Fiche exercices

EXERCICE 1

Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes :

1. $z^2 - 14z + 170 = 0$

2. $z^2 + 34z + 627 = 0$

EXERCICE 2

1. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation : $z^2 - 4z + 5 = 0$

2. Développer $(z-2)(z^2 - 4z + 5)$

3. Résoudre dans $\mathbb{C}$: $z^3 - 6z^2 + 13z - 10 = 0$

EXERCICE 3

θ est un nombre réel.

Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation : $2z^2 - 2(1+\cos\theta)z + 1 + \cos\theta = 0$

EXERCICE 4

$-\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}$

Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation : $z^2\cos^2\theta - 2z\cos^2\theta + 1 = 0$

EXERCICE 5

1. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation : $z^2 - 16z + 89$

2. Montrer que l'équation : $z^3 - (16 - i)z^2 + (89 - 16i)z + 89i = 0$ admet une solution imaginaire pur que l'on déterminera.

3. Développer : $(z+i)(z^2 - 16z + 89)$

4. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation : $z^3 - (16 - i)z^2 + (89 - 16i)z + 89i = 0$

EXERCICE 6

Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes :

1. $2z^2 - 8z + 80 = 0$

2. $3z^2 - 6z + 18 = 0$

EXERCICE 7

$-\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}$

Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation :

$z^2\cos^2\theta - 2z\cos\theta\sin\theta + 1 = 0$

EXERCICE 8

$0 < \theta < \frac{\pi}{2}$

Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation :

$z^2\cos^2\theta\sin^2\theta - 2z\sin^3\theta\cos\theta + \cos^4\theta\sin^4\theta = 0$

EXERCICE 9

$0 < \theta < \pi$

1. Développer $(z+2)(z^2 - 2z\cos\theta + 1)$

2. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation :

$z^3 - 2z^2(1 - \cos\theta) + z(1 - 4\cos\theta) + 2 = 0$

EXERCICE 10

1. Démontrer que l'équation : $z^3-(1-\mathrm{i})z^2+z-1+\mathrm{i}=0$ admet deux solutions imaginaires purs que l'on déterminera.
2. Développer $(z^2+1)(z-(1-\mathrm{i}))$
3. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation proposée.

EXERCICE 11

1. On considère le polynôme : $\mathrm{P}(z)=2z^3-5z^2+4z-21$
 . Calculer P(3)
 . Factoriser P(z) par (z-3)
 . Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $\mathrm{P}(z)=0$.
2. On considère le polynôme : $\mathrm{P}(z)=z^4-z^3+8z-8$
 . Calculer P(1) et P(-2)
 . Factoriser P(z) par $(z-1)(z+2)$
 . Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $\mathrm{P}(z)=0$.

EXERCICE 12

a, b et c sont trois nombres réels non nuls distincts deux à deux.

Montrer que le polynôme $\mathrm{P}(z)=\frac{z(z-\mathrm{b})(z-\mathrm{c})}{\mathrm{a}(\mathrm{a}-\mathrm{b})(\mathrm{a}-\mathrm{c})}+\frac{z(z-\mathrm{a})(z-\mathrm{c})}{\mathrm{b}(\mathrm{b}-\mathrm{a})(\mathrm{b}-\mathrm{c})}+\frac{z(z-\mathrm{a})(z-\mathrm{b})}{\mathrm{c}(\mathrm{c}-\mathrm{a})(\mathrm{c}-\mathrm{b})}$ peut s'écrire :

$\mathrm{P}(z)=\mathrm{k}(z-\mathrm{a})(z-\mathrm{b})(z-\mathrm{c})+1$ où k est un nombre réel que l'on déterminera.

EXERCICE 13

Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation :

$z^4+(64+52\mathrm{i})z^2+540+1408\mathrm{i}=0$

CORRECTION

EXERCICE 1

1. $\Delta=(-14)^2-4\times1\times170=196-680=-484<0$
L'équation a **deux solutions distinctes complexes conjuguées**.

