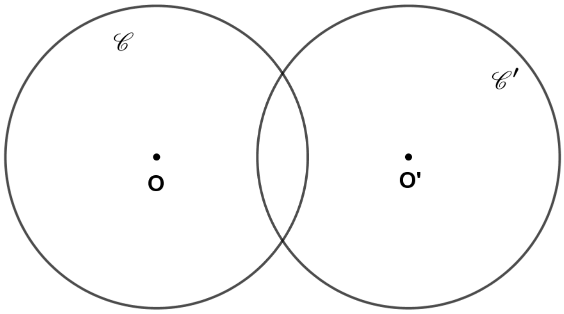
Fiche exercices

EXERCICE 1

$\mathscr{C}$ est le cercle de centre O et de rayon r et $\mathscr{C}'$ est le cercle de centre O' et de même rayon r.



1. Démontrer qu'il existe une unique translation transformant $\mathscr{C}$ en $\mathscr{C}'$ et préciser son vecteur.
2. Démontrer qu'il existe une unique symétrie orthogonale par rapport à une droite transformant $\mathscr{C}$ en $\mathscr{C}'$ et préciser son axe.
3. Démontrer qu'il existe une unique rotation d'angle de mesure 60° transformant $\mathscr{C}$ en $\mathscr{C}'$ et préciser son centre.

EXERCICE 2

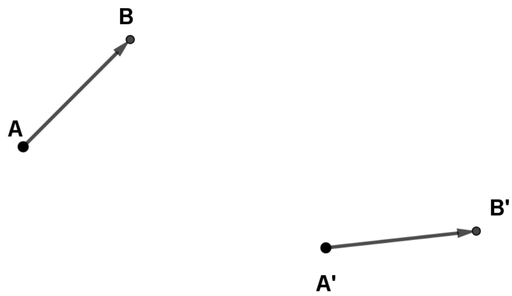
Construction détaillée d'une figure en utilisant géogébra.

Rappel

L'image du bipoint $\overrightarrow{AB}$ par une rotation d'angle de mesure θ est le bipoint $\overrightarrow{A'B'}$ tel que $A'B'=AB$ et $(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{A'B'})=\theta$.

Problème

On considère les bipoints $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{A'B'}$ non colinéaires tels que $A'B'=AB$ et $(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{A'B'})=\theta$

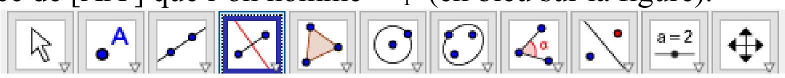


On se propose de construire le centre d'une rotation transformant le bipoint $\overrightarrow{AB}$ en le bipoint $\overrightarrow{A'B'}$.

1. Tracer les droites (AB) et (A'B'). Ces droites sont sécantes en E.
On détermine une mesure de l'angle non orienté $\widehat{A'EA}$ (attention géogébra donne la mesure de l'angle dans le sens antihoraire). Ici on veut la mesure de l'angle saillant.

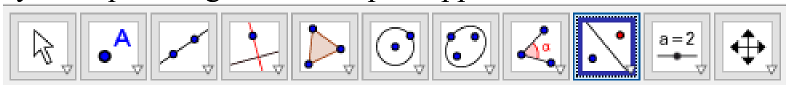
L'icône de mesure des angles en degré est encadrée en bleu, on pointe successivement les points A', E et A, on obtient : 38,66°.
Pour votre figure, il faut choisir une valeur voisine de 40° (pour obtenir une figure facilement comparable à celle donnée).
-38,66° est une valeur approchée de θ .
Il faut $EA'\neq EA$ (sinon le point E est solution du problème posé).

2.a. On trace la médiatrice de [AA'] que l'on nomme D_1 (en bleu sur la figure).



L'icône médiatrice encadrée en bleu, on pointe A puis A'.

2.b. On construit B_1 le symétrique rthogonal de B par rapport à D_1 .



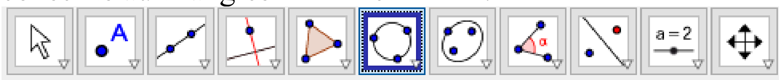
L'icône symétrie orthogonale par rapport à une droite étant encadrer en bleu, on pointe A puis D_1 .

2.c. On trace la médiatrice D_2 de $[B_1;B']$ (en rouge sur la figure).
Démontrer que le point A' appartient à cette droite.

2.d. D_1 et D_2 sont sécantes en ω .
Soit la rotation $R=S_{D_2}oS_{D_1}$.
Montrer que $R(A)=A'$ et $R(B)=B'$.
En déduire une mesure de la rotation R.

2.e. Tracer des vecteurs $\vec{u}_1$ et $\vec{u}_2$ directeurs respectivement de D_1 et D_2 .

