Fiche exercices

EXERCICE 1

1. Dans le plan complexe rapporté au repère $(O;\vec{u},\vec{v})$, placer les points $A(z_A)$; $B(z_B)$; $C(z_C)$ avec:

$z_A=-1+2i$ $\qquad$ $z_B=-2-\frac{3}{2}i$ $\qquad$ $z_C=2+\frac{1}{2}i$

2. Déterminer l'affixe de $\overrightarrow{BC}$

3. Calculer l'affixe du point D tel que ABCD soit un parallélogramme.

EXERCICE 2

Dans le plan complexe rapporté au repère $(O;\vec{u},\vec{v})$, on considère les points A; B et C de coordonnées respectives $A(3;-1);B(5;1)$ et $C(2;1)$.

1. Quelles sont les affixes des points A; B et C et des vecteurs $\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC};\overrightarrow{BC}$?

2. On définit les points D et E par $\overrightarrow{AD}=2\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}$ et $3\overrightarrow{BE}=\overrightarrow{BC}$. Déterminer l'affixe de chacun des points D et E.

3. Démontrer que A; D et E sont alignés.

EXERCICE 3

Dans le plan complexe, on considère les points: A; B; C et D d'affixes respectives:

$z_A=-2-4i$; $z_B=5-2i$; $z_C=4+3i$; $z_D=1+i$

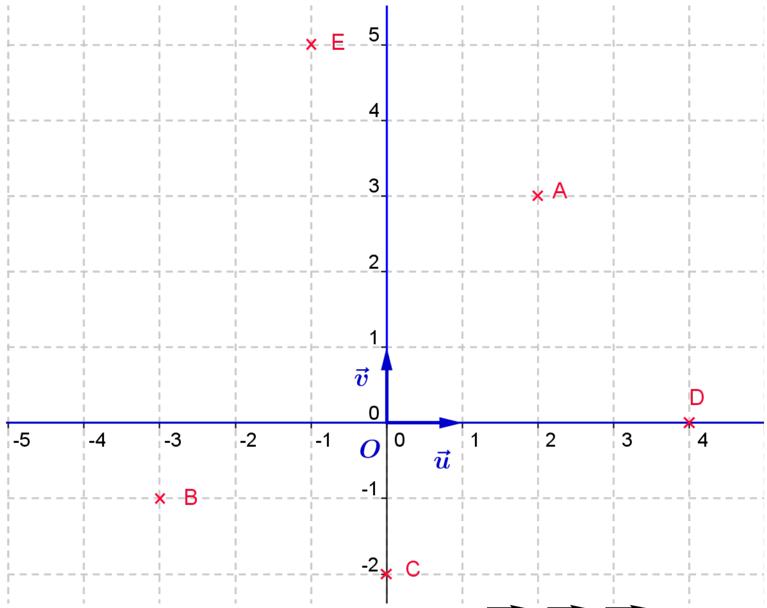
1. a) Déterminer l'affixe du point C', symétrique de C par rapport au point D.

b) Déterminer l'affixe du point A' vérifiant $\overrightarrow{DA'}=\overrightarrow{DB}+\overrightarrow{DC}$

2. Quelle est la nature du quadrilatère $A'BC'D$?

EXERCICE 4

Dans la figure ci-après, $(O;\vec{u},\vec{v})$ est un repère orthonormé direct.



Donner les affixes des points O, A, B, C, D et E et des vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{CE}$, $\overrightarrow{ED}$.

EXERCICE 5

Soient A, B et C trois points d'affixes respectives 2+i, 5−i et 3i+1.

1. Placer ces points dans le plan complexe.

2. Déterminer l'affixe du point D tel que ABDC soit un parallélogramme.

EXERCICE 6

Calculer le module de chacun des nombres suivants:

1. $z_1=2-\mathrm{i}$
2. $z_2=3+4\mathrm{i}$
3. $z_3=7-\mathrm{i}$
4. $z_4=-4+3\mathrm{i}$
5. $z_5=\sqrt{7}+\mathrm{i}\sqrt{5}$
6. $z_6=(1+\mathrm{i})^4$
7. $z_7=(-3+5\mathrm{i})^2$
8. $z_8=(1-\sqrt{3}\mathrm{i})(\sqrt{11}-5\mathrm{i})$
9. $z_9=\dfrac{4-3\mathrm{i}}{3-4\mathrm{i}}$

EXERCICE 7

1. Dans le plan complexe rapporté au repère $(O;\vec{u},\vec{v})$, on considère les points B et C d'affixes $z_B=2+2\mathrm{i}\sqrt{3}$ et $z_C=2-2\mathrm{i}\sqrt{3}$
Vérifier que B et C appartiennent au cercle de centre O et de rayon 4.

2. On considère le point A d'affixe $z_A=\dfrac{z_B-z_C}{2}$
Calculer z_A puis $|z_B-z_A|$; $|z_C-z_A|$ et $|z_B-z_C|$
3. Déterminer la nature du triangle ABC.

EXERCICE 8

Dans le plan complexe rapporté au repère $(O;\vec{u},\vec{v})$ orthonormé direct.
1. Déterminer géométriquement l'ensemble des points M d'affixe z vérifiant:
a) $|z-1+\mathrm{i}|=|z+2-\mathrm{i}|$
b) $|z+2+\mathrm{i}|=2$
c) Construire ces ensembles.
2. Donner dans chaque cas une équation cartésienne de l'ensemble trouvé.

EXERCICE 9

Dans le plan complexe rapporté au repère $(O;\vec{u},\vec{v})$
1. Déterminer géométriquement l'ensemble des points M d'affixes z vérifiant:
a) $|iz+1-\mathrm{i}|=|z+3|$
b) $|\overline{z}+2-\mathrm{i}|=2$
c) $|iz+2+\mathrm{i}|=3$
2. Donner dans chaque cas une équation cartésienne de l'ensemble trouvé.

EXERCICE 10

Déterminer les nombres complexes tels que les points M; M' et M'' d'affixes respectives z ; $\dfrac{1}{z}$ et $z-1$ appartiennent à un même cercle de centre O.

EXERCICE 11

1. Calculer le module et un argument des nombres complexes suivants :

$z_1=4+4\mathrm{i}$; $z_2=\sqrt{3}+\mathrm{i}$; $z_3=1-i\sqrt{3}$; $z_4=1+i\sqrt{3}$; $z_5=i-1$; $z_6=-4$; $z_7=\sqrt{3}-i$; $z_8=\sqrt{2}(i-1)$; $z_9=i\sqrt{3}-1$; $z_{10}=-4+4\mathrm{i}$

2. En donner une écriture trigonométrique et une écriture exponentielle de chaque nombre complexe.

3. À chaque nombre complexe z_k de la première question, on associe son image M_k dans le plan complexe, rapporté à un repère orthonormé direct $(O;\vec{u},\vec{v})$ d'unité 2 cm. Dessiner avec précision les points M_k.

EXERCICE 12

Soit $z\in\mathbb{C}$ .On pose $z=x+iy$ avec $x\in\mathbb{R}$ et $y\in\mathbb{R}$

1. Déterminer la partie réelle Re(Z) et la partie imaginaire Im(Z) du nombre complexe:

$Z=3z^2+z.\bar{z}-6\mathrm{i}\sqrt{2}$

2. Résoudre l'équation:

(E): $3z^2+z.\bar{z}-6\mathrm{i}\sqrt{2}=0$

EXERCICE 13

Dans le plan complexe, à tout point M d'affixe z, on associe le point M' d'affixe z' tel que :

$z'=z\bar{z}+(1+\mathrm{i})z+3\bar{z}-2$.

1. (a) Déterminer les affixes $z_{A'}$ et $z_{B'}$ des points A' et B', associés aux points A et B d'affixes respectives $z_A=2+\mathrm{i}$ et $z_B=-i$.

(b) Déterminer l'affixe z_K du milieu K de [AB].

(c) Déterminer l'affixe $z_{K'}$ du point K' associé à K.

(d) K' est-il le milieu de [A'B'] ?

2. On pose $z=x+iy$ et $z'=x'+iy'$ (x, y, x', y' réels).

Exprimer x' et y' en fonction de x et de y.

3. Déterminer l'ensemble $\mathcal{E}$ des points M du plan tels que z' soit réel.

4. Déterminer l'ensemble $\mathcal{F}$ des points M du plan tels que z' soit imaginaire pur.

EXERCICE 14

Pour chacune de ces questions, une seule réponse est exacte. On donnera la réponse exacte et on justifiera le choix.

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormal $(O;\vec{u},\vec{v})$.

1. Soit z un nombre complexe vérifiant $\bar{z}+|z|=6+2\mathrm{i}$. Alors l'écriture algébrique de z est :

a) $\frac{8}{3}-2\mathrm{i}$ b) $-\frac{8}{3}-2\mathrm{i}$ c) $\frac{8}{3}+2\mathrm{i}$ d) $-\frac{8}{3}+2\mathrm{i}$

2. Dans le plan complexe, l'ensemble des points M d'affixe $z=x+iy$ vérifiant $|z-1|=|z+\mathrm{i}|$ est la droite d'équation :

a) $y=x-1$ b) $y=-x$ c) $y=-x+1$ d) $y=x$

3. Soit n un entier naturel. Le nombre complexe $(1+\mathrm{i}\sqrt{3})^n$ est réel si, et seulement si, n s'écrit sous la forme :

a) $3k+1$, $k\in\mathbb{N}$ b) $3k+2$, $k\in\mathbb{N}$ c) $3k$, $k\in\mathbb{N}$ d) $6k$, $k\in\mathrm{N}$

4. On pose $z=-\sqrt{2+\sqrt{2}}+i\sqrt{2-\sqrt{2}}$.

Un argument de z^2 est :

a) $\frac{\pi}{4}$ b) $-\frac{\pi}{4}$ c) $\frac{3\pi}{4}$ d) $-\frac{3\pi}{4}$.

5. On pose $z=-\sqrt{2+\sqrt{2}}+i\sqrt{2-\sqrt{2}}$.

Un argument de z est :

a) $\frac{7\pi}{8}$ b) $\frac{\pi}{8}$ c) $\frac{5\pi}{8}$ d) $\frac{3\pi}{8}$.

6. Soient D la droite d'équation $y=x\sqrt{3}$ et M un point de D d'abscisse strictement positive. On appelle z l'affixe de M . Alors :

a) $arg(z)=\frac{\pi}{6}$ b) $arg(z)=\frac{\pi}{4}$ c) $arg(z)=\frac{\pi}{3}$ d) $arg(z)=\frac{2\pi}{3}$.

7. Soit z un nombre complexe non nul d'argument θ, où θ est un nombre réel. Un argument de $\frac{\sqrt{3}-\mathrm{i}}{\overline{z}}$ est :

a) $\frac{\pi}{6}+\theta$ b) $\theta-\frac{\pi}{6}$ c) $\frac{\pi}{6}-\theta$ d) $\frac{\pi}{3}-\theta$.

8. Soit z un nombre complexe non nul d'argument θ, où θ est un nombre réel. Un argument de $z+|z|$ est :

a) $\frac{\theta}{2}$ b) θ c) $\frac{\pi}{4}$ d) $\frac{\theta}{4}$

EXERCICE 15

Donner une écriture trigonométrique et une écriture exponentielle des nombres complexes suivants :

1. $z_1=1-i$
2. $z_2=\frac{3\sqrt{3}}{2}-\frac{3}{2}\mathrm{i}$
3. $z_3=-3\sqrt{\frac{3}{2}}+\frac{3}{\sqrt{2}}\mathrm{i}$
4. $z_4=\sqrt{2}-\sqrt{2}\mathrm{i}$
5. $z_5=-\frac{5\sqrt{3}}{2}+\frac{5}{2}\mathrm{i}$

EXERCICE 16

Dans le plan complexe rapporté au repère $(\mathrm{O};\vec{\mathrm{u}};\vec{\mathrm{v}})$

$A(3-2\mathrm{i})$ $B(-2+3\mathrm{i})$ $M(z)$ avec $z\neq 3-2\mathrm{i}$

Soit $Z=\frac{z+2-3\mathrm{i}}{z-3+2\mathrm{i}}$

1. En posant: $z=x+iy$ avec $x\in\mathbb{R}$ et $y\in\mathbb{R}$, démontrer que: $Z=\frac{x^2+y^2-x-y-12}{(x-3)^2+(y+2)^2}+i\left(\frac{-5x-5y+5}{(x-3)^2+(y+2)^2}\right)$

2. Si $M \neq A$ et $M \neq B$ alors donner une interprétation géométrique du module et d'un argument de Z.
3. Déterminer et construire l'ensemble (E_1) des points $M(z)$ tels que Z soit un imaginaire pur.
4. Déterminer et construire l'ensemble (E_2) des points $M(z)$ tels que Z soit un nombre réel.
5. Déterminer et construire l'ensemble (E_3) des points $M(z)$ tels que Z soit un nombre réel et négatif.
6. Déterminer et construire l'ensemble (E_4) des points $M(z)$ tels que $\arg Z = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$.
7. Déterminer et construire l'ensemble (E_5) des points $M(z)$ tels que $|Z| = 1$
8. Déterminer et construire l'ensemble (E_6) des points $M(z)$ tels que $|Z| = 2$

EXERCICE 17

1. Écrire sous forme exponentielle les nombres suivants:

$$z_1 = \frac{\sqrt{6} + i\sqrt{2}}{2} \; ; \; z_2 = 1 - i \; ; \; z_3 = \frac{z_1}{z_2}$$

2. En déduire les valeurs exactes de $\cos\frac{5\pi}{12}$ et de $\sin\frac{5\pi}{12}$

EXERCICE 8

$(O; \vec{u}; \vec{v})$ est un repère orthonormé direct du plan complexe.
1. A est le point d'affixe $z_A = -1 + i$
B est le point d'intersection du cercle (C) centre O passant par A et de l'axe des abscisses, d'abscisse négative.
Déterminer l'affixe de B.
2. Construire le point M d'affixe $z_M = -1 - \sqrt{2} + i$
Écrire z_M sous forme exponentielle
En déduire les valeurs exactes de $\cos\frac{7\pi}{8}$ et de $\sin\frac{7\pi}{8}$

EXERCICE 19

α est un nombre réel donné.