$\sqrt{-\Delta}=22$

$z_1=\dfrac{14-22i}{2}=7-11i$ et $z_2=\dfrac{14+22i}{2}=7+11i$

$\boxed{S=\{7-11i;7+11i\}}$

2. $\Delta=34^2-4\times1\times627=1156-2508=-1352<0$

L'équation a **deux solutions distinctes complexes conjuguées**.

$\sqrt{-\Delta}=26\sqrt{2}$

$z_1=\dfrac{-34-26\sqrt{2}i}{2}=-17-13\sqrt{2}i$ et $z_2=\dfrac{-34+26\sqrt{2}i}{2}=-17+13\sqrt{2}i$

$\boxed{S=\{-17-13\sqrt{2}i;-17+13\sqrt{2}i\}}$

EXERCICE 2

1. $\Delta=(-14)^2-4\times1\times170=196-680=-484<0$

L'équation a **deux solutions distinctes complexes conjuguées**.

$\sqrt{-\Delta}=22$

$z_1=\dfrac{14-22i}{2}=7-11i$ et $z_2=\dfrac{14+22i}{2}=7+11i$

$\boxed{S=\{7-11i;7+11i\}}$

2. $\Delta=34^2-4\times1\times627=1156-2508=-1352<0$

L'équation a **deux solutions distinctes complexes conjuguées**.

$\sqrt{-\Delta}=26\sqrt{2}$

$z_1=\dfrac{-34-26\sqrt{2}i}{2}=-17-13\sqrt{2}i$ et $z_2=\dfrac{-34+26\sqrt{2}i}{2}=-17+13\sqrt{2}i$

$\boxed{S=\{-17-13\sqrt{2}i;-17+13\sqrt{2}i\}}$

3. $z^3-6z^2+13z-10=0$

$\Leftrightarrow\ (z-2)(z^2-4z+5)=0$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} z-2=0 \\ \quad\text{ou} \\ z^2-4z+5=0 \end{cases}$$

Donc les solutions de l'équation sont $2;2-i;2+i$

$\boxed{S=\{2;2-i;2+i\}}$

EXERCICE 3

$\Delta=4(1+\cos\theta)^2-4\times2\times(1+\cos\theta)$

$\Delta=4(1+2\cos\theta+\cos^2\theta)-8-8\cos\theta$

$\Delta=-4+4\cos^2\theta$

$\Delta=4(-1+\cos^2\theta)$

$\Delta=4(-\sin^2\theta)\leqslant 0$

$$\Delta=0 \Leftrightarrow \sin^2\theta=0 \Leftrightarrow \sin\theta=0 \Leftrightarrow \begin{cases}\theta=0+2k\pi \\ \quad \text{ou} \\ \theta=\pi+2k\pi\end{cases} \quad k\in\mathbb{Z}$$

Si $\boxed{\theta=0+2k\pi}$ alors l'équation devient :

$2z^2-4z+2=0 \Leftrightarrow 2(z^2-2z+1)=0 \Leftrightarrow 2(z-1)^2=0$

L'équation admet **deux solutions réelles confondues** : $z_1=z_2=1$

$\boxed{S=\{1\}}$

Si $\boxed{\theta=\pi+2k\pi}$ alors l'équation devient :

$2z^2=0 \Leftrightarrow z^2=0$

L'équation admet **deux solutions réelles confondues** : $z_1=z_2=0$

$\boxed{S=\{0\}}$

$$\Delta<0 \Leftrightarrow \begin{cases}\theta\neq 0+2k\pi \\ \quad \text{et} \\ \theta\neq\pi+2k\pi\end{cases} \quad k\in\mathbb{Z}$$

$\Delta=4\sin^2\theta i^2=(2\sin\theta i)^2$

L'équation a **deux solutions distinctes complexes conjuguées**.

$$z_1=\frac{2(1+\cos\theta)-2\sin\theta i}{2}=1+\cos\theta-\sin\theta i$$

$$z_1=\frac{2(1+\cos\theta)+2\sin\theta i}{2}=1+\cos\theta+\sin\theta i$$

$\boxed{S=\{1+\cos\theta-\sin\theta i;1+\cos\theta+\sin\theta i\}}$

EXERCICE 4

$-\frac{\pi}{2}<\theta<\frac{\pi}{2}$ donc $\cos^2\theta\neq0$ donc **l'équation est bien une équation du second degré**.