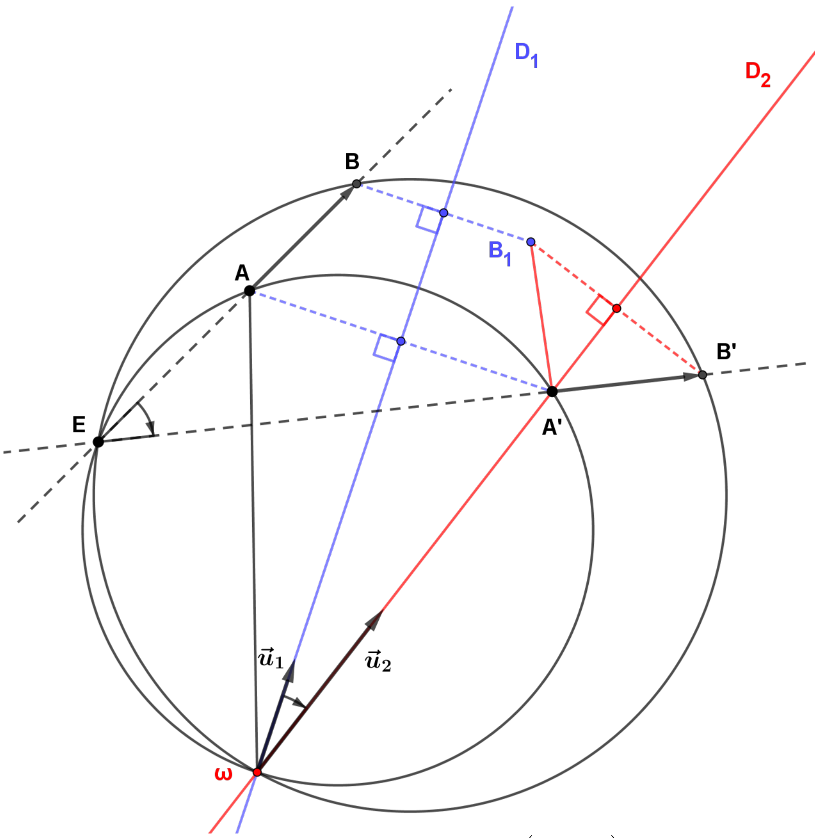
3.a. Tracer les cercles circonscrits au triangles AEA' et BEB'.



L'icône cercle circonscrit d'un triangle est encadrée en bleu, on pointe A puis E puis A' de même B puis E puis B'.

3.b. Quelle conjecture peut-on faire ?

4. On obtient la figure suivante :



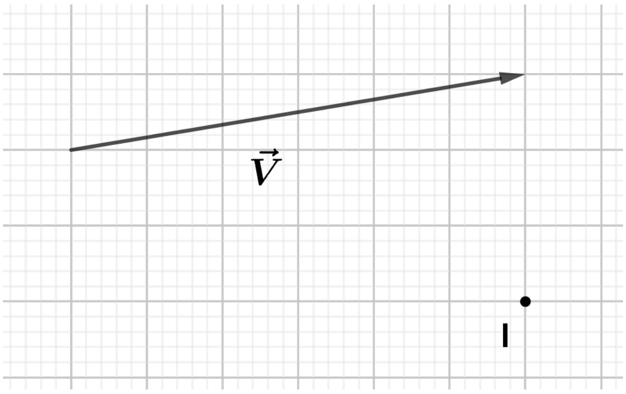
5.a. Donner en fonction de θ , une mesure de l'angle orienté $(\vec{u}_1;\vec{u}_2)$.

5.b. Déterminer une mesure de $(\overrightarrow{\omega A};\overrightarrow{\omega B})$.

5.c. En considérant le cercle circonscrit aux triangles AEA' et en admettant la conjecture précédente,
Que peut-on dire des angles $\widehat{AEA'}$ et $\widehat{A\omega A'}$.

EXERCICE 3

On utilise un quadrillage pour les données puis on l'enlève pour faire les constructions.
$t_{\vec{V}}$ est la translation de vecteur $\vec{V}$ et R est la rotation de centre I et d'angle de mesure 70°.
Construire les centres des rotations $H=t_{\vec{V}}oR$ et $F=Rot_{\vec{V}}$.



EXERCICE 4

R est la rotation de centre I et d'angle de mesure 120°.
R' est la rotation de centre J et d'angle -40°.
$F = R' o R$.

Construire le centre ω de la rotation F.