Écrire sous forme exponentielle, les nombres complexes suivants:

1. $z_1 = \sin\alpha - i\cos\alpha$

Application: $\alpha = \frac{\pi}{3}$

2. $z_2 = 1 + \cos\alpha + i\sin\alpha$

Application: $\alpha = \frac{\pi}{3}$

3. $z_3 = \cos\alpha + i\sin\alpha + i$

Application: $\alpha = \frac{\pi}{3}$

EXERCICE 20

$(O; \vec{u}; \vec{v})$ est un repère orthonormé direct du plan complexe.

1. a) Déterminer et construire l'ensemble des points M d'affixe z tels que: $\arg z = \frac{\pi}{4} + 2k\pi$

b) Déterminer et construire l'ensemble des points M d'affixe z tels que: $\arg(z - 1 + i) = \frac{\pi}{4} + 2k\pi$

2. a) Déterminer et construire l'ensemble des points M d'affixe z tels que: $\arg z = \frac{\pi}{3} + 2k\pi$

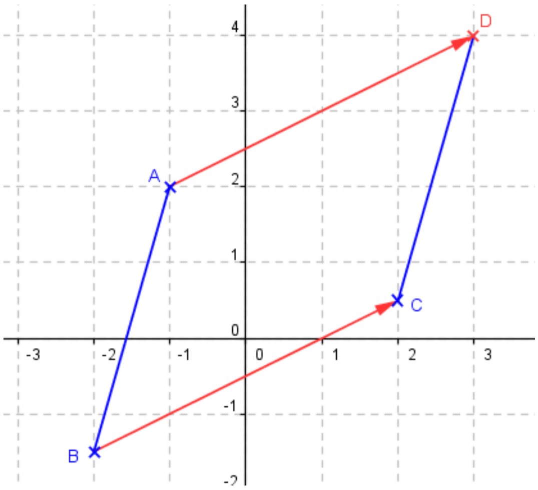
b) Déterminer et construire l'ensemble des points M d'affixe z tels que: $\arg(\bar{z} + 1 + 2i) = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi$

3. Déterminer et construire l'ensemble des points M d'affixe z tels que: $\arg(z - 1 + i) = \arg(z + 1 - 2i) + 2k\pi$.

CORRECTION

EXERCICE 1

1.



2.

$\overrightarrow{BC}\left(2+\frac{1}{2}\mathrm{i}+2+\frac{3}{2}\mathrm{i}\right)$

$\boxed{\overrightarrow{\mathrm{BC}}(4+2\mathrm{i})}$

3. ABCD est **un parallélogramme** si et seulement si: $\overrightarrow{\mathrm{AD}}=\overrightarrow{\mathrm{BC}}$

On note: $z_D=x+iy$ avec $x\in\mathbb{R}$ et $y\in\mathbb{R}$

$\overrightarrow{AD}(x+1+\mathrm{i}(y-2))$

$\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{BC} \Leftrightarrow \begin{cases}x+1=4\\ y-2=2\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=3\\ y=4\end{cases}$

$D(3+4\mathrm{i})$

$\boxed{z_D=3+4\mathrm{i}}$

EXERCICE 2

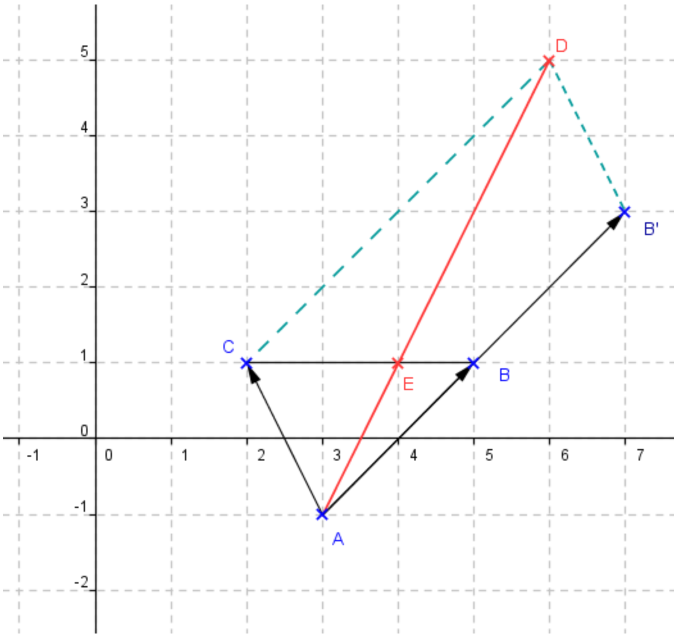
1. $z_A=3-\mathrm{i}$ $\qquad z_B=5+\mathrm{i}$ $\qquad z_C=2+\mathrm{i}$

$\overrightarrow{AB}(5+\mathrm{i}-3+\mathrm{i})$ $\qquad \boxed{\overrightarrow{AB}(2+2\mathrm{i})}$

$\overrightarrow{AC}(2+i-3+i)$ $\qquad \boxed{\overrightarrow{AC}(-1+2\mathrm{i})}$

$\overrightarrow{BC}(2+i-5-i)$ $\qquad \boxed{\overrightarrow{BC}(-3+0\mathrm{i})}$

2.



$\overrightarrow{AD}=2\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}$

Pour la construction du point D, on place le point B' tel que $\overrightarrow{AB'}=2\overrightarrow{AB}$, puis on construit le parallélogramme CAB'D.

$\overrightarrow{AB}(2+2i)$ $\quad 2\overrightarrow{AB}(4+4i)$ $\quad$ et $\quad \overrightarrow{AC}(-1+2i)$

$\overrightarrow{AD}=2\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}(4-1+4i+2i)$

$\overrightarrow{AD}(3+6i)$

$D(z_D)\quad z_D=x+iy$ avec $x\in\mathbb{R}$ et $y\in\mathbb{R}$

$\overrightarrow{AD}(z_D-z_A)\qquad \overrightarrow{AD}(3+6i)$

$x+iy-(3-i)=3+6i$

$x-3+i(y+1)=3+6i$

$\begin{cases}x-3=3\\y+1=6\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=6\\y=5\end{cases}$

$D(6+5i)$

$\boxed{z_D=6+5i}$

$3\overrightarrow{BE}=\overrightarrow{BC}$

On place sur le dessin le point E tel que $\overrightarrow{BE}=\frac{1}{3}\overrightarrow{BC}$

$\overrightarrow{BC}(-3+0i)\qquad \frac{1}{3}\overrightarrow{BC}(-1+0i)$

$E(z_E)\quad z_E=x+iy$ avec $x\in\mathbb{R}$ et $y\in\mathbb{R}$

$\overrightarrow{BE}(z_E-z_B)$

$z_E-z_B=x+iy-(5+i)=x-5+i(y-1)$

$\overrightarrow{BE}=\frac{1}{3}\overrightarrow{BC}\Leftrightarrow x-5+i(y-1)=-1+0i$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x-5=-1 \\ y-1=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=4 \\ y=1 \end{cases}$

$E(4+\mathrm{i})$

$\boxed{z_E=4+\mathrm{i}}$

3. $\overrightarrow{AE}(4+\mathrm{i}-(3-\mathrm{i}))$

$\overrightarrow{AE}(1+2i)$

$\overrightarrow{AD}(6+5\mathrm{i}-(3-\mathrm{i}))$

$\overrightarrow{AD}(3+6\mathrm{i})$

On a $3+6\mathrm{i}=3(1+2\mathrm{i})$

Donc $\overrightarrow{AD}=3\overrightarrow{AE}$.

Par suite, les points **A; D et E sont alignés**.

EXERCICE 3

1. a) $\overrightarrow{DC'}=-\overrightarrow{DC}$

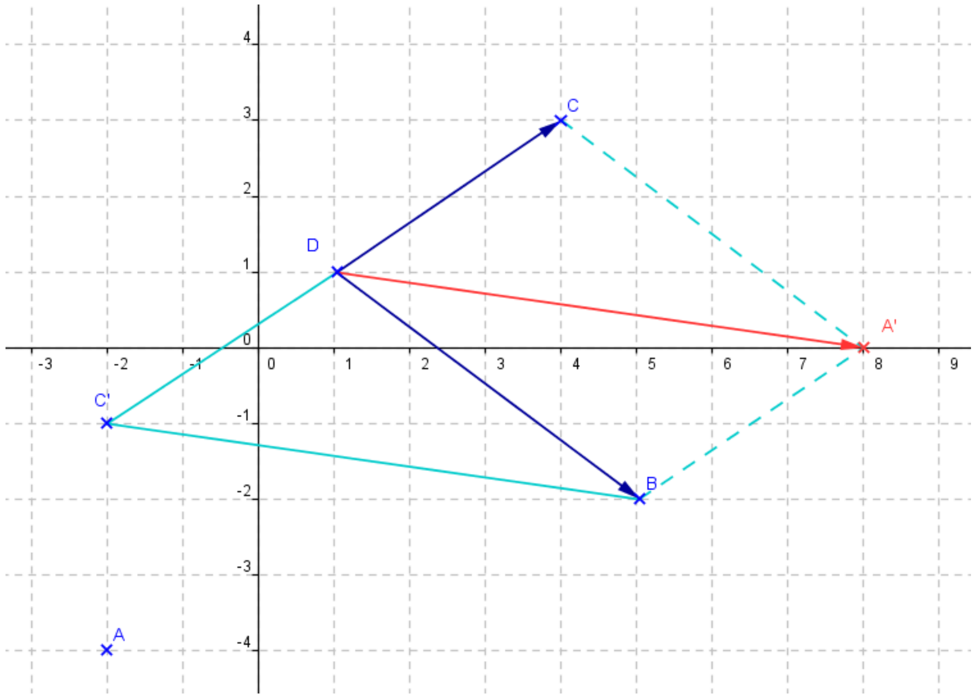
$z_{C'}-z_D=-(z_C-z_D)$

$z_{C'}=-z_C+2z_D$

$z_{C'}=-(4+3\mathrm{i})+2(1+\mathrm{i})$

$z_{C'}=-4-3\mathrm{i}+2+2\mathrm{i}$

$\boxed{z_{C'}=-2-\mathrm{i}}$



b) $\overrightarrow{DA'}=\overrightarrow{DB}+\overrightarrow{DC}$

$\overrightarrow{DB}(5-2\mathrm{i}-(1+\mathrm{i}))$ $\qquad$ $\overrightarrow{DB}(4-3\mathrm{i})$

$\overrightarrow{DC}(4+3\mathrm{i}-(1+\mathrm{i}))$ $\qquad$ $\overrightarrow{DC}(3+2\mathrm{i})$

$\overrightarrow{DA'}=\overrightarrow{DB}+\overrightarrow{DC}(4+3-3\mathrm{i}+2\mathrm{i})$

$\overrightarrow{DA'}(7-\mathrm{i})$

$\overrightarrow{DA'}(z_{A'}-z_D)$

Donc:

$z_{A'}-z_D=7-\mathrm{i}$

$z_{A'}=1+\mathrm{i}+7-\mathrm{i}$

$\boxed{z_{A'}=8}$

c)

$\overrightarrow{C'B}(5-2i-(-2-i))$ $\overrightarrow{C'B}(7-i)$

Donc:

$\overrightarrow{DA'}=\overrightarrow{C'B}$

Par suite, **le quadrilatère A'BC'D est un parallélogramme**.

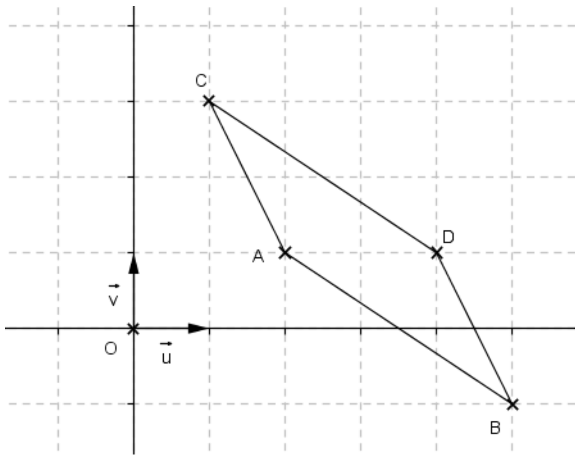
EXERCICE 4

1. $\boxed{O(0)}$ $\boxed{A(2+3i)}$ $\boxed{B(-3-i)}$ $\boxed{C(-2i)}$ $\boxed{D(4)}$ $\boxed{E(-1+5i)}$

2.
$\boxed{\overrightarrow{AB}(-5-4i)}$
$\boxed{\overrightarrow{CE}(-1+7i)}$
$\boxed{\overrightarrow{ED}(5-5i)}$

EXERCICE 5

1.