$\Delta=(-2\cos^2\theta)^2-4\times\cos^2\theta\times1$

$\Delta=4\cos^4\theta-4\cos^2\theta$

$\Delta=4\cos^2\theta(\cos^2\theta-1)$

$\Delta=4\cos^2\theta(-\sin^2\theta)$

$\Delta=-4\cos^2\theta\sin^2\theta\leqslant 0$

$\Delta=0 \Leftrightarrow \theta=0$ car $-\frac{\pi}{2}<\theta<\frac{\pi}{2}$

L'équation devient :

$z^2-2z+1=0 \Leftrightarrow (z-1)^2=0$

L'équation a **deux solutions confondues réelles** $z_1=z_2=1$

$S=\{1\}$

$\Delta<0 \Leftrightarrow \theta\neq 0$

$\Delta=-4\cos^2\theta\sin^2\theta\leqslant 0=(2\cos\theta\sin\theta i)^2$

L'équation a **deux solutions distinctes complexes conjuguées**.

$$z_1=\frac{2\cos^2\theta-2\cos\theta\sin\theta i}{2\cos^2\theta}=1-\frac{\sin\theta}{\cos}\theta i=1-\tan\theta i$$

$$z_2=\frac{2\cos^2\theta+2\cos\theta\sin\theta i}{2\cos^2\theta}=1+\frac{\sin\theta}{\cos}\theta i=1+\tan\theta i$$

$\boxed{S=\{1-\tan\theta\mathrm{i}\,;1+\tan\theta\mathrm{i}\}}$

EXERCICE 5

1. $\Delta=(-16)^2-4\times1\times89=256-356=-100<0$

L'équation a **deux solutions distinctes complexes conjuguées**.

$\Delta=(10\mathrm{i})^2$

$z_1=\frac{16-10i}{2}=8-5i$ et $z_2=\frac{16+10i}{2}=8+5i$

$\boxed{S=\{8-5\mathrm{i}\,;8+5\mathrm{i}\}}$

2. $z^3-(16-\mathrm{i})z^2+(89-16\mathrm{i})z+89\mathrm{i}=0$

bi (avec $b\in\mathbb{R}$)est une solution de l'équation

$\Leftrightarrow -b^3\mathrm{i}+(16-\mathrm{i})b^2+89bi+16b+89\mathrm{i}=0$

$\Leftrightarrow 16b^2+16b+\mathrm{i}(-b^3-b^2+89b+89)=0$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}16\mathrm{b}^2+16\mathrm{b}=0(1)\\ -\mathrm{b}^3-\mathrm{b}^2+89\mathrm{b}+89=0(2)\end{cases}$$

(1) $\Leftrightarrow b^2+b=0 \Leftrightarrow b(b+1)=0 \qquad S_1=\{0;-1\}$

$0\notin S_2$

1-1-89+89=0 donc $-1\notin S_2$

$\boxed{S=\{-1\}}$

Donc $-i$ est **une solution imaginaire pur de l'équation**.

3. $(z+\mathrm{i})(z^2-16z+89)$

$= z^3-16z^2+89z+iz^2-16iz+89\mathrm{i}$

$= z^3-(16-\mathrm{i})z^2+(89-16\mathrm{i})z+89\mathrm{i}$

4. $z^3-(16-i)z^2+(89-16i)z+89i=0$

$\Leftrightarrow\ (z+\mathrm{i})(z^2-16z+89)=0$

$\Leftrightarrow \begin{cases} \mathrm{z}+\mathrm{i}=0 \\ \text{ou} \\ \mathrm{z}^2-16\mathrm{z}+89=0 \end{cases}$

Les solutions de cette équation sont : $-\mathrm{i};8-5\mathrm{i};8+5\mathrm{i}$

$\boxed{S=\{-\mathrm{i};8-5\mathrm{i};8+5\mathrm{i}\}}$

EXERCICE 6

1. $\Delta=(-8)^2-4\times2\times80=64-640=-576<0$
L'équation a deux solutions distinctes complexes conjuguées.
$-576=(24\mathrm{i})^2$
$z_1=\dfrac{8-24i}{4}=2-6i$ et $z_2=\dfrac{8+24i}{4}=2+6i$
$S=\{2-6i;2+6i\}$

