## Fiche exercices

### EXERCICE 1

Soit l'équation $z^2+(1-2i)z+1+5i=0$ définie dans l'ensemble des nombres complexes.

1. Trouver les deux racines $z_1$ et $z_2$ de cette équation.
2. Soit A et B les images par rapport à un repère orthonormé des solutions $z_1$ et $z_2$, A étant le point dont l'abscisse est positive.
   Déterminer le centre $\omega$ d'une rotation dont l'angle mesure $\frac{\pi}{4}$ radians, qui transformerait A en B.

   (On précisera les coordonnées de $\omega$ ).

**Exercice 1 Bac C Limoges septembre 1975**

### EXERCICE 2

Dans le plan affine euclidien rapporté à un repère orthonormé direct $(O;\vec{u};\vec{v})$ on donne la rotation $r_1$ de centre O et d'angle $-\frac{\pi}{6}$ ; puis la rotation $r_2$ de centre A de coordonnées $(1;\sqrt{3})$ et d'angle $\frac{2\pi}{3}$.

1. Étudier l'application $r_2 o r_1$.
2. Déterminer les points invariants éventuels.
   Toute forme de solution est acceptée :
   - soit géométrique (marquer dans ce cas sur une figure tous les points que l'on voudra utiliser) ;
   - soit en utilisant les coordonnées, les affixes, etc.

**Exercice 2 Bac C Bordeaux septembre 1975**

### EXERCICE 3

Le plan euclidien orienté P est rapporté à un repère orthonormé $(O;\vec{u};\vec{v})$.
Soit $z=x+iy$ l'affixe d'un point M(x;y) de ce plan.

1. Déterminer l'ensemble des points M du plan P tels que : $|(1-i)z+2i|=2$.
2. Étudier la transformation de P qui au point M d'affixe z fait correspondre le point M' d'affixe $z'=(1-i)z+2i$.
3. En utilisant la transformation précédente ; retrouver le résultat du 1.

**Exercice 2 Bac C Caen juin 1976**

### EXERCICE 4

À chaque nombre complexe $z=x+iy$ (x et y sont des nombres réels), on associe le point M(z) de coordonnées (x;y) dans un plan affine euclidien P rapporté à un repère orthonormé direct $(O;\vec{u};\vec{v})$ d'axes x'ox et y'oy.

1. Déterminer l'ensemble D des points M de P, d'affixe $z=x+iy$, tels que $|z-1|=|z-(1+\sqrt{3})+i|$.
   Représenter graphiquement D.
2. Soit f l'application de P dans P, d'affixe z associe le point M' d'affixe $z'=-iz+(3-i)$.
   Déterminer géométriquement f.
   Déterminer l'ensemble D', image de D pat f. représenter graphiquement D'.

**Exercice 2 Bac C Clermont-Ferrand juin 1976**

### EXERCICE 5

On considère l'équation : $z^2+(-6+i)z+7+3i=0$ (z est un nombre complexe).

1. Résoudre l'équation.
2. On appelle $z_1$ la solution dont une détermination de l'argument est $\frac{\pi}{4}$ et $z_2$ l'autre solution.
   Soit P un plan affine euclidien rapporté à un repère orthonormé. Soit s la similitude directe de P qui, au point d'affixe -2, associe le point d'affixe 1 et, au point d'affixe $z_1$, associe le point d'affixe $z_2$. Déterminer le centre, l'angle et le rapport de s.

**Exercice 2 Bac C Nice juin 1976**

### EXERCICE 6

Soit P un plan affine euclidien, rapporté à un repère orthonormé direct $(O;\vec{u};\vec{v})$. Soit $\mathbb{C}$ le corps des des nombres complexes. À tout point M de coordonnées (x;y) dans le repère $(O;\vec{u};\vec{v})$, on associe son

affixe, le nombre complexe $z=x+\mathrm{i}\,y$ . On rappelle que i est un nombre complexe dont le carré vaut -1.
Soit A le point de coordonnées (1:0) et B le point de coordonnées (0;1) dans le repère $(O;\vec{u};\vec{v})$ .

1. Soit $s_1$ la similitude directe de centre O, de rapport $\sqrt{2}$ , et dont une détermination de l'angle est $\frac{\pi}{4}$ .
   Déterminer l'application de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ qui, à tout nombre complexe z d'image M, associe le nombre complexe z' d'image $M'=s_1(M)$ .
2. Soit A' et B' les image de A et B par $s_1$ . Démontrer qu'il existe une similitude plane directe $s_2$ et une seule qui transforme A en B' et B en A'.
   Préciser son centre, son rapport et donner une détermination de son angle ( le candidat devra faire une figure soignée).
3. De l'étude du produit $s_2^{-1} o\, s_1$ où o représente la loi de composition des applications, déduire une expression de $s_2$ sous la forme $s_2=s_1 o\, S$ , S étant une symétrie par rapport à un point que l'on précisera.