2. $D(a+ib)$ avec $a\in\mathbb{R}$ et $b\in\mathbb{R}$

$\overrightarrow{AB}(3-2i)$ $\overrightarrow{CD}(a-1+ib-3i)$

ABDC est un parallélogramme $\Leftrightarrow$ $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CD}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a-1=3 \\ b-3=-2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a=4 \\ b=1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \boxed{D(4+i)}$$

EXERCICE 6

1. $z_1=2-i$

$|z_1|^2=2^2+(-1)^2=5$

$\boxed{|z_1|=\sqrt{5}}$

2. $z_2=3+4i$

$|z_2|^2=3^2+4^2=9+16=25$

$\boxed{|z_2|=5}$

3. $z_3=7-\mathrm{i}$

$|z_3|^2=7^2+(-1)^2=49+1=50$

$\boxed{|z_3|=5\sqrt{2}}$

4. $z_4=-4+3\mathrm{i}$

$|z_4|^2=(-4)^2+3^2=16+9=25$

$\boxed{|z_4|=5}$

5. $z_5=\sqrt{7}+\mathrm{i}\sqrt{5}$

$|z_5|^2=(\sqrt{7})^2+(\sqrt{5})^2=7+5=12$

$\boxed{|z_5|=2\sqrt{3}}$

6. $z_6=(1+\mathrm{i})^4$

$(1+\mathrm{i})^2=1+2\mathrm{i}-1=2\mathrm{i}$

$z_6=(2\mathrm{i})^2=-4$

$\boxed{|z_6|=4}$

7. $z_7=(-3+5\mathrm{i})^2$

$|z_7|=|(-3+5\mathrm{i})^2|$

$|z_7|=|-3+5\mathrm{i}|^2$

$|z_7|=9+25=34$

$\boxed{|z_7|=34}$

8. $z_8=(1-\sqrt{3}\mathrm{i})(\sqrt{11}-5\mathrm{i})$

$|1-\sqrt{3}\mathrm{i}|^2=1^2+(-\sqrt{3})^2=1+3=4$

$|1-\sqrt{3}\mathrm{i}|=2$

$|\sqrt{11}-5\mathrm{i}|^2=(\sqrt{11})^2+(-5)^2=11+25=36$

$|\sqrt{11}-5\mathrm{i}|=6$

$|z_8|=|1-\sqrt{3}\mathrm{i}|\times|\sqrt{11}-5\mathrm{i}|$

$\boxed{|z_8|=2\times 6=12}$

9. $z_9=\dfrac{4-3\mathrm{i}}{3-4\mathrm{i}}$

$|z_9|=\left|\dfrac{4-3\mathrm{i}}{3-4\mathrm{i}}\right|=\dfrac{|4-3\mathrm{i}|}{|3-4\mathrm{i}|}$

$|4-3\mathrm{i}|^2=4^2+(-3)^2=16+9=25$

$|4-3\mathrm{i}|=5$

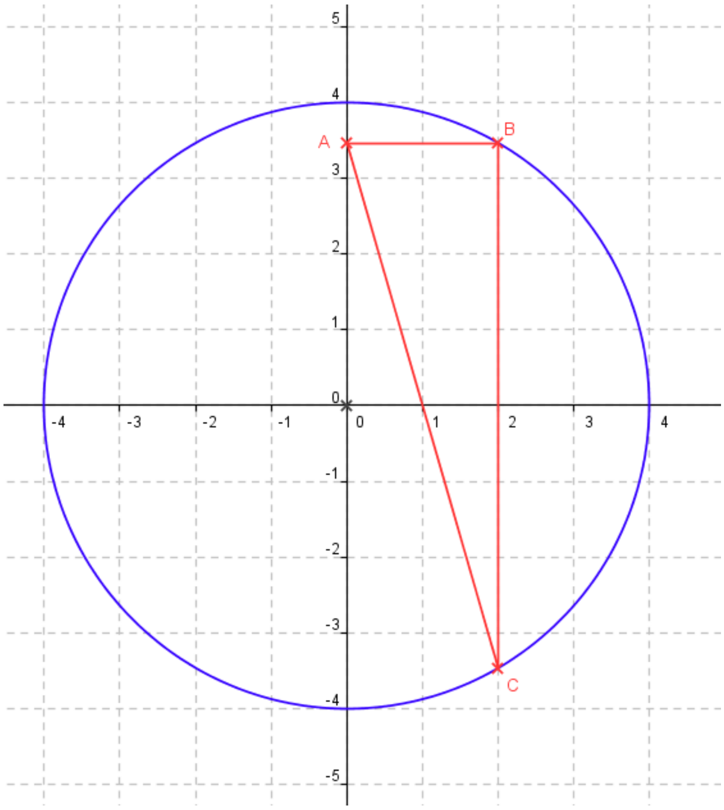
$|3-4\mathrm{i}|^2=3^2+(-4)^2=9+16=25$

$|3-4\mathrm{i}|=5$

$\boxed{|z_9| = \frac{5}{5} = 1}$

EXERCICE 7

1.



$|z_B|^2 = 2^2 + (2\sqrt{3})^2 = 4 + 4 \times 3 = 4 + 12 = 16$
$|z_B| = OB = 4$

$|z_C|^2 = 2^2 + (-2\sqrt{3})^2 = 4 + 4 \times 3 = 4 + 12 = 16$
$|z_C| = OC = 4$

Remarque: $z_C = \overline{z_B}$ donc $|z_B| = |z_C|$

$\boxed{\text{OB=OC=4}}$ donc **les points B et C appartiennent au cercle de centre O et de rayon 4**.

2.
$z_B - z_C = z_B - \overline{z_B} = 2i\,\Im(z_B)$

$\boxed{z_A = \frac{z_B - z_C}{2} = i\,\Im(z_B) = 2i\sqrt{3}}$

$z_B - z_A = 2 + 2i\sqrt{3} - 2i\sqrt{3} = 2$
$\boxed{|z_B - z_A| = 2}$

$z_C - z_A = 2 - 2i\sqrt{3} - 2i\sqrt{3} = 2 - 4i\sqrt{3}$
$\boxed{|z_C - z_A| = \sqrt{2^2 + (-4\sqrt{3})^2} = \sqrt{4 + 16 \times 3} = \sqrt{52}}$

$z_B - z_C = 2 + 2i\sqrt{3} - 2 + 2i\sqrt{3} = 4i\sqrt{3}$
$\boxed{|z_B - z_C| = 4\sqrt{3}}$

3.
Dans le triangle ABC:
$AB = |z_B - z_A| = 2$

$AC = |z_C - z_A| = \sqrt{52}$
$BC = |z_B - z_C| = 4\sqrt{3}$
Donc:
BC²+BA²=48+4=52
AC²=52

On a $\boxed{AC^2=BC^2+BA^2}$.
Donc le triangle ABC est rectangle en B d'après la réciproque du théorème de Pythagore.

EXERCICE 8

1.
a) $|z-1+i| = |z+2-i|$

Soient $A(1-i)$ et $B(-2+i)$
$M(z)$
$AM = |z-1+i|$
$BM = |z+2-i|$

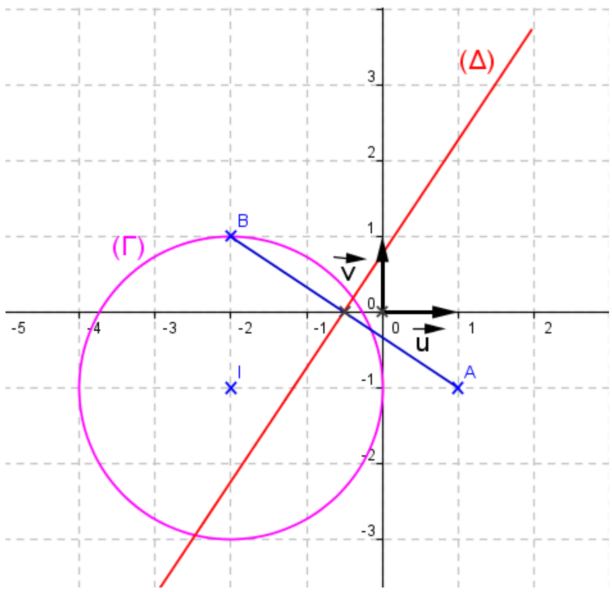
$|z-1+i| = |z+2-i|$
$\Leftrightarrow \ AM = BM$
$\Leftrightarrow$ M appartient à la médiatrice du segment [AB]
Donc l'ensemble cherché est (Δ) **médiatrice du segment [AB]**.

b) $|z+2+i| = 2$

Soit $I(-2-i)$
$M(z)$
$MI = |z+2+i|$

$|z+2+i| = 2$
$\Leftrightarrow \ MI = 2$
$\Leftrightarrow$ M appartient au cercle de centre I et de rayon 2.
Donc l'ensemble cherché est (Γ) **cercle de centre I et de rayon 2**.

c)



2. $z=x+iy$ avec $x\in$ et $y\in\mathbb{R}$

a) $z-1+\mathrm{i}=x-1+\mathrm{i}(y+1)$

$|z-1+\mathrm{i}|^2=(x-1)^2+(y+1)^2$

$z+2-\mathrm{i}=x+2+\mathrm{i}(y-1)$

$|z+2-\mathrm{i}|^2=(x+2)^2+(y-1)^2$

$|z-1+\mathrm{i}|=|z+2-\mathrm{i}|$

$\Leftrightarrow\ (x-1)^2+(y+1)^2=(x+2)^2+(y-1)^2$

$\Leftrightarrow\ x^2-2x+1+y^2+2y+1=x^2+4x+4+y^2-2y+1$

$\Leftrightarrow\ -6x+4y-3=0$

(Δ) : **$-6x+4y-3=0$**

b) $z+2+\mathrm{i}=(x+2)+\mathrm{i}(y+1)$

$|z+2+\mathrm{i}|^2=(x+2)^2+(y+1)^2$

$|z+2+\mathrm{i}|=2$

$\Leftrightarrow\ (x+2)^2+(y+1)^2=4$

$\Leftrightarrow\ x^2+y^2+4x+2y+1=0$

(Γ) : **$x^2+y^2+4x+2y+1=0$**

EXERCICE 9

1.

a) $|iz+1-\mathrm{i}|=|z+3|$

$iz+1-\mathrm{i}=\mathrm{i}\left(z+\frac{1}{\mathrm{i}}-1\right)=\mathrm{i}(z-\mathrm{i}-1)$

Soit $A(1+\mathrm{i})$

$AM=|z-\mathrm{i}-1|$

Or, $|iz+1-\mathrm{i}|=|i(z-i-1)|=|z-1-i|=AM$

Soit $B(-3)$

$BM=|z+3|$

$|iz+1-\mathrm{i}|=|z+3|$

$\Leftrightarrow\ AM=BM$

$\Leftrightarrow$ M appartient à la médiatrice du segment [AB]

Donc l'ensemble cherché est (Δ) **médiatrice du segment [AB]**.

b) $|\bar{z}+2-\mathrm{i}|=2$

$\bar{z}+2-\mathrm{i}=\overline{z+2+\mathrm{i}}$

Soit $I(-2-\mathrm{i})$

$\mathrm{IM}=|z+2+i|$

$|\bar{z}+2-\mathrm{i}|=|\overline{z+2+i}|=|z+2+i|=\mathrm{IM}$

$|\bar{z}+2-\mathrm{i}|=2$

$\Leftrightarrow$ IM=2

$\Leftrightarrow$ M appartient au cercle de centre I et de rayon 2.

Donc l'ensemble cherché est (Γ) **cercle de centre I et de rayon 2**.

c) $|iz+2+\mathrm{i}|=3$

$iz+2+\mathrm{i}=\mathrm{i}\left(z+\frac{2}{\mathrm{i}}+1\right)=\mathrm{i}(z+1-2\mathrm{i})$

Soit $J(-1+2\mathrm{i})$

$\mathrm{JM}=|z+1-2\mathrm{i}|$

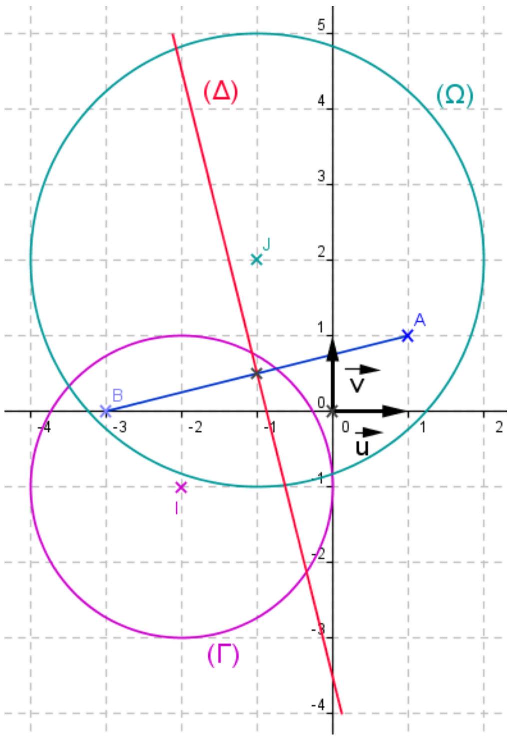
$|iz+2+\mathrm{i}|=|i(z+1-2\mathrm{i})|=|z+1-2\mathrm{i}|=JM$

$|iz+2+\mathrm{i}|=3$

$\Leftrightarrow\ JM=3$

$\Leftrightarrow$ M appartient au cercle de centre J et de rayon 3.

Donc l'ensemble cherché est (Ω) **cercle de centre J et de rayon 3**.



2.