2. $\Delta=(-6)^2-4\times3\times18=36-216=-180$
L'équation a deux solutions distinctes complexes conjuguées.
$-180=(6\sqrt{5}i)^2$
$z_1=\dfrac{6-6\sqrt{5}i}{6}=1-\sqrt{5}i$ et $z_2=\dfrac{6+6\sqrt{5}i}{6}=1+\sqrt{5}i$

EXERCICE 7

$-\dfrac{\pi}{2}<\theta<\dfrac{\pi}{2}$ donc $\cos^2\theta\neq0$

$\Delta=4\cos^2\theta\sin^2\theta-4\cos^2\theta$

$\Delta=4\cos^2\theta(\sin^2\theta-1)$

$\Delta=-4\cos^4\theta<0$

L'équation a deux solutions distinctes complexes conjuguées.
$\Delta=(2i\cos^2\theta)^2$
$z_1=\dfrac{2\cos\theta\sin\theta-2icos^2\theta}{2\cos^2\theta}=\tan\theta-i$ et $z_2=\dfrac{2\cos\theta\sin\theta+2icos^2\theta}{2\cos^2\theta}=\tan\theta+i$

$S=\{\tan\theta-i\,;\tan\theta+i\}$

EXERCICE 8

$0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$ donc $\sin^2\theta\cos^2\theta\neq0$

$\Delta=(-2\sin^3\theta\cos\theta)^2-4\sin^2\theta\cos^2\theta(\cos^4\theta+\sin^4\theta)$
$\Delta=4\sin^2\theta\cos^2\theta[\sin^4\theta-\cos^4\theta-\sin^4\theta]$

$\Delta=-4\sin^2\theta\cos^6\theta<0$
$\Delta=(2\sin\theta\cos^3\theta\, i)^2$
L'équation a deux solutions distinctes complexes conjuguées.
$z_1=\dfrac{2\sin^3\theta\cos\theta-2\sin\theta\cos^3\theta\, i}{2\sin^2\theta\cos^2\theta}=\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}-\dfrac{\cos\theta}{\sin\theta}i$
$z_2=\dfrac{2\sin^3\theta\cos\theta+2\sin\theta\cos^3\theta\, i}{2\sin^2\theta\cos^2\theta}=\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}+\dfrac{\cos\theta}{\sin\theta}i$
$S=\left\{\tan\theta-\dfrac{\cos\theta}{\sin\theta}i\,;\tan\theta+\dfrac{\cos\theta}{\sin\theta}i\right\}$

EXERCICE 9

1. $(z+2)(z^2-2z\cos\theta+1)$
$=z^3-2z^2\cos\theta+z+2z^2-4z\cos\theta+2$
$=z^3+2z^2(1-\cos\theta)+z(1-4\cos\theta)+2$
2. $z^3+2z^2(1-\cos\theta)+z(1-4\cos\theta)+2=0$
$\Leftrightarrow (z+2)(z^2-2z\cos\theta+1)=0$
$\Leftrightarrow \begin{cases} z+2=0\,(1) \\ \text{ou} \\ z^2-2z\cos\theta+1=0\,(2)\end{cases}$

$S_1=\{-2\}$
(2) $z^2-2z\cos\theta+1=0$
$\Delta=4\cos^2\theta-4=-4\sin^2\theta$

$0<\theta<\pi$ donc $\sin^2\theta\neq 0$ donc $\Delta<0$
L'équation a deux solutions distinctes complexes conjuguées.
$z_1=\dfrac{2\cos\theta-2i\sin\theta}{2}=\cos\theta-i\sin\theta$ et $z_2=\dfrac{2\cos\theta+2i\sin\theta}{2}=\cos\theta+i\sin\theta$
$S_2=\{\cos\theta-i\sin\theta\,;\cos\theta+i\sin\theta\}$
Donc $S=\{-2\,;\cos\theta-i\sin\theta\,;\cos\theta+i\sin\theta\}$