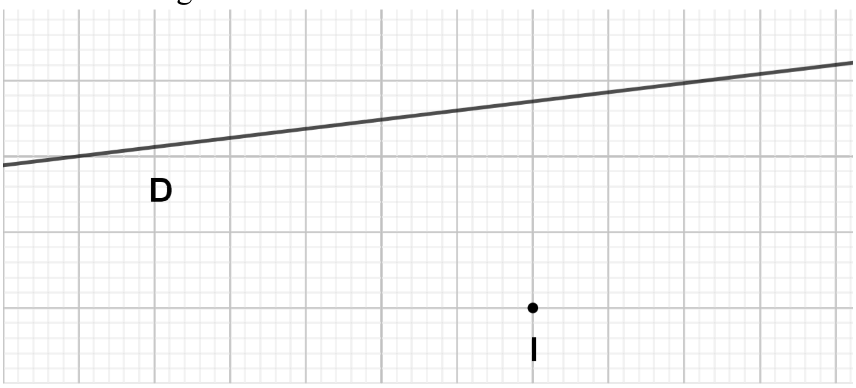
EXERCICE 5

R est la rotation de centre I et d'angle de mesure -110°.
R' est la rotation de centre j et d'anglede mesure 110°.
$F = R' o R$

Déterminer la nature de F.

EXERCICE 6

S_D est la symétrie orthogonale par rapport à la droite D.
R est la rotation de centre I et d'angle de mesure 40°.

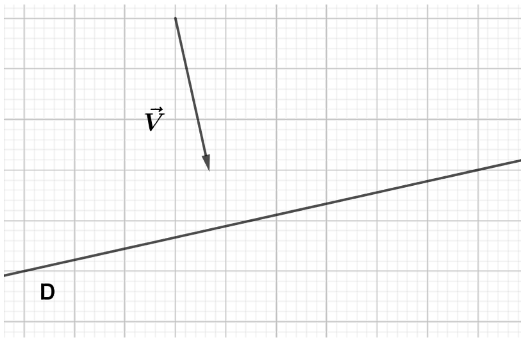


1. Démontrer que $F = S_D o R$ peut s'écrire sous la forme $F = t o S_\Delta$ où t est une translation.

2.a. Qu'obtient-on si le centre I de R appartient à D ?
2.b. Qu'obtient-on si R est la symétrie centrale de centre I (Rotation de centre I et d'angle de mesure 180°).

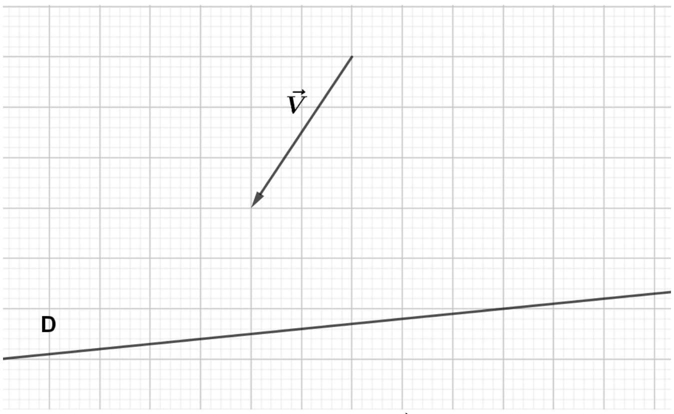
EXERCICE 7

$t_{\vec{V}}$ est la translation de vecteur $\vec{V}$.
S_D est la symétrie orthogonale par rapport à la droite D.
$\vec{V}$ est un vecteur normal à D.
Déterminer $F = t_{\vec{V}} \circ S_D$.



EXERCICE 8

$t_{\vec{V}}$ est la translation de vecteur $\vec{V}$.
S_D est la symétrie orthogonale par rapport à la droite D.
$\vec{V}$ n'est pas un vecteur normal à D.



Démontrer que $F = t_{\vec{V}} \circ S_D$ peut s'écrire $F = t_{\vec{V}'} \circ s_{D'}$ avec $\vec{V}'$ vecteur directeur de D'.