$z=x+iy$ avec $x\in\mathbb{R}$ et $y\in\mathbb{R}$

a) $|iz+1-\mathrm{i}|=|z+3|$

$iz+1-\mathrm{i}=\mathrm{i}(x+iy)+1-\mathrm{i}=ix-y+1-\mathrm{i}=(1-y)+\mathrm{i}(x-1)$

$|iz+1-\mathrm{i}|^2=(1-y)^2+(x-1)^2$

$z+3=x+iy+3=(x+3)+iy$

$|z+3|^2=(x+3)^2+y^2$

$|iz+1-\mathrm{i}|=|z+3|$

$\Leftrightarrow\ (1-y)^2+(x-1)^2=(x+3)^2+y^2$

$\Leftrightarrow\ 1-2y+y^2+x^2-2x+1=x^2+6x+9+y^2$

$\Leftrightarrow\ -8x-2y-7=0$

(Δ) : **$-8x-2y-7=0$**

b) $|\bar{z}+2-\mathrm{i}|=2$

$\bar{z}+2-i=x-iy+2-i=(x+2)-i(y+1)$
$|\bar{z}+2-i|^2=(x+2)^2+(y+1)^2$
$|\bar{z}+2-i|=2$
$\Leftrightarrow\ (x+2)^2+(y+1)^2=4$
$\Leftrightarrow\ x^2+y^2+4x+2y+1=0$
(Γ) : $x^2+y^2+4x+2y+1=0$

c) $|iz+2+i|=3$
$iz+2+i=i(x+iy)+2+i=ix-y+2+i=(2-y)+i(x+1)$
$|iz+2+i|^2=(2-y)^2+(x+1)^2$
$|iz+2+i|=3$
$\Leftrightarrow\ (2-y)^2+(x+1)^2=9$
$\Leftrightarrow\ x^2+y^2+2x-4y-4=0$
(Ω) : $x^2+y^2+2x-4y-4=0$

EXERCICE 10

M; M' et M'' appartiennent au même cercle de centre O si et seulement si OM=OM'=OM'', c'est à dire si et seulement si $|z|=\left|\frac{1}{z}\right|=|z-1|$

$|z|=\left|\frac{1}{z}\right|\ \Leftrightarrow\ |z^2|=1=|z|^2\ \Leftrightarrow$ M appartient au cercle (Γ) de centre O et de rayon 1.

On note $I(1)$

$|z-1|=\mathrm{IM}\ \Leftrightarrow\ |z|=OM\ \Leftrightarrow$ M appartient à la médiatrice (Δ) du segment [IO].

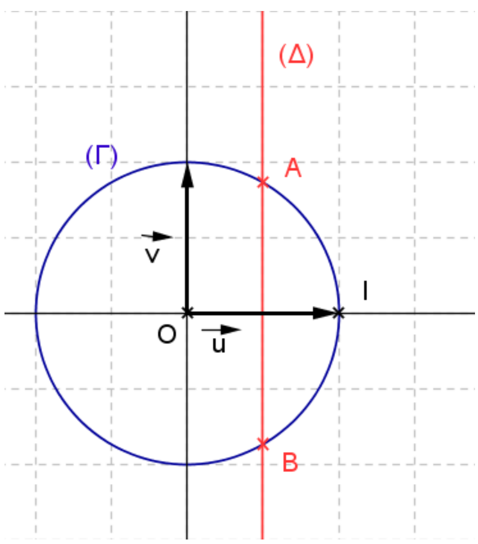
(Γ) : $x^2+y^2=1$ et (Δ) : $x=\frac{1}{2}$

On a donc:

$\frac{1}{4}+y^2=1\ \Leftrightarrow\ y^2=\frac{3}{4}\ \Leftrightarrow\ (y=-\frac{\sqrt{3}}{2}$ ou $y=\frac{\sqrt{3}}{2})$

On obtient $z=\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}$ et $z=\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}$

$\boxed{A\left(\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)}$ et $\boxed{B\left(\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)}$



EXERCICE 11

1. $|z_1|^2=4^2+4^2$

$|z_1|^2=16+16$

$|z_1|=\sqrt{32}=4\sqrt{2}$

$$z_1=4\sqrt{2}\left(\frac{4}{4\sqrt{2}}+i\frac{4}{4\sqrt{2}}\right)$$

$$z_1=4\sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}+i\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

$$z_1=4\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

$\cos\theta_1=\frac{\sqrt{2}}{2}$ et $\sin\theta_1=\frac{\sqrt{2}}{2}$ donc $\theta_1=\frac{\pi}{4}(2\pi)$

$$\boxed{z_1=4\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)=4\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}}$$

$|z_2|^2=\sqrt{3}^2+1^2$

$|z_2|^2=3+1$

$|z_2|=2$

$$z_2=2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+i\frac{1}{2}\right)$$

$\cos\theta_2=\frac{\sqrt{3}}{2}$ et $\sin\theta_2=\frac{1}{2}$ donc $\theta_2=\frac{\pi}{6}(2\pi)$

$$\boxed{z_2=2\left(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}\right)=2e^{i\frac{\pi}{6}}}$$

$|z_3|^2=1^2+(-\sqrt{3})^2$

$|z_3|^2=1+3$

$|z_3|=2$

$$z_3=2\left(\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

$\cos\theta_3=\frac{1}{2}$ et $\sin\theta_3=\frac{-\sqrt{3}}{2}$ donc $\theta_3=\frac{-\pi}{3}(2\pi)$

$$\boxed{z_3=2\left(\cos\left(\frac{-\pi}{6}\right)+i\sin\left(\frac{-\pi}{6}\right)\right)=2e^{-i\frac{\pi}{6}}}$$

$|z_4|^2=1^2+\sqrt{3}^2$

$|z_4|^2=1+3$

$|z_4|=2$

$$z_4=2\left(\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

$\cos\theta_4=\frac{1}{2}$ et $\sin\theta_4=\frac{\sqrt{3}}{2}$ donc $\theta_4=\frac{\pi}{3}(2\pi)$

$$\boxed{z_4=2\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)=2e^{i\frac{\pi}{3}}}$$

$$|z_5|^2=(-1)^2+1^2$$
$$|z_5|^2=1+1$$
$$|z_5|=\sqrt{2}$$

$$z_5=\sqrt{2}\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}+i\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$
$$z_5=\sqrt{2}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

$\cos\theta_5=\frac{-\sqrt{2}}{2}$ et $\sin\theta_5=\frac{\sqrt{2}}{2}$ donc $\theta_5=\pi-\frac{\pi}{4}(2\pi)$

$$\theta_5=\frac{3\pi}{4}(2\pi)$$

$$\boxed{z_5=\sqrt{2}\left(\cos\frac{3\pi}{4}+i\sin\frac{3\pi}{4}\right)=\sqrt{2}e^{i\frac{3\pi}{4}}}$$

$$|z_6|^2=(-4)^2$$
$$|z_6|^2=16$$
$$|z_6|=4$$

$$z_6=4(-1+i0)$$

$\cos\theta_6=-1$ et $\sin\theta_6=0$ donc $\theta_6=\pi(2\pi)$

$$\boxed{z_6=4(\cos\pi+i\sin\pi)=4e^{i\pi}}$$

$$|z_7|^2=\sqrt{3}^2+(-1)^2$$
$$|z_7|^2=3+1$$
$$|z_7|=2$$

$$z_7=2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}-i\frac{1}{2}\right)$$

$\cos\theta_7=\frac{\sqrt{3}}{2}$ et $\sin\theta_7=\frac{-1}{2}$ donc $\theta_7=\frac{-\pi}{6}(2\pi)$

$$\boxed{z_7=2\left(\cos\left(\frac{-\pi}{6}\right)+i\sin\left(\frac{-\pi}{6}\right)\right)=2e^{-i\frac{\pi}{6}}}$$

$|z_8|^2=\sqrt{2}^2((-1)^2+1^2)$
$|z_8|^2=2\times 2$
$|z_8|=2$

$$z_8=2\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

$\cos\theta_8=\frac{-\sqrt{2}}{2}$ et $\sin\theta_8=\frac{\sqrt{2}}{2}$ donc $\theta_8=\pi-\frac{\pi}{4}(2\pi)$
$\theta_8=\frac{3\pi}{4}(2\pi)$

$$\boxed{z_8=2\left(\cos\frac{3\pi}{4}+i\sin\frac{3\pi}{4}\right)=2e^{i\frac{3\pi}{4}}}$$

$|z_9|^2=1^2+\sqrt{3}^2$
$|z_9|^2=1+3$
$|z_9|=2$

$$z_9=2\left(-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

$\cos\theta_9=\frac{-1}{2}$ et $\sin\theta_9=\frac{\sqrt{3}}{2}$ donc $\theta_9=\pi-\frac{\pi}{3}(2\pi)$
$\theta_9=\frac{2\pi}{3}(2\pi)$

$$\boxed{z_9=2\left(\cos\frac{2\pi}{3}+i\sin\frac{2\pi}{3}\right)=2e^{i\frac{2\pi}{3}}}$$

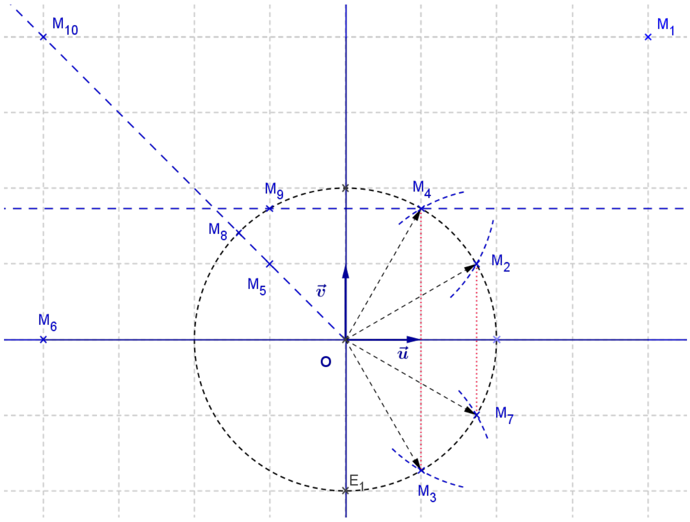
$|z_{10}|^2=(-4)^2+4^2$
$|z_{10}|^2=16+16$
$|z_{10}|=\sqrt{32}=4\sqrt{2}$

$$z_{10}=4\sqrt{2}\left(-\frac{4}{4\sqrt{2}}+i\frac{4}{4\sqrt{2}}\right)$$
$$z_{10}=4\sqrt{2}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

$\cos\theta_{10}=\frac{-\sqrt{2}}{2}$ et $\sin\theta_{10}=\frac{\sqrt{2}}{2}$ donc $\theta_{10}=\pi-\frac{\pi}{4}(2\pi)$
$\theta_{10}=\frac{3\pi}{4}(2\pi)$

$$\boxed{z_{10}=4\sqrt{2}\left(\cos\frac{3\pi}{4}+i\sin\frac{3\pi}{4}\right)=4\sqrt{2}e^{i\frac{3\pi}{4}}}$$

3.



EXERCICE 12

1. $z=x+iy$

$Z=3z^2+z.\bar{z}-6i\sqrt{2}$

$Z=3(x+iy)^2+(x+iy)\overline{(x+iy)}-6i\sqrt{2}$

$Z=3(x^2+2ixy-y^2)+(x+iy)(x-iy)-6i\sqrt{2}$

$Z=3x^2+6ixy-3y^2+x^2+y^2-6i\sqrt{2}$

$Z=4x^2-2y^2+i(6xy-6\sqrt{2})$

Donc:

$\boxed{\Re(Z)=4x^2-2y^2}$

$\boxed{\Im(Z)=6xy-6\sqrt{2}}$

2.

$Z=0$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 4x^2-2y^2=0 \\ 6xy-6\sqrt{2}=0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} (2x-\sqrt{2}y)(2x+\sqrt{2}y)=0 \\ 6(xy-\sqrt{2})=0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x-\sqrt{2}y=0 \\ xy-\sqrt{2}=0 \end{cases}$ ou $\begin{cases} 2x+\sqrt{2}y=0 \\ xy-\sqrt{2}=0 \end{cases}$

a) $\begin{cases} 2x=\sqrt{2}y \\ xy-\sqrt{2}=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\dfrac{\sqrt{2}}{2}y \\ xy-\sqrt{2}=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\dfrac{\sqrt{2}}{2}y \\ \dfrac{\sqrt{2}}{2}y^2-\sqrt{2}=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\dfrac{\sqrt{2}}{2}y \\ \sqrt{2}y^2-2\sqrt{2}=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\dfrac{\sqrt{2}}{2}y \\ y^2=2 \end{cases} \Leftrightarrow$

$\begin{cases} x=\dfrac{\sqrt{2}}{2}y \\ y=\sqrt{2}\ ou\ y=-\sqrt{2} \end{cases}$

Si $\boxed{y=\sqrt{2}}$ alors $\boxed{x=1}$

Si $\boxed{y=-\sqrt{2}}$ alors $\boxed{x=1}$

b) $\begin{cases}2x+\sqrt{2}y=0\\ xy-\sqrt{2}=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=\dfrac{-\sqrt{2}}{2}y\\ xy-\sqrt{2}=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=\dfrac{-\sqrt{2}}{2}y\\ \dfrac{-\sqrt{2}}{2}y^2-\sqrt{2}=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=\dfrac{-\sqrt{2}}{2}y\\ -\sqrt{2}y^2-2\sqrt{2}=0\end{cases}$

L'équation (2) n'a pas de solution

Conclusion:

$\boxed{S=\{1+i\sqrt{2};1-i\sqrt{2}\}}$

EXERCICE 13

1. (a) $z_{A'}=z_A\overline{z_A}+(1+i)z_A+3\overline{z_A}-2$

$z_{A'}=(2+i)(2-i)+(1+i)(2+i)+3(2-i)-2$

$z_A'=4+1+2+i+2i-1+6-3i-2$

$\boxed{z_A'=10}$

$z_{B'}=z_B\overline{z_B}+(1+i)z_B+3\overline{z_B}-2$

$z_{B'}=(-i)(i)+(1+i)(-i)+3i-2$

$z_{B'}=1-i+1+3i-2$

$\boxed{z_{B'}=2i}$

(b) $z_K=\dfrac{z_A+z_B}{2}$

$z_K=\dfrac{2+i-i}{2}$

$\boxed{z_K=1}$

(c) $z_{K'}=z_K\overline{z_K}+(1+i)z_K+3\overline{z_K}-2$

$z_{K'}=1\times1+(1+i)\times1+3\times1-2$

$z_{K'}=1+1+i+3-2$

$\boxed{z_K'=3+i}$

(d) L'affixe du milieu de [A'B'] est: $\dfrac{z_{A'}+z_{B'}}{2}=\dfrac{10+2i}{2}=5+i$

Donc **K' n'est pas le milieu de [AB]**.