**Exercice 2 Bac C Dijon juin 1976**

## EXERCICE 7

Dans le plan complexe, on considère l'application f qui au point M(z) fait correspondre le point M'(z') défini par : $z'=(1+\mathrm{i}\sqrt{3})\bar{z}+\mathrm{i}$ .
Démontrer que f est une similitude inverse dont on précisera le rapport k, le centre C et l'axe D.

**Exercice 2 Bac C Gabon juin 1976**

## EXERCICE 8

Le plan affine euclidien P est rapporté à un repère orthonormé $(O;\vec{u};\vec{v})$ . Au point M de coordonnées (x;y) on fait correspondre le complexe $z=x+\mathrm{i}\,y$ , appelé affixe de M, $\bar{z}=x-\mathrm{i}\,y$ est le conjugué de z.

1. Soit f l'application de P vers P qui au point M d'affixe z fait correspondre le point M' dont l'affixe z' est : $z'=(1-\mathrm{i}\sqrt{3})\bar{z}+3+3\mathrm{i}\sqrt{3}$ .
   Quelle est l'image $f(\omega)$ du point $\omega$ d'affixe $1+\mathrm{i}\sqrt{3}$ ?
   Montrer que f est une similitude inverse dont on précisera les éléments remarquables.
2. Soit g la symétrie affine orthogonale par rapport à la droite affine d'équation $y=x\sqrt{3}$ . Calculer en fonction de x et y, coordonnées d'un point M, les coordonnées (x';y') de $M'=g(M)$ .
3. Déterminer $g\,o\,f$ et donner ses éléments remarquables.

**Exercice 2 Bac C Poitiers juin 1976**

**CORRECTION**

## EXERCICE 1

1. $z^2+(1-2\,i)z+1+5\,i=0$

   $\Delta=(1-2\,i)^2-4(1+5\,i)=1-4\,i-4-4-20\,i=-7-24\,i$

   $\delta=x+i\,y$ x et y sont des nombres réels

   $\delta^2=(x+i\,y)^2=x^2-y^2+2\,i\,xy$

   $\delta^2=\Delta \quad\Leftrightarrow\quad \begin{cases} x^2-y^2=-7 \\ 2\,xy=-24 \end{cases}$

   $|\delta|^2=x^2+y^2=|-7-24\,i|$

   $|-7-24\,i|^2=49+576=625=25^2$

   donc $\begin{cases} x^2+y^2=25 \\ x^2-y^2=-7 \end{cases}$ on obtient $2\,x^2=18 \quad\Leftrightarrow\quad x^2=9 \quad\Leftrightarrow\quad |x|=3$ .

   Si x=3 alors 2xy=-24=6y $\Leftrightarrow$ $y=-4$ .

   Si x=-3 alors 2xy=-24=-6y $\Leftrightarrow$ y=4

   Les deux racines carrées sont : $\delta=3-4\,i$ et $-\delta=-3+4\,i$

   Les deux solutions de l'équation sont :

   $z_1=\dfrac{-1+2\,i+3-4\,i}{2}=\dfrac{2-2\,i}{2}=1-i \qquad z_2=\dfrac{-1+2\,i-3+4\,i}{2}=\dfrac{-4+6\,i}{2}=-2+3i$

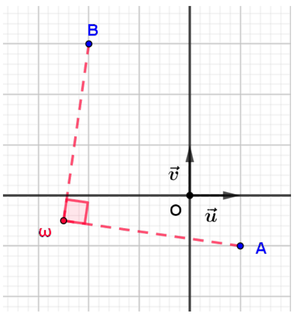
2. A(1-i) B(-2+3i)

   Une rotation de centre $\omega$ et d'angle de mesure $\dfrac{\pi}{2}$ qui au point $M(z)$ associe $M'(z')$ a pour écriture complexe $z'-z_\omega=e^{i\frac{\pi}{2}}(z-z_\omega)=i(z-z_\omega)$ .

   La rotation au point A associe B donc $-2+3\,i-z_\omega=i(1-i-z_\omega) \quad\Leftrightarrow\quad -2+3\,i-z_\omega=i+1-i\,z_\omega$

   $\Leftrightarrow \quad -3+2\,i=(1-i)z_\omega \quad\Leftrightarrow\quad z_\omega=\dfrac{-3+2\,i}{1-i}=\dfrac{(-3+2\,i)(1+i)}{(1-i)(1+i)}=\dfrac{-3-2\pm3\,i+2\,i}{2}=\dfrac{-5-i}{2}=-\dfrac{5}{2}-\dfrac{1}{2}i$

   Le couple de coordonnées du point $\omega$ est $\left(-\dfrac{5}{2};-\dfrac{1}{2}\right)$ .