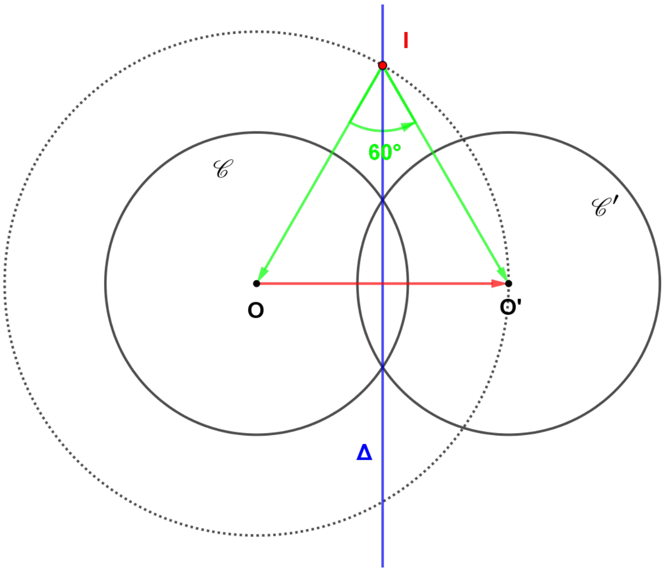
EXERCICE 9

Soit dans le plan un triangle équilatéral ABC.. La bissectrice intérieure de $\hat{A}$ recoupe le cercle circonscrit en D.
On suppose que $(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC}) = \frac{\pi}{3}$.
Réduire à une transformation simple le produit $S_{BD} \circ S_{DC} \circ S_{CA} \circ S_{AB}$.
S_{XY} désigne la symétrie d'axe XY.

(***Exercice 2 Bac mathématiques élémentaires 1971 Aix-Marseille***)

CORRECTION

EXERCICE 1



1. Rappel
L'image du cercle de centre O et de rayon r par la translation $t_{\vec{V}}$ de vecteur $\vec{V}$ est le cercle de centre $t_{\vec{V}}(O)$ et de rayon r.

Pour l'exercice, le vecteur $\vec{V}$ de translation tel que $t_{\vec{V}}(O)=O'$ est égal à $\overrightarrow{OO'}$.
Conséquence
L'unique translation transformant le cercle de centre O et de rayon r en cercle de centre O' et de rayon r est la translation de vecteur $\vec{V}=\overrightarrow{OO'}$.

2. Rappel
L'image du cercle de centre O et de rayon r par la symétrie orthogonale par rapport à la droite Δ : S_Δ est le cercle de centre $S_\Delta(O)$ et de rayon r.

Pour l'exercice, $S_\Delta(O)=O'$ donc Δ est la médiatrice de [OO'].
Conséquence
L'unique symétrie orthogonale par rapport à une droite Δ transformant le cercle de centre O et de rayon r en cercle de centre O' et de rayon r est la symétrie orthogonale par rapport à la médiatrice de [OO'].

3. Rappel
L'image du cercle de centre O et de rayon r par une rotation R est le cercle de centre R(O) et de rayon r.
Pour l'exercice, si I est le centre d'une rotation d'angle de mesure 60° telle que R(O)=O' alors IO=IO' donc I appartient à la médiatrice Δ de [OO'] et $(\overrightarrow{IO};\overrightarrow{IO'})=60^\circ$. Le triangle IOO' est donc équilatéral.
Il y a deux triangles équilatéraux de base $[OO']$, en tenant compte de l'orientation, le point I de Δ au dessus de (OO') vérifie $IO=IO'$ et $(\overrightarrow{IO};\overrightarrow{IO'})=60\,°$ (pour le point en dessous de (OO') on obtient -60°.
Conséquence
L'unique rotation d'angle de mesure 60° telle que R(O)=O' est la rotation de centre I.
Cette rotation transforme le cercle de centre O et de rayon r en cercle de centre O' et de rayon r.

EXERCICE 2

2.c. $S_{D_1}(A)=A'$ $S_{D_1}(B)=B_1$ donc $A'B_1=AB$.
D'autre part $A'B'=AB$ on obtient $A'B_1=A'B'$ donc A' appartient à la médiatrice D_2 de $[B_1B']$.

2.d. $R(A)=S_{D_2} o S_{D_1}(A)=S_{D_2}(A')=A'$ car A' appartient à D_2 .
$R(B)=S_{D_2} o S_{D_1}(B)=S_{D_2}(B_1)=B'$.

3. Conjecture

Le point ω appartient aux cercles circonscrits des triangles AEA' et BEB'.

5.a. $R=S_{D_2} o S_{D_1}$ et R est une rotation d'angle de mesure θ donc $(\vec{u}_1;\vec{u}_2)=\frac{1}{2}\theta$

5.b. R(A)=A' donc $(\overrightarrow{\omega A};\overrightarrow{\omega A'})=\theta$

5.c. $\widehat{AEA'}$ et $\widehat{A\omega A'}$ sont deux angles inscrits dans le cercle circonscrit au triangle AEA' qui interceptent le même arc.(Ces angles ont donc la même mesure).

EXERCICE 3

On trace les vecteurs $\vec{W}$ et $\vec{W}'$ tels que $\vec{W}=\frac{1}{2}\vec{V}$ et $\vec{W}'=-\frac{1}{2}\vec{V}$

On peut utiliser le quadrillage pour construire les vecteurs $\vec{W}$ et $\vec{W}'$.

. $H=t_{\vec{V}} o R$ $R=S_{D_2} o S_{D_1}$ D_1 et D_2 sont sécantes en I.

$t_{\vec{V}}=S_{D'_2} o S_{D'_1}$ $\vec{V}$ est un vecteur normal à D'_1 et D'_2.