2. $z'=z\overline{z}+(1+i)z+3\overline{z}-2$

$z'=(x+iy)(x-iy)+(1+i)(x+iy)+3(x-iy)-2$

$z'=x^2+y^2+x+iy+ix-y+3x-3iy-2$

$z'=x^2+y^2+x-y+3x-2+i(x-2y)$

On a donc:

$$\begin{cases} x'=x^2+y^2+4x-y-2 \\ y'=\quad x-2y \end{cases}$$

3. $M \in \mathcal{E} \Leftrightarrow x-2y=0$

$M \in \mathcal{E} \Leftrightarrow y=\frac{1}{2}x$

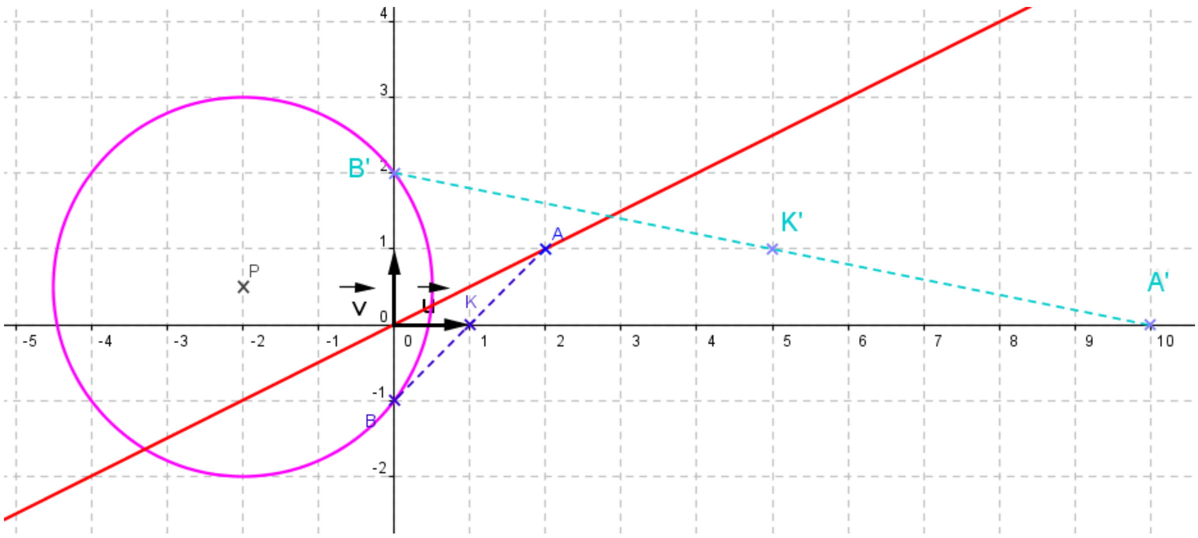
$\mathcal{E}$ est **la droite d'équation** $\boxed{y=\frac{1}{2}x}$

4. $M \in \mathcal{F} \Leftrightarrow x^2+y^2+4x-y-2=0$

$M \in \mathcal{F} \Leftrightarrow (x+2)^2-4+\left(y-\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{4}-2=0$

$M \in \mathcal{F} \Leftrightarrow (x+2)^2+\left(y-\frac{1}{2}\right)^2=\frac{25}{4}$

$\mathcal{F}$ est **le cercle de centre** $\boxed{P\left(-2+\frac{1}{2}i\right)}$ et **de rayon** $\frac{5}{2}$



Remarques:

$A(2+i) \in \mathcal{E}$

$B(-i) \in \mathcal{F}$

On remarque que $B'(2i) \in \mathcal{F}$

On appelle B'' l'image de B'.

D'après la question 2:

$z_{B''}=2^2-2-2+i\times(-2)\times 2$

$z_{B''}=-4i$

EXERCICE 14

1. $\left|\frac{8}{3}-2i\right|=\left|-\frac{8}{3}-2i\right|=\left|\frac{8}{3}+2i\right|=\left|-\frac{8}{3}+2i\right|=\sqrt{\frac{64}{9}+4}=\sqrt{\frac{64}{9}+\frac{36}{9}}=\sqrt{\frac{100}{9}}=\frac{10}{3}$

✗ Si $z=\frac{8}{3}-2i$

$\overline{\frac{8}{3}-2i}=\frac{8}{3}+2i$

$\bar{z}+|z|=\frac{8}{3}+2i+\frac{10}{3}=6+2i$

✗ Si $z=-\frac{8}{3}-2i$

$\overline{\frac{-8}{3}-2i}=\frac{-8}{3}+2i$

$\bar{z}+|z|=\frac{-8}{3}+2i+\frac{10}{3}=\frac{2}{3}+2i$

✗ Si $z=\frac{8}{3}+2i$

$\overline{\frac{8}{3}+2i}=\frac{8}{3}-2i$

$\bar{z}+|z|=\frac{8}{3}-2i+\frac{10}{3}=6-2i$

✗ Si $z=-\frac{8}{3}+2i$

$\overline{\frac{-8}{3}+2i}=\frac{-8}{3}-2i$

$\bar{z}+|z|=\frac{-8}{3}-2i+\frac{10}{3}=\frac{2}{3}-2i$

Donc $\boxed{z=\frac{8}{3}-2i}$

2. $z-1=x-1+iy$

$|z-1|^2=(x-1)^2+y^2$

$z+i=x+i(y+1)$

$|z+i|^2=x^2+(y+1)^2$

$|z-1|=|z+i|$

$\Leftrightarrow$ $|z-1|^2=|z+i|^2$

$\Leftrightarrow$ $(x-1)^2+y^2=x^2+(y+1)^2$

$\Leftrightarrow$ $x^2-2x+1+y^2=x^2+y^2+2y+1$

$\Leftrightarrow$ $-2x+1=2y+1$

$\Leftrightarrow$ $2y=-2x$

$\Leftrightarrow$ $y=-x$

L'ensemble des points M d'affixe $z=x+iy$ vérifiant $|z-1|=|z+i|$ est la droite d'équation *y=x*.

3.

Calculons:

$(1+i\sqrt{3})^2$

$=1^2+2\times1\times i\sqrt{3}+(i\sqrt{3})^2$

$=1+2i\sqrt{3}-3$

$=-2+2i\sqrt{3}$

$(1+i\sqrt{3})^3$

$=1^3+3\times1\times(i\sqrt{3})^2+3\times1^2\times(i\sqrt{3})+(i\sqrt{3})^3$

$= 1-3\times 3+3\mathrm{i}\sqrt{3}-\mathrm{i}\times 3\sqrt{3}$

=1-9

=-8

Si n est un nombre entier naturel alors, n s'écrit $n=3k$ ou $3k+1$ ou $3k+2$ ($k\in\mathbb{N}$)

- ✔ Si $n=3k+1$

$(1+\mathrm{i}\sqrt{3})^{\mathrm{n}}=\left((1+\mathrm{i}\sqrt{3})^{3}\right)^{\mathrm{k}}\times(1+\mathrm{i}\sqrt{3})=(-8)^{\mathrm{k}}\times(1+\mathrm{i}\sqrt{3})$

Le nombre complexe n'est pas réel.

1. Si $n=3k+2$

$(1+\mathrm{i}\sqrt{3})^{\mathrm{n}}=\left((1+\mathrm{i}\sqrt{3})^{3}\right)^{\mathrm{k}}\times(1+\mathrm{i}\sqrt{3})^{2}=(-8)^{\mathrm{k}}\times(-2+2\mathrm{i}\sqrt{3})$

Le nombre complexe n'est pas réel.

- ✔ Si $n=3k$

$(1+\mathrm{i}\sqrt{3})^{\mathrm{n}}=\left((1+\mathrm{i}\sqrt{3})^{3}\right)^{\mathrm{k}}=(-8)^{\mathrm{k}}$

Le nombre complexe est réel.

Conclusion:

$(1+\mathrm{i}\sqrt{3})^{\mathrm{n}}$ est réel si et seulement si n s'écrit sous la forme $\boxed{3k}$ avec $k\in\mathbb{N}$

Remarque:

- ✔ Si $n=6k$

$(1+\mathrm{i}\sqrt{3})^{\mathrm{n}}=\left((1+\mathrm{i}\sqrt{3})^{3}\right)^{2\mathrm{k}}=(-8)^{2\mathrm{k}}=64^{\mathrm{k}}$

Le nombre complexe est réel.

Par contre, la réciproque est fausse, si $(1+\mathrm{i}\sqrt{3})^{\mathrm{n}}$ est réel, n n'est pas forcément de la forme $n=6k$ avec $k\in\mathbb{N}$

Par exemple, $(1+\mathrm{i}\sqrt{3})^{3}$ est réel et 3 n'est pas de la forme $6k$ avec $k\in\mathbb{N}$

4.

$$\mathrm{z}^2=(\mathrm{i}\sqrt{2-\sqrt{2}}-\sqrt{2+\sqrt{2}})^2$$

$$\mathrm{z}^2=-2+\sqrt{2}-2\times\mathrm{i}\times\sqrt{(2-\sqrt{2})(2+\sqrt{2})}+2+\sqrt{2}$$

$$\mathrm{z}^2=2\sqrt{2}-2\mathrm{i}\sqrt{2^2-\sqrt{2}^2}$$

$$\mathrm{z}^2=2\sqrt{2}-2\mathrm{i}\sqrt{2}$$

$$|\mathrm{z}^2|^2=(2\sqrt{2})^2+(-2\sqrt{2})^2$$

$$|\mathrm{z}^2|^2=8+8$$

$$|\mathrm{z}^2|^2=16$$

$$|\mathrm{z}^2|=4$$

$$\mathrm{z}^2=4\left(\frac{2\sqrt{2}}{4}-\frac{2\mathrm{i}\sqrt{2}}{4}\right)$$

$$\mathrm{z}^2=4\left(\frac{\sqrt{2}}{2}-\mathrm{i}\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

$\cos\theta=\frac{\sqrt{2}}{2}$ et $\sin\theta=\frac{\sqrt{2}}{2}$ donc $\boxed{\theta=\frac{-\pi}{4}(2\pi)}$

Un argument de z² est $\boxed{-\frac{\pi}{4}}$.

5. D'après la question précédente, un argument de z² est $-\frac{\pi}{4}$

$\arg z^2=2\arg z(2\pi)$

$\arg z^2=2\arg z+2k\pi$

$2\arg z=\arg z^2-2k\pi$

$2\arg z=\frac{-\pi}{4}-2k\pi$

$\arg z=-\frac{\pi}{8}-k\pi$

Pour $k=-1$, $\arg z=-\frac{\pi}{8}+\pi=\frac{7\pi}{8}$

Un argument de z est $\boxed{\frac{7\pi}{8}}$.

6. $z=x+ix\sqrt{3}$

$|z|^2=x^2+(x\sqrt{3})^2$

$|z|^2=x^2+3x^2$

$|z|^2=4x^2$

Comme $x>0$,

$|z|=2x$

$x\neq 0$

$z=2x\left(\frac{x}{2x}+i\frac{x\sqrt{3}}{2x}\right)$

$z=2x\left(\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

$\cos\theta=\frac{1}{2}$ et $\sin\theta=\frac{\sqrt{3}}{2}$ donc $\boxed{\theta=\frac{\pi}{3}(2\pi)}$

7.

$\arg\frac{\sqrt{3}-i}{\bar{z}}=\arg(\sqrt{3}-i)-\arg\bar{z}(2\pi)$

$\arg\frac{\sqrt{3}-i}{\bar{z}}=\arg(\sqrt{3}-i)+\arg z(2\pi)$

Or,

$|\sqrt{3}-i|^2=(\sqrt{3})^2+(-1)^2$

$|\sqrt{3}-i|^2=4$

$|\sqrt{3}-i|=2$

$\sqrt{3}-i=2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}-i\frac{1}{2}\right)$

$\cos\theta_1=\frac{\sqrt{3}}{2}$ et $\sin\theta_1=\frac{-1}{2}$ donc $\arg(\sqrt{3}-i)=\frac{-\pi}{6}(2\pi)$

On a donc:

$$\boxed{\arg\frac{\sqrt{3}-i}{\bar{z}}=\frac{-\pi}{6}+\theta(2\pi)}$$

8. A(z) $(\vec{u};\overrightarrow{OA})=\theta(2\pi)$

B$(|z|)$ $|z|>0$ $\arg|z|=0(2\pi)$

$\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}(z+|z|)$ $\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OC}$

$\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OC}$ et OA=OB donc **OACB est un losange**.

Par suite, [OC) est **la bissectrice** de $(\widehat{\overrightarrow{OA};\overrightarrow{OB}})$

Donc: $(\vec{u};\overrightarrow{OC})=\frac{\theta}{2}(2\pi)$

Un argument de $z+|z|$ **est** $\boxed{\frac{\theta}{2}}$.