## EXERCICE 2

1. $\dfrac{2\pi}{3}-\dfrac{\pi}{6}=\dfrac{\pi}{2}$ $(2\pi)$ donc $r_2 o\, r_1$ est une rotation d'angle $\dfrac{\pi}{2}$ .

2. La rotation $r_2 o\, r_1$ admet un unique point invariant (son centre).

 . On utilise les nombres complexes pour déterminer l'affixe du centre de la rotation.

   $r_1$ est la rotation de centre O et d'angle de mesure $-\dfrac{\pi}{6}$ .

   Le point M(z) a pour image par $r_1$ le point $M_1(z_1)$ et la caractérisation complexe de $r_1$ est :

   $z_1-0=e^{-i\frac{\pi}{6}}(z-0) \quad\Leftrightarrow\quad z_1=e^{-i\frac{\pi}{6}}z$ .

   $r_2$ est la rotation de centre $A(1+i\sqrt{3})$ et d'angle de mesure $\dfrac{2\pi}{3}$ .

   Le point M(z) a pour image par $r_2$ le point $M_2(z_2)$ et la caractérisation complexe de $r_2$ est :

$z_2-z_A=e^{2i\frac{\pi}{3}}(z-z_A)=\left(\cos\frac{2\pi}{3}+i\sin\frac{2\pi}{3}\right)(z-z_A)$

$\Leftrightarrow \quad z_2-(1+i\sqrt{3})=\left(-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)(z-1-i\sqrt{3})$

$\Leftrightarrow \quad z_2=\left(-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)z+1+i\sqrt{3}+\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{3}{2}$

$\Leftrightarrow \quad z_2=\left(-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)z+3+i\sqrt{3}=e^{\frac{2i\pi}{3}}z+3+i\sqrt{3}$

$r_2 o r_1(M)=r_2(M_1)=M'(z')$

$z'=e^{\frac{2i\pi}{3}}z_1+3+i\sqrt{3}=e^{\frac{2i\pi}{3}}\times e^{-i\frac{\pi}{6}}z+3+i\sqrt{3}=e^{i\left(\frac{2\pi}{3}-\frac{\pi}{6}\right)}z+3+i\sqrt{3}$

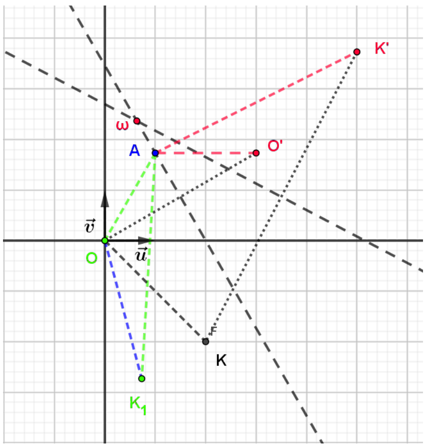
$z'=e^{i\frac{\pi}{2}}z+3+i\sqrt{3}=iz+3+i\sqrt{3}$

$z'=z \quad \Leftrightarrow \quad z=iz+3+i\sqrt{3} \quad \Leftrightarrow \quad (1-i)z=3+i\sqrt{3} \quad \Leftrightarrow \quad z=\frac{3+i\sqrt{3}}{1-i}=\frac{(3+i\sqrt{3})(1+i)}{(1-i)(1+i)}=\frac{3+i\sqrt{3}+3i-\sqrt{3}}{2}$

$z=\frac{3-\sqrt{3}}{2}+i\frac{3+\sqrt{3}}{2}$

Le centre $\omega$ de la rotation $r_2 o r_1$ a pour coordonnées $\left(\frac{3-\sqrt{3}}{2};\frac{++\sqrt{3}}{2}\right)$.

- On peut aussi utiliser l'écriture matricielle pour déterminer les coordonnées de $\omega$.
- On peut aussi déterminer une construction du centre de la rotation.
  Par exemple si $r_2 o r_1(M)=r_2(M_1)=M'$, on a $\omega M=\omega M'$ donc $\omega$ appartient à la médiatrice de [MM']
  $r_2 o r_1(O)=r_2(O)=O'$ $\quad \omega$ appartient à la médiatrice de [OO']
  Puis on choisit un autre point K $\quad r_2 o r_1(K)=r_2(K_1)=K'$ $\quad \omega$ appartient à la médiatrice de [KK']
  Si les deux médiatrices sont sécantes on obtient le centre de la rotation.