Soit D la droite passant par I et de vecteur normal $\vec{V}$.

$R=S_D o S_{D_1}$ D_1 est l'image de D par la rotation de centre I et d'angle de mesure : $-\frac{1}{2}\times 70^\circ=-35^\circ$.

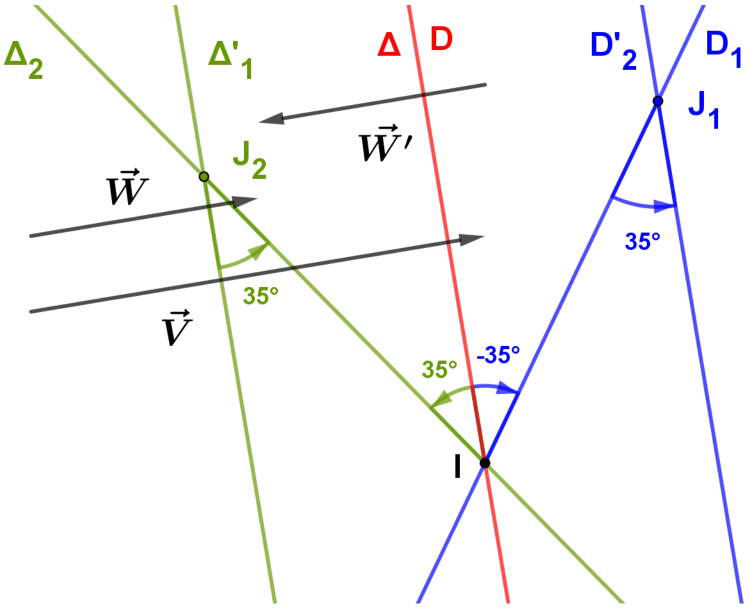
$t_{\vec{V}}=S_{D'_2} o S_D$ D'_2 est l'image de D par la rotation de vecteur $\vec{W}$.

On trace les droites D; D_1 et D'_2 en utilisant géogébra.

$H=S_{D'_2} o S_D o S_D o S_{D_1}=S_{D'_2} o S_{D_1}$. D_1 et D'_2 sont sécantes en J_1.

Remarque

H est la rotation de centre J_1 et de mesure 70°.



. $F=R o t_{\vec{V}}$

$R=S_{\Delta_2} o S_{\Delta_1}$ $t_{\vec{V}}=S_{\Delta'_2} o S_{\Delta'_1}$ $F=S_{\Delta_2} o S_{\Delta_1} o S_{\Delta'_2} o S_{\Delta'_1}$

Soit Δ la droite passant par I et de vecteur normal $\vec{V}$. $(\Delta=D)$

$R=S_{\Delta_2} o S_{\Delta}$ $t_{\vec{V}}=S_{\Delta} o S_{\Delta'_1}$

Δ'_1 est l'image de la droite Δ par la translation de vecteur $\vec{W}'$.

Δ_2 est l'image de la droite Δ par la rotation de centre I et d'angle de mesure 35°.

On trace les droites Δ'_1 et Δ_2.

Les droites Δ'_1 et Δ_2 sont sécantes en J_2.

$F=S_{\Delta_2} o S_{\Delta} o S_{\Delta} o S_{\Delta'_1}=S_{\Delta_2} o S_{\Delta'_1}$

Remarque

F est la rotation de centre J_2 et d'angle de mesure 70°.

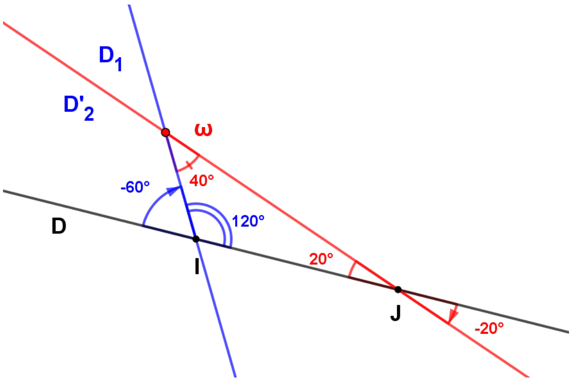
EXERCICE 4

$R = S_{D_2} \circ S_{D_1}$ D_1 et D_2 sont sécantes en I $R' = S_{D'_2} \circ S_{D'_1}$ D'_1 et D'_2 sont sécantes en J
$F = R' \circ R = S_{D'_2} \circ S_{D'_1} \circ S_{D_2} \circ S_{D_1}$
On choisit $D = (IJ) = D_2 = D'_1$.