EXERCICE 15

1. $|z_1|^2=1^2+(-1)^2$

$|z_1|=\sqrt{2}$

$z_1=\sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}+i\frac{-1}{\sqrt{2}}\right)$

$z_1=\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{-\sqrt{2}}{2}\right)$

$\cos\theta_1=\frac{\sqrt{2}}{2}$ et $\sin\theta_1=\frac{-\sqrt{2}}{2}$ donc $\theta_1=\frac{-\pi}{4}(2\pi)$

$$\boxed{z_1=\sqrt{2}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right)=\sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}}$$

2. $|z_2|^2=\left(\frac{3\sqrt{3}}{2}\right)^2+\left(-\frac{3}{2}\right)^2$

$|z_2|^2=\frac{27}{4}+\frac{9}{4}$

$|z_2|^2=\frac{36}{4}$

$|z_2|=\frac{6}{2}=3$

$z_2=3\left(\frac{3\sqrt{3}}{2\times 3}-\frac{3}{2\times 3}i\right)$

$z_2=3\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+i\frac{-1}{2}\right)$

$\cos\theta_2=\frac{\sqrt{3}}{2}$ et $\sin\theta_2=\frac{-1}{2}$ donc $\theta_2=\frac{-\pi}{6}(2\pi)$

$$\boxed{z_2=3\left(\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right)=3e^{-i\frac{\pi}{6}}}$$

3. $|z_3|^2=\left(-3\sqrt{\frac{3}{2}}\right)^2+\left(\frac{3}{\sqrt{2}}\right)^2$

$|z_3|^2=\frac{27}{2}+\frac{9}{2}$

$|z_3|^2=\frac{36}{2}$

$|z_3|=\frac{6}{\sqrt{2}}=\frac{6\sqrt{2}}{2}=3\sqrt{2}$

$z_3=3\sqrt{2}\left(\frac{-3\sqrt{3}}{\sqrt{2}\times3\sqrt{2}}+\frac{3}{\sqrt{2}\times3\sqrt{2}}i\right)$

$z_3=3\sqrt{2}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}+i\frac{1}{2}\right)$

$\cos\theta_3=\frac{-\sqrt{3}}{2}$ et $\sin\theta_3=\frac{1}{2}$ donc $\theta_3=\pi-\frac{\pi}{6}(2\pi)$, c'est à dire $\theta_3=\frac{5\pi}{6}(2\pi)$

$$\boxed{z_3=3\sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{5\pi}{6}\right)+i\sin\left(\frac{5\pi}{6}\right)\right)=3\sqrt{2}e^{i\frac{5\pi}{6}}}$$

4. $|z_4|^2=(\sqrt{2})^2+(-\sqrt{2})^2$

$|z_4|^2=2+2$

$|z_4|=2$

$z_4=2\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{-\sqrt{2}}{2}\right)$

$\cos\theta_4=\frac{\sqrt{2}}{2}$ et $\sin\theta_4=\frac{-\sqrt{2}}{2}$ donc $\theta_4=\frac{-\pi}{4}(2\pi)$

$$\boxed{z_4=2\left(\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right)=2e^{-i\frac{\pi}{4}}}$$

5. $|z_5|^2=\left(\frac{-5\sqrt{3}}{2}\right)^2+\left(\frac{5}{2}\right)^2$

$|z_5|^2=\frac{75}{4}+\frac{25}{4}$

$|z_5|^2=\frac{100}{4}=25$

$|z_5|=5$

$z_5=5\left(\frac{-5\sqrt{3}}{2\times5}+i\frac{5}{2\times5}\right)$

$z_5=5\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}+i\frac{1}{2}\right)$

$\cos\theta_5=\frac{-\sqrt{3}}{2}$ et $\sin\theta_5=\frac{1}{2}$ donc $\theta_5=\pi-\frac{\pi}{6}(2\pi)$, c'est à dire $\theta_5=\frac{5\pi}{6}(2\pi)$

$$\boxed{z_5=5\left(\cos\frac{5\pi}{6}+i\sin\frac{5\pi}{6}\right)=e^{i\frac{5\pi}{6}}}$$

EXERCICE 16

1. En posant: $z=x+iy$ avec $x\in\mathbb{R}$ et $y\in\mathbb{R}$, démontrer que: $Z=\frac{x^2+y^2-x-y-12}{(x-3)^2+(y+2)^2}+i\left(\frac{-5x-5y+5}{(x-3)^2+(y+2)^2}\right)$

$$Z=\frac{z+2-3i}{z-3+2i}$$
$$Z=\frac{x+2+i(y-3)}{x-3+i(y+2)}$$
$$Z=\frac{(x+2+i(y-3))(x-3-i(y+2))}{(x-3+i(y+2))(x-3-i(y+2))}$$
$$Z=\frac{(x+2)(x-3)+(y-3)(y+2)+i[(y-3)(x-3)-(x+2)(y+2)]}{(x-3)^2+(y+2)^2}$$
$$Z=\frac{x^2+y^2-x-y-12}{(x-3)^2+(y+2)^2}+i\frac{xy-3x-3y+9-xy-2x-2y-4}{(x-3)^2+(y+2)^2}$$
$$Z=\frac{x^2+y^2-x-y-12}{(x-3)^2+(y+2)^2}+i\left(\frac{-5x-5y+5}{(x-3)^2+(y+2)^2}\right)$$

2.
$A(3-2i)$ $\quad B(-2+3i)$ $\quad M(z)$

$\overrightarrow{AM}(z-3+2i)$ $\quad \overrightarrow{BM}(z+2-3i)$

$AM=|z-3+2i|$ $\quad BM=|z+2-3i|$

$$|Z|=\left|\frac{z+2-3i}{z-3+2i}\right|=\frac{|z+2-3i|}{|z-3+2i|}=\frac{BM}{AM}$$
$$|Z|=\frac{BM}{AM}$$

Si $M\neq A$ alors $\arg(z-3+2i)=(\vec{u};\overrightarrow{AM})+2k\pi$
Si $M\neq B$ alors $\arg(z+2-3i)=(\vec{u};\overrightarrow{BM})+2k\pi$

$$arg\, Z=\arg(z+2-3i)-\arg(z-3+2i)+2k\pi$$
$$arg\, Z=(\vec{u};\overrightarrow{BM})-(\vec{u};\overrightarrow{AM})+2k\pi$$
$$arg\, Z=(\vec{u};\overrightarrow{BM})+(\overrightarrow{AM};\vec{u})+2k\pi$$
$$arg\, Z=(\overrightarrow{AM};\overrightarrow{BM})+2k\pi$$

3.
<u>Méthode algébrique:</u>

Z est un imaginaire pur si et seulement si sa partie réelle est nulle.

Z est un imaginaire pur $\Leftrightarrow \begin{cases} x^2+y^2-x-y-12=0\ (1) \\ (x-3)^2+(y+2)^2\neq 0\ (2)\end{cases}$

(1) $x^2+y^2-x-y-12=0 \Leftrightarrow \left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\left(y-\frac{1}{2}\right)^2=\frac{25}{2}$

M appartient au cercle (Γ) de centre $\Omega\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}i\right)$ et de rayon $\sqrt{\frac{25}{2}}=\frac{5\sqrt{2}}{2}$

(2) $M \neq A$
$A(3-2i)$
$3^2+(-2)^2-3-(-2)-12=9+4-3+2-12=15-15=0$
Donc $A \in (\Gamma)$
(E_1) est le cercle (Γ) privé de A.
Remarque:
$B(-2+3i)$
$(-2)^2+3^2-(-2)-3-12=4+9+2-3-12=15-15=0$
Donc $B \in (\Gamma)$
Soit I le milieu de [AB]:
$$z_I=\frac{z_A+z_B}{2}=\frac{3-2i-2+3i}{2}=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}i$$
Donc Ω=I
Conséquence: (E_1) est le cercle de diamètre [AB] privé de A.

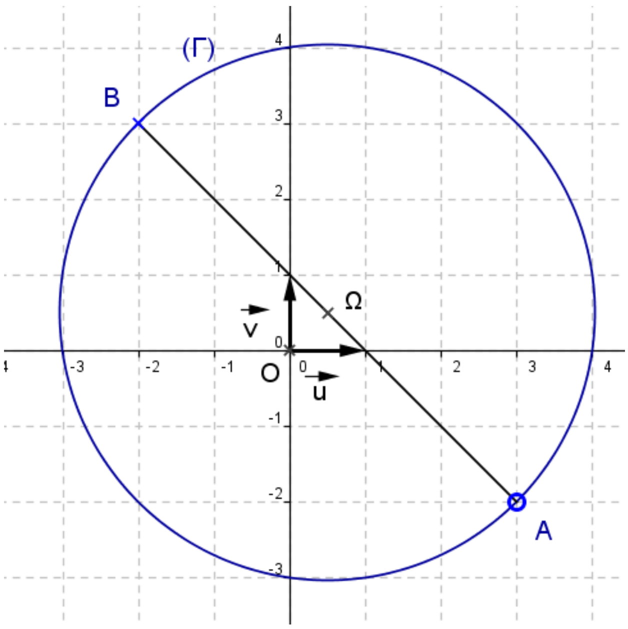
Méthode géométrique:

Z est un imaginaire pur $\Leftrightarrow \begin{cases} Z=0 \\ ou \\ Z \text{ est un imaginaire pur non nul} \end{cases}$

$Z=0 \Leftrightarrow M=B$

Z est un imaginaire pur non nul $\Leftrightarrow \begin{cases} arg\, Z=\frac{\pi}{2}+2k\pi \\ ou \\ arg\, Z=\frac{-\pi}{2}+2k\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (\overrightarrow{AM}\,;\overrightarrow{BM})=\frac{\pi}{2}+2k\pi \\ ou \\ (\overrightarrow{AM}\,;\overrightarrow{BM})=\frac{-\pi}{2}+2k\pi \end{cases}$ ⇔AMB est un triangle rectangle en M non aplati⇔M appartient au cercle de diamètre [AB] privé de A et de B.

Conclusion:



Z est un imaginaire pur si et seulement si M appartient au cercle de diamètre [AB] privé de A.4.
Méthode algébrique:
Z est un nombre réel si et seulement si sa partie imaginaire est nulle.
Z est un nombre réel $\Leftrightarrow \begin{cases} -5x-5y+5=0\,(3) \\ (x-3)^2+(y+2)^2 \neq 0\,(4) \end{cases}$

(3) $-5x-5y+5=0$ est l'équation cartésienne d'une droite (Δ)
$A(3-2i)$ -5(3)-5(-2)+5=-15+10+5=0 donc $A\in(\Delta)$
$B(-2+3i)$ -5(-2)-5(3)+5=+10-15+5=0 donc $B\in(\Delta)$

(4) $M\neq A$

(E) est la droite (AB) privée de A.

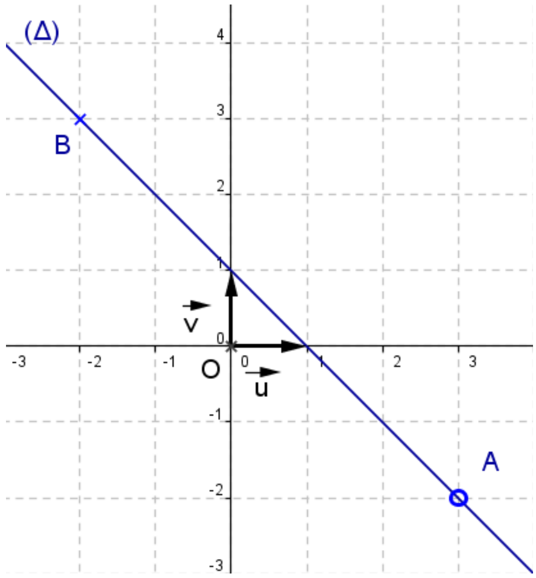
<u>Méthode géométrique:</u>

Z est un nombre réel $\Leftrightarrow \begin{cases} Z=0 \\ \text{ou} \\ Z \text{ est un nombre réel non nul} \end{cases}$

$Z=0 \Leftrightarrow M=B$

Z est un nombre réel non nul $\Leftrightarrow \begin{cases} \arg Z=0+2k\pi \\ ou \\ \arg Z=\pi+2k\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (\overrightarrow{AM};\overrightarrow{BM})=0+2k\pi \\ ou \\ (\overrightarrow{AM};\overrightarrow{BM})=\pi+2k\pi \end{cases}$ $\Leftrightarrow$A; B et M alignés avec $M\neq A$ et $M\neq B$ $\Leftrightarrow$M$\in$(AB) et $M\neq A$ et $M\neq B$.

Conclusion:
Z est un nombre réel si et seulement si M appartient à la droite (AB) privée de A.



