i}{2}-5$

$\frac{10+10i-12-6i}{10}z=\frac{8+4i-10i-5-5i-50}{10}$

$\frac{-2+4i}{10}z=\frac{-47-11i}{10}$

$z=\frac{-47-11i}{-2+4i}=\frac{(-47-11i)(-2-4i)}{(-2+4i)(-2-4i)}=\frac{94-44+188i+22i}{4+16}=\frac{50+210i}{20}=\frac{5}{2}+\frac{21}{2}i$

$S=\{\frac{5}{2}+\frac{21}{2}i\}$