$R = S_D \circ S_{D_1}$ D_1 est l'image de D par la rotation de centre I et d'angle de mesure $-\frac{1}{2} \times 120° = -60°$

$R' = S_{D'_2} \circ S_D$ D'_2 est l'image de D par la rotation de centre J et d'angle de mesure $-\frac{1}{2} \times (-40°) = -20°$

D_1 et D'_2 sont sécantes en ω .



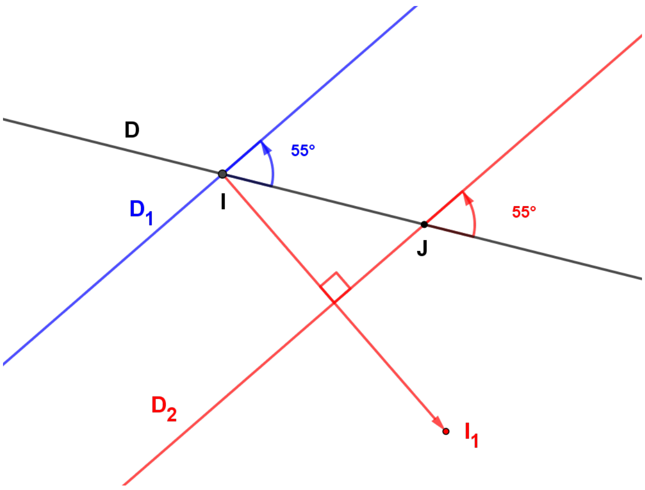
On considère le triangle $IJ\omega$?
$\widehat{IJ\omega} = 20°$ $\widehat{\omega IJ} = 180° - 60° = 120°$ $\widehat{I\omega J} = 180° - 20° - 120° = 40°$
L'orientation est donnée par la figure.
$(\overrightarrow{\omega I}; \overrightarrow{\omega J}) = 40°$ donc F est la rotation de centre ω et d'angle de mesure $2(\overrightarrow{\omega I}; \overrightarrow{\omega J}) = 80°$.

EXERCICE 5

$R = S_{D_2} \circ S_{D_1}$ $R' = S_{D'_2} \circ S_{D'_1}$
$D = (IJ) = D_2 = D'_1$

$R = s_D \circ S_{D_1}$ D_1 est l'image de D par la rotation de centre I et d'angle de mesure $-\frac{1}{2} \times (-110°) = 55°$.

$R' = S_{D'_2} \circ S_D$ D'_2 est l'image de D par la rotation de centre J et d'angle de mesure $\frac{1}{2} \times 110° = 55°$.



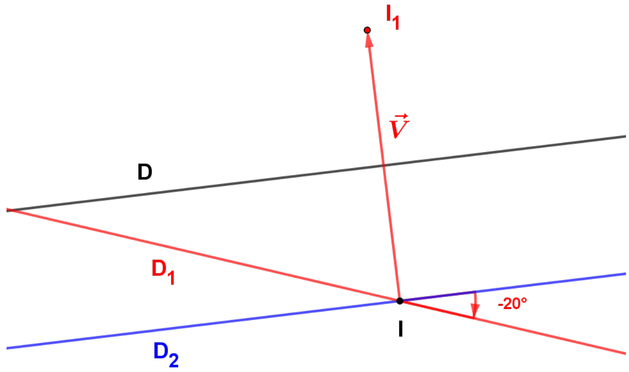
Les droites D_1 et D'_2 sont parallèles.
$F = S_{D'_2} \circ S_{D_1}$ donc F est une translation.
$F(I) = S_{D'_2} \circ S_{D_1}(I) = S_{D'_2}(I) = I_1$.
Le vecteur de translation est $\vec{V} = \overrightarrow{II_1}$.

EXERCICE 6

$R = S_{D_2} \circ S_{D_1}$

On choisit D_2 parallèle à D et passant par I.

D_1 est l'image de D_2 par la rotation de centre I et d'angle de mesure $-\frac{1}{2} \times 40° = -20°$.

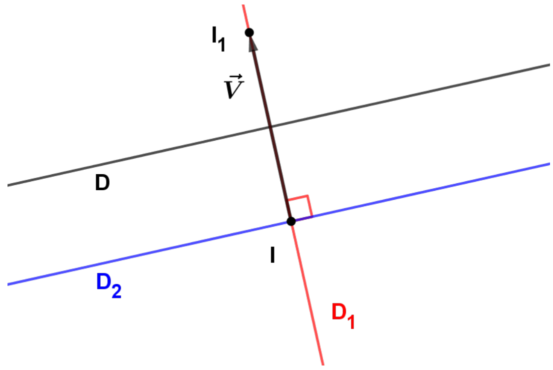


$F = S_D \circ S_{D_2} \circ S_{D_1}$ $\quad S_D \circ S_{D_2} = t_{\vec{V}}$ $\quad \vec{V} = \overrightarrow{II_1}$

$F = t_{\vec{V}} \circ S_{D_1}$

2.a. $D_2 = D$ $\quad F = S_D \circ S_D \circ S_{D_1} = S_{D_1}$

2.b. D_2 est orthogonale à D_1 donc $\vec{V}$ est un vecteur directeur de D_1.