5.
<u>Méthode algébrique:</u>

Z est un nombre réel strictement négatif $\Leftrightarrow \begin{cases} -5x-5y+5=0 (5) \\ (x-3)^2+(y+2)^2\neq 0 (6) \\ x^2+y^2-x-y-12<0 (7) \end{cases}$

(5) $M\in(\Delta)$

(6) $M\neq A$

(7) $x^2+y^2-x-y-12<0$

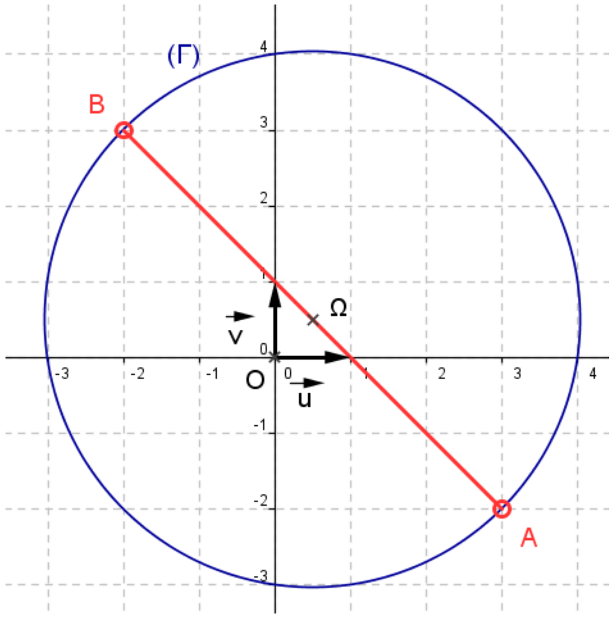
$\Leftrightarrow \left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\left(y-\frac{1}{2}\right)^2<\frac{25}{2}$

$\Leftrightarrow$M appartient au disque de centre $\Omega\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}i\right)$ et de rayon $\sqrt{\frac{25}{2}}=\frac{5\sqrt{2}}{2}$

Conclusion: (E_3)=]AB[

Méthode géométrique:

Z est un nombre réel strictement négatif$\Leftrightarrow argZ=\pi+2k\pi \Leftrightarrow (\overrightarrow{AM};\overrightarrow{BM})=\pi+2k\pi \Leftrightarrow$A; M et B sont alignés dans cet ordre et $M\neq A$ et $M\neq B$ $\Leftrightarrow M\in$]AB[.



6.

Méthode algébrique:

Z est imaginaire pur et $ImZ>0 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2+y^2-x-y-12=0 (8) \\ (x-3)^2+(y+2)^2\neq 0 (9) \\ -5x-5y+5>0 (10) \end{cases}$

(8) M appartient au cercle (Γ) de centre $\Omega\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}i\right)$ et de rayon $\sqrt{\frac{25}{2}}=\frac{5\sqrt{2}}{2}$

(9) $M\neq A$

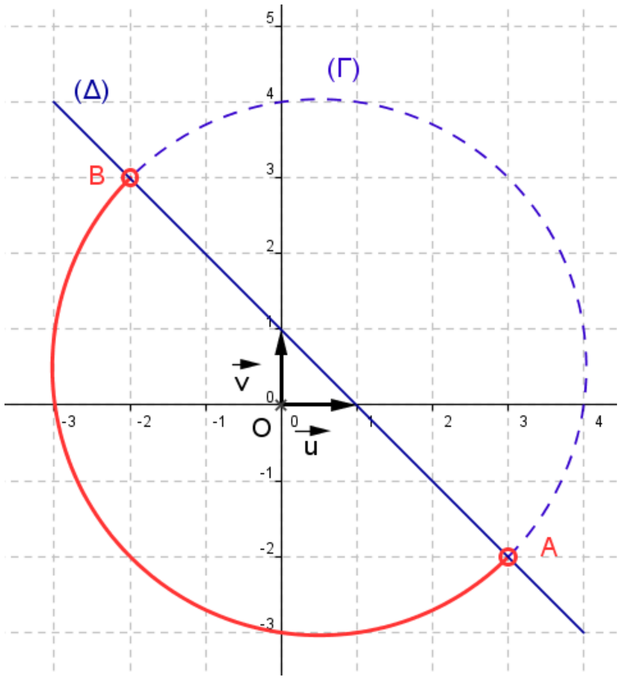
(10) On considère l'origine: $-5\times 0-5\times 0+5=5>0$

M appartient au $\frac{1}{2}$ plan ouvert de frontière (AB) contenant l'origine.

(E_4) est le demi-cercle de (Γ) d'extrémités A et B contenu dans le $\frac{1}{2}$ plan précédent.

Méthode géométrique:

Z est un imaginaire pur et ImZ>0$\Leftrightarrow argZ=\frac{\pi}{2}+2k\pi \Leftrightarrow (\overrightarrow{AM};\overrightarrow{BM})=\frac{\pi}{2}+2k\pi$ $\Leftrightarrow$Le triangle MAB est direct et rectangle en M⇔M appartient au $\frac{1}{2}$ cercle de diamètre [AB] situé en dessous de (AB).



7.
<u>Méthode algébrique:</u>
(attention, il ne faut pas calculer le module de Z en utilisant la forme algébrique de Z

$$|Z|=1 \Leftrightarrow \frac{|z+2-3i|}{|z-3+2i|}=1 \Leftrightarrow |z+2-3i|=|z-3+2i| \Leftrightarrow (x+2)^2+(y-3)^2=(x-3)^2+(y+2)^2$$

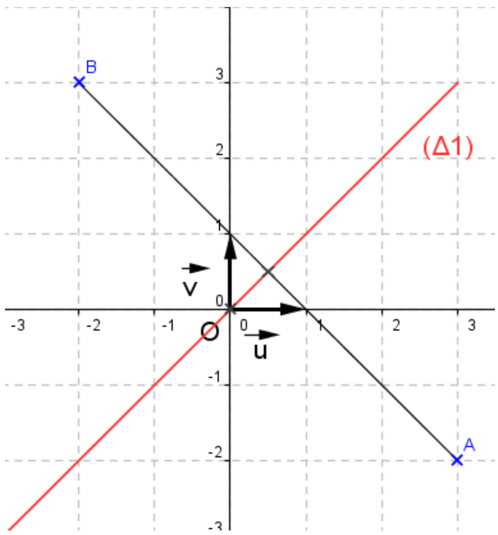
$$\Leftrightarrow x^2+4x+4+y^2-6y+9=x^2-6x+9+y^2+4y+4 \Leftrightarrow 10x-10y=0 \Leftrightarrow x-y=0$$

(E_5) est la droite d'équation $x-y=0$
<u>Méthode géométrique:</u>

$$|Z|=\frac{BM}{AM}$$

$|Z|=1 \Leftrightarrow BM=AM \Leftrightarrow$ M appartient à (Δ_1) médiatrice de [AB]

(E_5)=(Δ_1) médiatrice de [AB]



8.

Méthode algébrique:

$|Z|=2$

$\Leftrightarrow |Z|^2=4$

$\Leftrightarrow |z+2-3i|^2=4|z-3+2i|^2$

$\Leftrightarrow (x+2)^2+(y-3)^2=4[(x-3)^2+(y+2)^2]$

$\Leftrightarrow x^2+4x+4+y^2-6y+9=4(x^2-6x+9+y^2+4y+4)$

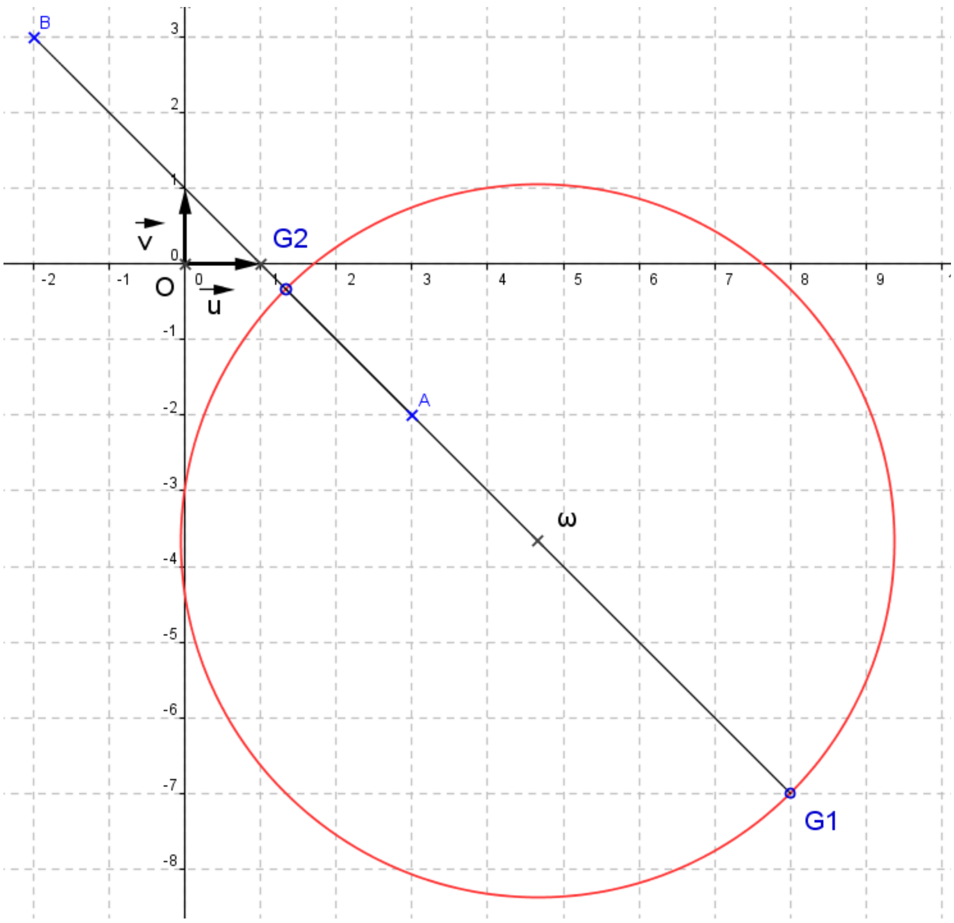
$\Leftrightarrow 3x^2+3y^2-28x+22y+39=0$

$\Leftrightarrow x^2+y^2-\dfrac{28}{3}x+\dfrac{22}{3}y+13=0$

$\Leftrightarrow \left(x-\dfrac{14}{3}\right)^2+\left(y+\dfrac{11}{3}\right)^2+13-\dfrac{196}{9}-\dfrac{121}{9}=0$

$\Leftrightarrow \left(x-\dfrac{14}{3}\right)^2+\left(y+\dfrac{11}{3}\right)^2=\dfrac{200}{9}$

(E_6) est le cercle de centre $\omega\left(\dfrac{14}{3}-i\dfrac{11}{3}\right)$ et de rayon $R=\dfrac{5\sqrt{2}}{3}$



EXERCICE 17

1.

$|z_1|^2=\dfrac{6}{4}+\dfrac{2}{4}=2$

$z_1=\sqrt{2}\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}+\dfrac{1}{2}i\right)$

$\cos\theta_1=\frac{\sqrt{3}}{2}$ et $\sin\theta_1=\frac{1}{2}$ donc $\theta_1=\frac{\pi}{6}$

Donc, $\boxed{z_1=\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{6}}}$

$|z_2|^2=1+1=2$

$z_2=\sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{1}{\sqrt{2}}i\right)=\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}-i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

$\cos\theta_2=\frac{\sqrt{2}}{2}$ et $\sin\theta_2=\frac{-\sqrt{2}}{2}$ donc $\theta_2=\frac{-\pi}{4}$

Donc, $\boxed{z_2=\sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}}$

$$\boxed{z_3=\frac{z_1}{z_2}=\frac{\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{6}}}{\sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}}=e^{i\left(\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{4}\right)}=e^{i\frac{5\pi}{12}}}$$

2. En déduire les valeurs exactes de $\cos\frac{5\pi}{12}$ et de $\sin\frac{5\pi}{12}$

$$z_3=\frac{z_1}{z_2}=\frac{\frac{\sqrt{6}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}}{1-i}=\frac{\left(\frac{\sqrt{6}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)(1+i)}{2}=\left(\frac{\sqrt{6}}{4}+\frac{\sqrt{2}}{4}i\right)(1+i)=\frac{\sqrt{6}+i\sqrt{2}+i\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}+i\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$$

Donc:

$\boxed{\cos\frac{5\pi}{12}=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}}$ et $\boxed{\sin\frac{5\pi}{12}=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}}$

EXERCICE 18

1.

$|z_A|^2=OA^2=(-1)^2+1^2=1+1=2$

$OA=\sqrt{2}$

$OB=OA=\sqrt{2}$

$z_B=-OB=-\sqrt{2}$

2. Construire le point M d'affixe $z_M=-1-\sqrt{2}+i$

Écrire z_M sous forme exponentielle

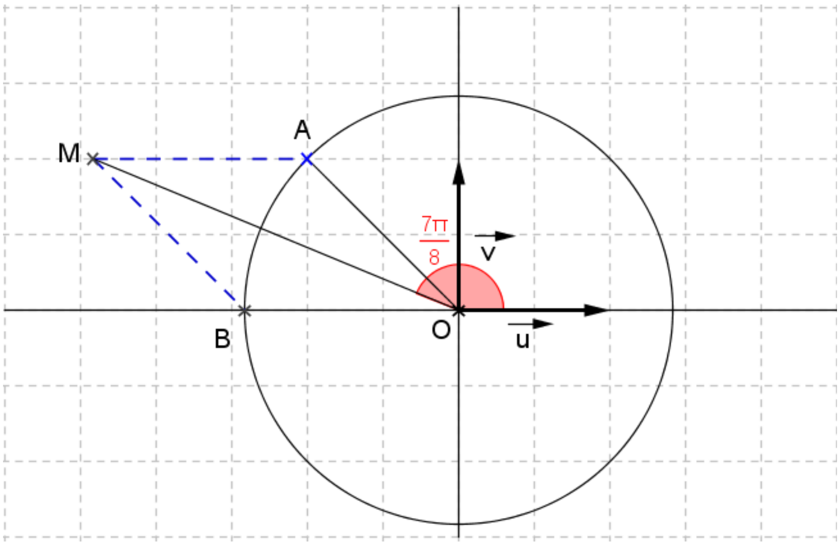
En déduire les valeurs exactes de $\cos\frac{7\pi}{8}$ et de $\sin\frac{7\pi}{8}$

$z_M=z_A+z_B$

$\overrightarrow{OM}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}$

Donc OAMB est un parallélogramme.