EXERCICE 10

1. bi (b est réel) est solution de l'équation si et seulement si
$-b^3\mathrm{i}+(1-\mathrm{i})b^2+bi-1+\mathrm{i}=0$
$\Leftrightarrow b^2-1+\mathrm{i}(-b^3-b^2+b+1)=0$
$\Leftrightarrow \begin{cases} b^2-1=0\,(1) \\ -b^3-b^2+b+1=0\,(2)\end{cases}$

$S_1=\{-1\,;1\}$
$-(-1)^3-(-1)^2+(-1)+1=1-1-1+1=0$ donc $-1\in S_2$
$-1^3-1^2+1+1=0$ donc $1\in S_2$

Donc $-i$ et i sont deux solutions imaginaires purs.

2. $(z^2+1)(z-(1-\mathrm{i}))$
$=z^3-z^2(1-\mathrm{i})+z-1+\mathrm{i}$

3. $z^3-(1-\mathrm{i})z^2+z-1+\mathrm{i}=0$

$\Leftrightarrow (z^2+1)(z-(1-\mathrm{i}))=0$

$\Leftrightarrow \begin{cases} z^2+1=0 \\ \text{ou} \\ z-(1-\mathrm{i})=0 \end{cases}$

$S=\{-i\,;i\,;1-i\}$

EXERCICE 11

1. $\mathrm{P}(z)=2z^3-5z^2+4z-21$

- $\mathrm{P}(z)=2\times27-5\times9+4\times3\times21=54-45+12-21=0$
- **P(z) est factorisable par (z-3).**

  On effectue la division euclidienne de P(z) par (z-3).

$$
\begin{array}{rr|l}
 & 2z^3-5z^2+4z-21 & z-3 \\
\hline
-(2z^3-6z^2) & & 2z^2+z+7 \\
 & z^2+4z & \\
 & -(z^2-3z) & \\
 & 7z-21 & \\
 & -(7z-21) & \\
 & 0 &
\end{array}
$$

On obtient : $\mathrm{P}(z)=(z-2)(2z^2+z+7)$

- $\mathrm{P}(z)=0 \quad\Leftrightarrow\quad (z=3 \text{ ou } 2z^2+z+7=0)$

  3 est une solution de l'équation.

  $2z^2+z+7=0 \qquad \Delta=1^2-4\times2\times7=-55<0 \qquad \Delta=(\mathrm{i}\sqrt{55})^2$

  L'équation admet deux solutions complexes conjuguées.

  $z_1=\dfrac{-1+\mathrm{i}\sqrt{55}}{4}=-\dfrac{1}{4}+\mathrm{i}\dfrac{\sqrt{55}}{4}$ et $z_2=\dfrac{-1-\mathrm{i}\sqrt{55}}{4}=-\dfrac{1}{4}-\mathrm{i}\dfrac{\sqrt{55}}{4}$.

  L'ensemble des solutions de l'équation $\mathrm{P}(z)=0$ est $\mathscr{S}=\{3\,:-\dfrac{1}{4}+\mathrm{i}\dfrac{\sqrt{55}}{4}\,;\ -\dfrac{1}{4}-\mathrm{i}\dfrac{\sqrt{55}}{4}\}$.

2. $\mathrm{P}(z)=z^4-z^3+8z-8$

- $\mathrm{P}(1)=1^4-1^3+8\times1-8=0$

  $\mathrm{P}(-2)=(-2)^4-(-2)^3+8\times(-2)-8=16+8-16-8=0$
- **Le polynôme P(z) est factorisable par (z-1)(z+2).**

  On effectue la division euclidienne de P(z) par $(z-1)(z\mp2)=z^2+z-2$

$$
\begin{array}{rr|l}
 & z^4-z^3+0z^2+8z-8 & z^2+z-2 \\
\hline
-(z^4+z^3-2z^2) & & z^2-2z+4 \\
 & -2z^3+2z^2+8z & \\
 & -(-2z^3-2z^2+4z) & \\
 & 4z^2+4z-8 & \\
 & -(4z^2+4z-8) & \\
 & 0 &
\end{array}
$$

On obtient $\mathrm{P}(z)=(z^2+z-2)(z^2-2z+4)=(z-1)(z+2)(z^2-2z+4)$

- $\mathrm{P}(z)=0 \quad\Leftrightarrow\quad (z=1 \text{ ou } z=-2 \text{ ou } z^2-2z+4=0)$

  1 et -2 sont des solutions de l'équation

$z^2-2z+4=0 \qquad \Delta=4-4\times4\times1=-16<0 \qquad \Delta=(2\mathrm{i}\sqrt{3})^2$

Cette équation admet 2 solutions complexes conjuguées.