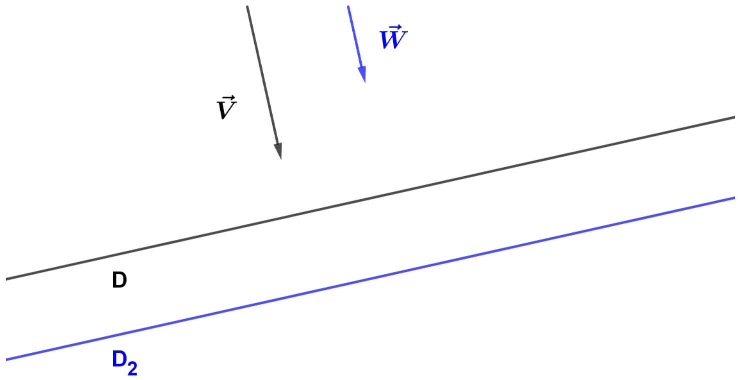


EXERCICE 7

$t_{\vec{V}} = S_{D_2} \circ S_D$

D_2 est l'image de D par la translation de vecteur $\vec{W} = \frac{1}{2}\vec{V}$.

$F = t_{\vec{V}} \circ S_D = S_{D_2} \circ S_D \circ S_D = S_{D_2}$



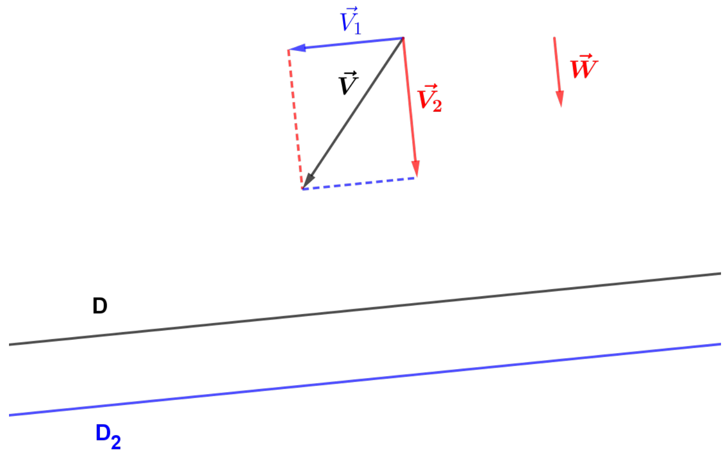
EXERCICE 8

On écrit $\vec{V}$ comme la somme d'un vecteur directeur de D : $\vec{V}_1$ et un d'un vecteur normal à D : $\vec{V}_2$.

$t_{\vec{V}} = t_{\vec{V}1} o\, t_{\vec{V}2}$

$t_{\vec{V}_2} = S_{D_2} o\, S_D$

D_2 est l'image de D par la translation de vecteur $\vec{W} = \frac{1}{2}\vec{V}$.