De plus, OA=OB donc OAMB est un losange.



$$\boxed{z_A=\sqrt{2}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=\sqrt{2}e^{i\frac{3\pi}{4}}}$$

Donc, $(\vec{u};\overrightarrow{OA})=\frac{3\pi}{4}+2k\pi$

Par suite, $(\overrightarrow{OA};\overrightarrow{OB})=-\frac{3\pi}{4}+\pi+2k\pi$

$(\overrightarrow{OA};\overrightarrow{OB})=\frac{\pi}{4}+2k\pi$

(OM) est la bissectrice de $(\overrightarrow{OA};\overrightarrow{OB})$, donc $(\overrightarrow{OA};\overrightarrow{OM})=\frac{\pi}{8}+2k\pi$

$(\vec{u};\overrightarrow{OM})=\frac{3\pi}{4}+\frac{\pi}{8}+2k\pi$

$(\vec{u};\overrightarrow{OM})=\frac{7\pi}{8}+2k\pi$

$|z_M|^2=(-1-\sqrt{2})^2+1^2=1+2\sqrt{2}+2+1=4+2\sqrt{2}$

Donc, $z_M=\sqrt{4+2\sqrt{2}}e^{i\frac{7\pi}{8}}$

$$z_M=\sqrt{4+2\sqrt{2}}e^{i\frac{7\pi}{8}}=\sqrt{4+2\sqrt{2}}\left(\cos\frac{7\pi}{8}+i\sin\frac{7\pi}{8}\right)=-1-\sqrt{2}+i$$

Donc:

$\boxed{\cos\frac{7\pi}{8}=\frac{-1-\sqrt{2}}{\sqrt{4+2\sqrt{2}}}}$ et $\boxed{\sin\frac{7\pi}{8}=\frac{1}{\sqrt{4+2\sqrt{2}}}}$

EXERCICE 19

1. $z_1=\sin\alpha-i\cos\alpha$

Application: $\alpha=\frac{\pi}{3}$

$z_1=\sin\alpha-i\cos\alpha$
$z_1=-i(i\sin\alpha+\cos\alpha)$
$z_1=-i(\cos\alpha+i\sin\alpha)$
$z_1=e^{-i\frac{\pi}{2}}e^{i\alpha}$

$z_1=e^{i\left(\alpha-\frac{\pi}{2}\right)}$

Pour $\alpha=\frac{\pi}{3}$ alors $\alpha-\frac{\pi}{2}=\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{2}=-\frac{\pi}{6}$:

$z_1=e^{-i\frac{\pi}{6}}$

2. $z_2=1+\cos\alpha+i\sin\alpha$

Application: $\alpha=\frac{\pi}{3}$

$z_2=1+\cos\alpha+i\sin\alpha$
$z_2=1+e^{i\alpha}$
$z_2=e^{i\frac{\alpha}{2}}\left(e^{-i\frac{\alpha}{2}}+e^{i\frac{\alpha}{2}}\right)$

<u>Remarque:</u>
$e^{i\theta}=\cos\theta+i\sin\theta$
$e^{-i\theta}=\cos\theta+i\sin\theta$
$e^{i\theta}+e^{-i\theta}=2\cos\theta$
Par suite:
$e^{-i\frac{\alpha}{2}}+e^{i\frac{\alpha}{2}}=2\cos\frac{\alpha}{2}$

Donc: $z_2=2\cos\frac{\alpha}{2}e^{i\frac{\alpha}{2}}$

<u>1er cas:</u>
$\cos\frac{\alpha}{2}=0\Leftrightarrow\alpha=\pi+2k\pi\quad(k\in\mathbb{Z})$
$z_2=0$

<u>2ième cas:</u>
$\cos\frac{\alpha}{2}>0\Leftrightarrow-\frac{\pi}{2}+2k\pi<\frac{\alpha}{2}<\frac{\pi}{2}+2k\pi\quad(k\in\mathbb{Z})$
$\Leftrightarrow-\pi+4k\pi<\alpha<\pi+4k\pi$

$z_2=2\cos\frac{\alpha}{2}e^{i\frac{\alpha}{2}}$

$|z_2|=2\cos\frac{\alpha}{2}$ et $\arg z_2=\frac{\alpha}{2}(2\pi)$

<u>3ième cas:</u>
$\cos\frac{\alpha}{2}<0\Leftrightarrow\frac{\pi}{2}+2k\pi<\frac{\alpha}{2}<\frac{3\pi}{2}+2k\pi\quad(k\in\mathbb{Z})$
$\Leftrightarrow\pi+4k\pi<\alpha<3\pi+4k\pi$

$|z_2|=-2\cos\frac{\alpha}{2}$

$z_2=-2\cos\frac{\alpha}{2}e^{i\pi}e^{i\frac{\alpha}{2}}$

$z_2=-2\cos\frac{\alpha}{2}e^{i(\frac{\alpha}{2}+\pi)}$

$|z_2|=-2\cos\frac{\alpha}{2}$ et $\arg z_2=\frac{\alpha}{2}+\pi\,(2\pi)$

Pour $\alpha=\frac{\pi}{3}$ alors $z_2=2\cos\frac{\pi}{6}e^{i\frac{\pi}{6}}=\sqrt{3}e^{i\frac{\pi}{6}}$

3. $z_3=\cos\alpha+i\sin\alpha+i$

Application: $\alpha=\frac{\pi}{3}$

$z_3=\cos\alpha+i\sin\alpha+i$

$z_3=e^{i\alpha}+i$

$z_3=i\left(1+\frac{1}{i}e^{i\alpha}\right)$

$z_3=i\left(1-ie^{i\alpha}\right)$

$z_3=i\left(1-e^{i\frac{\pi}{2}}e^{i\alpha}\right)$

$z_3=i\left(1-e^{i(\frac{\pi}{2}+\alpha)}\right)$

$z_3=ie^{i(\frac{\pi}{4}+\frac{\alpha}{2})}\left(e^{-i(\frac{\pi}{4}+\frac{\alpha}{2})}-e^{i(\frac{\pi}{4}+\frac{\alpha}{2})}\right)$

<u>Remarque:</u>

$e^{i\theta}=\cos\theta+i\sin\theta$

$e^{-i\theta}=\cos\theta+i\sin\theta$

$e^{i\theta}-e^{-i\theta}=2i\sin\theta$

Par suite:

$e^{-i(\frac{\pi}{4}+\frac{\alpha}{2})}-e^{i(\frac{\pi}{4}+\frac{\alpha}{2})}=-2i\sin\left(\frac{\alpha}{2}+\frac{\pi}{4}\right)$

$z_3=2\sin\left(\frac{\alpha}{2}+\frac{\pi}{4}\right)e^{i(\frac{\pi}{4}+\frac{\alpha}{2})}$

<u>1[er] cas:</u>

$\frac{\alpha}{2}+\frac{\pi}{4}=0+k\pi \Leftrightarrow \alpha=-\frac{\pi}{2}+2k\pi \quad (k\in\mathbb{Z})$

$z_3=0$

<u>2[ième] cas:</u>

$\sin\left(\frac{\alpha}{2}+\frac{\pi}{4}\right)>0 \Leftrightarrow 0+2k\pi<\frac{\alpha}{2}+\frac{\pi}{4}<\pi+2k\pi \quad (k\in\mathbb{Z})$

$\Leftrightarrow \frac{-\pi}{2}+4k\pi<\alpha<\frac{3\pi}{2}+4k\pi$

$z_3=2\sin\left(\frac{\alpha}{2}+\frac{\pi}{4}\right)e^{i(\frac{\pi}{4}+\frac{\alpha}{2})}$

$|z_3|=2\sin\left(\frac{\alpha}{2}+\frac{\pi}{4}\right)$ et $\arg z_3=\frac{\alpha}{2}+\frac{\pi}{4}$

<u>3[ième] cas:</u>

$\sin\left(\frac{\alpha}{2}+\frac{\pi}{4}\right)<0 \Leftrightarrow \pi+2k\pi<\frac{\alpha}{2}+\frac{\pi}{4}<2\pi+2k\pi \quad (k\in\mathbb{Z})\Leftrightarrow \frac{3\pi}{2}+4k\pi<\alpha<\frac{7\pi}{2}+4k\pi$

$|z_3|=-2\sin\left(\frac{\alpha}{2}+\frac{\pi}{4}\right)$

$z_3=-2\sin\left(\frac{\alpha}{2}+\frac{\pi}{4}\right)e^{i(\frac{5\pi}{4}+\frac{\alpha}{2})}$

$\arg z_3=\frac{\alpha}{2}+\frac{5\pi}{4}+2k\pi$

Pour $\alpha=\frac{\pi}{3}$ alors: $z_3=2\sin\left(\frac{5\pi}{12}\right)e^{i(\frac{5\pi}{12})}$

EXERCICE 20

1. a) Déterminer et construire l'ensemble des points M d'affixe z tels que: $\arg z=\frac{\pi}{4}+2k\pi$

$\arg z=(\vec{u};\overrightarrow{OM})+2k\pi$

Soit K le point d'affixe $z_K=e^{i\frac{\pi}{4}}$

L'ensemble des points M tels que $\arg z=\frac{\pi}{4}(2\pi)$ est la demi-droite]OK)

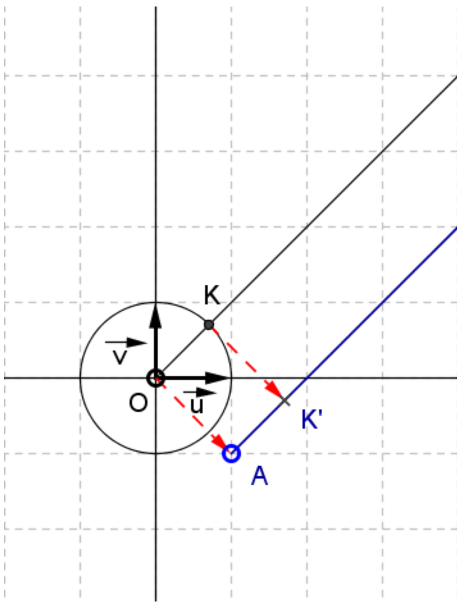
b) Déterminer et construire l'ensemble des points M d'affixe z tels que: $\arg(z-1+i)=\frac{\pi}{4}+2k\pi$

On pose A(1-i)

$\overrightarrow{AM}(z-1+i)$

$(\vec{u};\overrightarrow{AM})=\frac{\pi}{4}+2k\pi$

L'ensemble des points M tels que $\arg(z-1+i)=\frac{\pi}{4}+2k\pi$ est la demi-droite]AK') image de]OK) par la translation de vecteur $\overrightarrow{OA}$



2. a) Déterminer et construire l'ensemble des points M d'affixe z tels que: $\arg z=\frac{\pi}{3}+2k\pi$

$\arg z=(\vec{u};\overrightarrow{OM})+2k\pi$

Soit K le point d'affixe $z_K=e^{i\frac{\pi}{3}}$

L'ensemble des points M tels que $\arg z=\frac{\pi}{3}+2k\pi$ est la demi-droite]OK)

b) Déterminer et construire l'ensemble des points M d'affixe z tels que: $\arg(\bar{z}+1+2i)=-\frac{\pi}{3}+2k\pi$

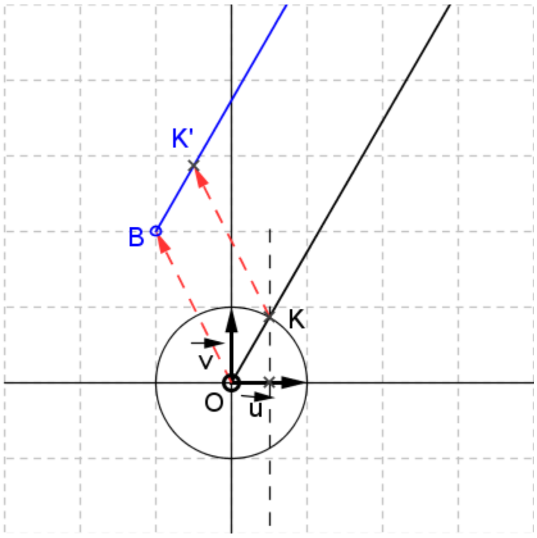
$\bar{z}+1+2i=\overline{z+1-2i}$

$\arg(\bar{z}+1+2i)=\arg(\overline{z+1-2i})+2k\pi$

$\arg(\bar{z}+1+2i)=-\arg(z+1-2i)+2k\pi$ $\arg(\bar{z}+1+2i)=-\frac{\pi}{3}+2k\pi \Leftrightarrow \arg(z+1+2i)=\frac{\pi}{3}+2k\pi$

On pose B(-1+2i). $\overrightarrow{BM}(z+1-2i)$

L'ensemble des points M d'affixe z tels que $\arg(\bar{z}+1+2i)=-\frac{\pi}{3}+2k\pi$ est la demi-droite]BK') image de]BK) par la translation de vecteur $\overrightarrow{OB}$



3. Déterminer et construire l'ensemble des points M d'affixe z tels que: $\arg(z-1+i)=\arg(z+1-2i)+2k\pi$

$\arg(z-1+i)=\arg(z+1-2i)+2k\pi$

$\Leftrightarrow(\vec{u};\overrightarrow{AM})=(\vec{u};\overrightarrow{BM})+2k\pi$

$\Leftrightarrow(\overrightarrow{AM};\vec{u})+(\vec{u};\overrightarrow{BM})=0+2k\pi$

$\Leftrightarrow(\overrightarrow{AM};\overrightarrow{BM})=0+2\kappa\pi$

$\Leftrightarrow$ $\overrightarrow{AM}$ et $\overrightarrow{BM}$ sont colinéaires et de même sens.

$\Leftrightarrow$M appartient à la droite (AB) privé du segment fermé [AB].