$z_1=\dfrac{2+2\mathrm{i}\sqrt{3}}{2}=1+\mathrm{i}\sqrt{3}$ et $z_2=\dfrac{2-2\mathrm{i}\sqrt{3}}{2}=1-\mathrm{i}\sqrt{3}$

L'ensemble des solutions de l'équation $\mathrm{P}(z)=0$ est $\mathcal{S}=\{1\,;\ -2\,;\ 1+\mathrm{i}\sqrt{3}\,;\ 1-\mathrm{i}\sqrt{3}\}$.

EXERCICE 12

$$\mathrm{P}(z)=\frac{z(z-\mathrm{b})(z-\mathrm{c})}{\mathrm{a}(\mathrm{a}-\mathrm{b})(\mathrm{a}-\mathrm{c})}+\frac{z(z-\mathrm{a})(z-\mathrm{c})}{\mathrm{b}(\mathrm{b}-\mathrm{a})(\mathrm{b}-\mathrm{c})}+\frac{z(z-\mathrm{a})(z-\mathrm{b})}{\mathrm{c}(\mathrm{c}-\mathrm{a})(\mathrm{c}-\mathrm{b})}$$

P(z) est un polynôme de degré au plus 3.

On considère le polynôme $\mathrm{Q}(z)=\mathrm{P}(z)-1$.

Q(z) est un polynôme de degré au plus 3.

On remarque :

$$\mathrm{Q}(\mathrm{a})=\frac{\mathrm{a}(\mathrm{a}-\mathrm{b})(\mathrm{a}-\mathrm{c})}{\mathrm{a}(\mathrm{a}-\mathrm{b})(\mathrm{a}-\mathrm{c})}+\frac{\mathrm{a}(\mathrm{a}-\mathrm{a})(\mathrm{a}-\mathrm{c})}{\mathrm{b}(\mathrm{b}-\mathrm{a})(\mathrm{b}-\mathrm{c})}+\frac{\mathrm{a}(\mathrm{a}-\mathrm{a})(\mathrm{a}-\mathrm{c})}{\mathrm{c}(\mathrm{c}-\mathrm{a})(\mathrm{c}-\mathrm{b})}-1=1+0+0-1=0$$

On vérifie de même que $\mathrm{Q}(\mathrm{b})=\mathrm{Q}(\mathrm{c})=0$.

Q(z) est factorisable par $(z-\mathrm{a})(z-\mathrm{b})(z-\mathrm{c})$ polynôme de degré 3.

<u>Conséquences</u>

Q(z) est un polynôme de degré 3.

$\mathrm{Q}(z)=\mathrm{k}(z-\mathrm{a})(z-\mathrm{b})(z-\mathrm{c})$ k est le coefficient de z^3 dans P(z).

(Un polynôme de degré 0 est une constante).

$\mathrm{P}(0)=0$ donc $\mathrm{Q}(0)=-1$

or $\mathrm{Q}(0)=\mathrm{k}\times(-\mathrm{a})\times(-\mathrm{b})\times(-\mathrm{c})=-\mathrm{kabc}=-1$ donc $\mathrm{k}=-\dfrac{1}{\mathrm{abc}}$.