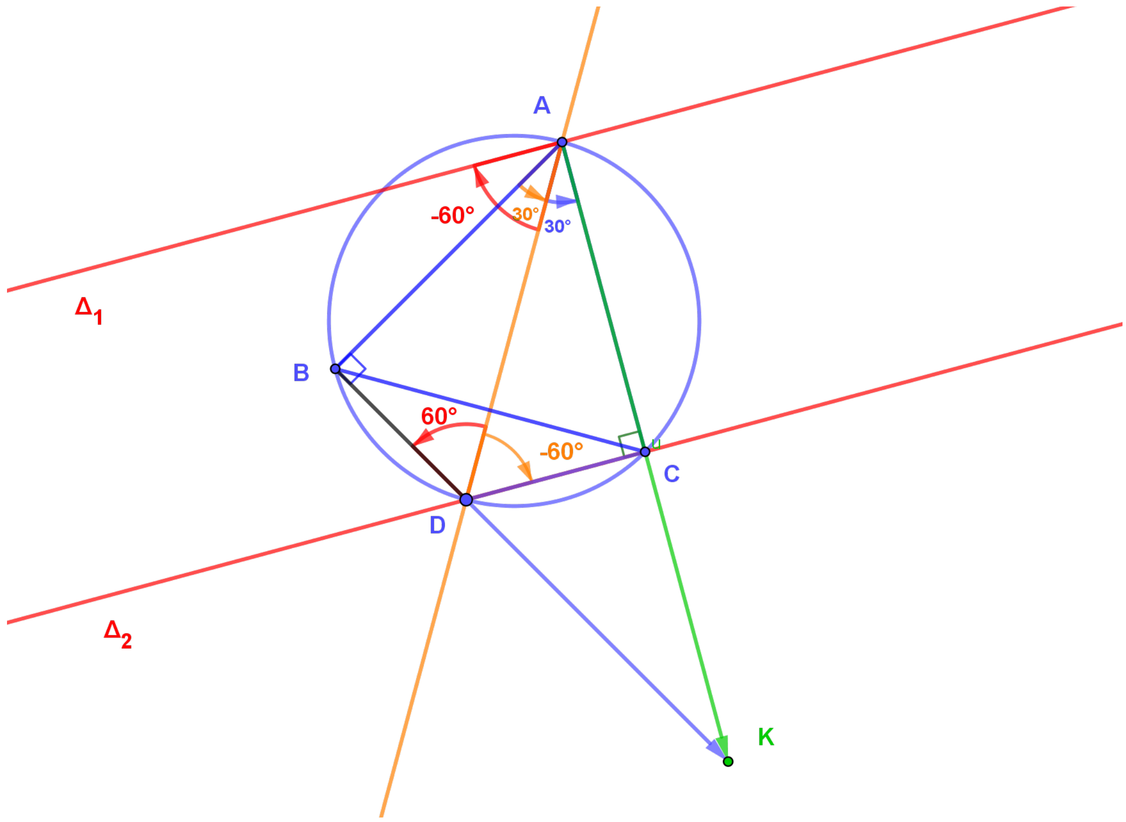
$F = t_{\vec{V}_1} o\, S_{D_2} o\, S_D o\, S_D = t_{\vec{V}_1} o\, S_{D_2}$

On pose $\vec{V}_1 = \vec{V}'$ et $D_2 = D'$ et $\vec{V}'$ est un vecteur directeur de D'.

EXERCICE 9

Nous utilisons le degré pour la mesure des angles pour la correction.

$\frac{\pi}{3}$ radians correspond à 60°



- $T = S_{BD} o S_{DC} o S_{CA} o S_{AB}$
  $S_{CA} o S_{AB}$ est le composé de deux symétries orthogonales par rapport à deux droites sécantes en A, donc $S_{CA} o S_{AB}$ est la rotation R_1 de centre A et d'angle de mesure $2(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}) = 120°$.
- (AD) est la bissectrice intérieure de l'angle $\hat{A}$ donc $(\overrightarrow{AD};\overrightarrow{AC}) = 30°$.
  Le triangle ABC est un triangle équilatéral donc (AD) est aussi la médiatrice de [BC] et le centre du cercle circonscrit au triangle ABC appartient à la droite (AD).
  <u>Conséquences :</u>
  [AD] est un diamètre du cercle circonscrit au triangle ABC et le triangle ACD est rectangle en C.
  $(\overrightarrow{CA};\overrightarrow{CD}) = 90°$ et $(\overrightarrow{DC};\overrightarrow{DA}) = 180° - 30° - 90° = 60°$.
  On démontre de même que $(\overrightarrow{DA};\overrightarrow{DB}) = 60°$.
- $S_{BD} o S_{DC}$ est la rotation R_2 de centre D et d'angle de mesure $2(\overrightarrow{DC};\overrightarrow{DB}) = 240°$ (ou $-120°$).
- $T = R_2 o R_1$ est le composé de deux rotations de centres distincts.
  $120° + 240° = 360°$ mesure de l'angle nul donc T est une translation.
  (AD) est la droite qui joint les deux centres des rotations.
  Pour déterminer le vecteur directeur de la translation T on peut déterminer les droites Δ_1 et Δ_2 telles que $R_1 = S_{AD} o S_{\Delta_1}$ et $R_2 = S_{\Delta_2} o S_{AD}$
  Une mesure de l'angle de la rotation R_1 est 120° donc (Δ_1) est l'image de (AD) par la rotation de centre A et d'angle de mesure -60°.
  Une mesure de l'angle de la rotation R_2 est -120° donc (Δ_2) est l'image de (AD) par la rotation de centre D et d'angle de mesure -60°.
  Or $(\overrightarrow{DA};\overrightarrow{DC}) = -60°$ donc $(\Delta_2) = (DC)$.
  $T = S_{\Delta_2} o S_{AD} o S_{AD} o S_{\Delta_1} = S_{\Delta_2} o S_{\Delta_1}$
  Les droites (Δ_1) et (Δ_2) sont parallèles.
  Les droites (AC) et (DC) sont orthogonales donc le vecteur directeur de la translation T est $\overrightarrow{AK} = 2.\overrightarrow{AC}$
  <u>Remarque</u>
  $T(A) = R_2 o R_1(A) = R_2(A) = K$.
  K est l'image de A par la rotation de centre D et d'angle : -120°.