<u>Conclusion</u>

$$\mathrm{Q}(z)=-\frac{1}{\mathrm{abc}}(z-\mathrm{a})(z-\mathrm{b})(z-\mathrm{c})$$

$$\mathrm{P}(z)=-\frac{1}{\mathrm{abc}}(z-\mathrm{a})(z-\mathrm{b})(z-\mathrm{c})-1$$

EXERCICE 13

(E) : $z^4+(64+52\mathrm{i})z^2+540+1408\mathrm{i}=0$

(E) $\Leftrightarrow \begin{cases} \mathrm{Z}=z^2 \\ \mathrm{Z}^2+(64+52\mathrm{i})\mathrm{Z}+540+1048\mathrm{i}=0 \end{cases}$

La deuxième équation est une équation du second degré à coefficients complexes.

$\Delta=(64+52\mathrm{i})^2-4\times(540+1408\mathrm{i})\times1=64^2+2\times64+52\mathrm{i}-52^2-4\times540-4\times1408\mathrm{i}$

$\Delta=4096+6656\mathrm{i}-2704-2160-5632\mathrm{i}=-768+1024\mathrm{i}$.

On détermine les racines carrées de Δ c'est à dire on résout l'équation $\delta^2=\Delta$.

$\delta=x+\mathrm{i}y \qquad \delta^2=x^2-y^2-2\mathrm{i}xy$

$\delta^2=\Delta \quad\Leftrightarrow\quad \begin{cases} x^2-y^2=-768 \\ 2xy=1024 \end{cases}$

$|\delta|^2=|\Delta|=\sqrt{768^2+1024^2}=\sqrt{589824+1048576}=\sqrt{1638400}=1280$

$\begin{cases} x^2-y^2=-768 \\ x^2+y^2=1280 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x^2=512 \\ 2y^2=2048 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2=256 \\ y^2=1024 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |x|=16 \\ |y|=32 \end{cases}$

$2xy=1024 \quad\Leftrightarrow\quad xy=512>0$ donc x et y ont le même signe.

Les deux racines carrées de Δ sont $\delta_1=16+32\mathrm{i}$ et $\delta_2=-16-32\mathrm{i}$

Les solutions de l'équation du second degré sont :

$$\mathrm{Z}_1=\frac{-(64+52\mathrm{i})-16+32\mathrm{i}}{2}=\frac{-48-20\mathrm{i}}{2}=-24-10\mathrm{i}$$

$Z_2 = \frac{-(64+52\,i)-16-32\,i}{2} = \frac{-50-84\,i}{2} = -40-42\,i$

Les deux solutions de l'équation du second degré à coefficients complexes ne sont pas conjuguées.
On résout : $z^2=-24-10\,i$ et $z^2=-40-42\,i$.
C'est à dire on détermine les racines carrées de Z_1 et Z_2 .

$z=x+i\,y \qquad z^2=-24-10\,i \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x^2-y^2=-24 \\ 2\,xy=-10 \end{cases}$

$x^2+y^2=\sqrt{24^2+10^2}=\sqrt{576+100}=\sqrt{676}=26$

$\begin{cases} x^2-y^2=-24 \\ x^2+y^2=26 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2\,x^2=2 \\ 2\,y^2=50 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2=1 \\ y^2=25 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |x|=1 \\ |y|=5 \end{cases}$

$2\,xy=-10 \quad \Leftrightarrow \quad xy=-5<0$ donc x et y sont de signes contraires.
Les solutions de l'équation $z^2=Z_1$ sont : $z_1=1-5i$ et $-z_1=-1+5\,i$.

$z=x+i\,y \qquad z^2=-40-42\,i \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x-y^2=-40 \\ 2\,xy=-42 \end{cases}$

$x^2+y^2=\sqrt{40^2+42^2}=\sqrt{1600+1764}=\sqrt{3364}=58$

$\begin{cases} x^2-y^2=-40 \\ x^2+y^2=58 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2\,x^2=18 \\ 2\,y^2=98 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2=9 \\ y^2=49 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |x|=3 \\ |y|=7 \end{cases}$

$2\,xy=-42 \quad \Leftrightarrow \quad xy=-21<0$ donc x et y sont de signes contraires.
Les solutions de l'équation $z^2=Z_2$ sont : $z_2=3-7\,i$ et $-z_2=-3+7\,i$

L'ensemble des solutions de l'équation proposée est : $\mathcal{S}=\{1-5\,i;\ -1+5\,i;\ -3+5\,i;\ 3-5\,i\}$;