## EXERCICE 3

1. $|(1-i)z+2i|=2 \quad \Leftrightarrow \quad |(1-i)z+2i|^2=4$
   $z=x+iy$ x et y sont des nombres réels.
   $(1-i)z+2i=(1-i)(x+iy)+2i=x+iy-ix+y+2i=x+y+(y-x+2)$
   $|(1-i)z+2i|^2=(x+y)^{5-2}+(y-x+1)^2=x^2+y^2+2xy+y^2+x^2+2^2-2xy-4x+4y$
   $|(1-i)z+2i|^2=2x^2+2y^2-4x+4y+4$
   $|(1-i)z+2i|=2 \quad \Leftrightarrow \quad 2x^2+2y^2-4x+4y+4=4 \quad \Leftrightarrow \quad x^2+y^2-2x+2y+2=2$
   $\Leftrightarrow \quad (x-1)^2+(y+1)^2=2$
   L'ensemble cherché est le cercle de centre $\omega(1-i)$ et de rayon $\sqrt{2}$.
2. Soit F l'application du plan P vers le plan P qui au point M(z) associe le point M'(z') tel que
   $z'=(1-i)z+2i$ de la forme $z=az+b$.

F est une similitude plane directe.

$a=1-i \quad |a|=\sqrt{2} \quad a=\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \quad \arg a=\theta \ (2\pi) \quad \cos\theta=\frac{\sqrt{2}}{2}$ et $\sin\theta=-\frac{\sqrt{2}}{2}$

donc $\theta=-\frac{\pi}{4}\ (2\pi)$.

$z'=\sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}z+2i$.

F est une similitude plane directe de rapport $\sqrt{2}$ et d'angle de mesure $-\frac{\pi}{4}$, le centre est l'unique point invariant.

$z=(1-i)z+2i \quad \Leftrightarrow \quad (1-1+i)z=2i \quad \Leftrightarrow \quad z=\frac{2i}{i}=2$.

Le centre de F est le point I d'affixe 2.

3. $|(1-i)z+2i|=2 \quad \Leftrightarrow \quad |z'|=2 \quad \Leftrightarrow \quad OM'=2$

L'ensemble des points M' est le cercle $(\Gamma)$ de centre O et de rayon 2.

$F(M)=M' \quad \Leftrightarrow \quad F^{-1}(M')=M$

$F^{-1}$ est la similitude plane directe de centre I(2), de rapport $\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$ et d'angle de mesure $\frac{\pi}{4}$.

L'image du cercle $(\Gamma)$ de centre O et de rayon 2 est le cercle $\mathscr{C}$ de centre $\omega=F^{¿1}(O)$ et de rayon $2\times\frac{\sqrt{2}}{2}$.

On a $F(\omega)=O$

Si $\omega(z)$ alors $0=(1-i)z+2i \quad \Leftrightarrow \quad (-1+i)z=2i \quad \Leftrightarrow \quad z=\frac{2i(-1-i)}{(-1+i)(-1-i)} \quad \Leftrightarrow \quad z=\frac{-2i+5}{2}=1-i$

L'ensemble des points M(z) tel que $|(1-i)z+2i|=2$ est le cercle de centre $\omega(1-i)$ et de rayon $\sqrt{2}$.

## EXERCICE 4

1. <u>Première méthode :</u> (Géométrique)

$A(1) \quad B(1+\sqrt{3}-i) \quad M(z)$

$|z-1|=AM \quad |z-(1+\sqrt{3})+i|=BM$

$|z-1|=|z-(1+\sqrt{3})+i| \quad \Leftrightarrow \quad AM=BM$

L'ensemble des points M tels que $AM=BM$ est la médiatrice (D) du segment [AB].

<u>Deuxième méthode :</u> (calcul)

$z=x+iy$ x et y sont des nombres réels.

$z-1=x-1+iy \quad |z-1|^2=(x-1)^2+y^2$

$z-(1+\sqrt{3})+i=x-(1+\sqrt{3})+i(y+1) \quad |z-(2+\sqrt{3})+i|^2=(x-(1+\sqrt{3}))^2+(y+1)^2$

$|z-1|=|z-(1+\sqrt{3})+i| \quad \Leftrightarrow \quad |z-1|^2=|z-(1+\sqrt{3})+i|^2 \quad \Leftrightarrow \quad (x-1)^2+y^2=(x-(1+\sqrt{3}))^2+(y+1)^2$

$\Leftrightarrow \quad x^2-2x+1+y^2=x^2-2(1+\sqrt{3})x+(1+\sqrt{3})^2+y^2+2y+1$

$\Leftrightarrow \quad -2x+2x+2\sqrt{3}x+1-(1+2\sqrt{3}+3)-2y-1=0$

$\Leftrightarrow \quad 2\sqrt{3}x-2y-4-2\sqrt{3}=0$

L'ensemble cherché est la droite d'équation $y=\sqrt{3}x-2-\sqrt{3}$.

Cette droite passe par les points $I(1;-2)$ et $C(1+\sqrt{3};1)$.

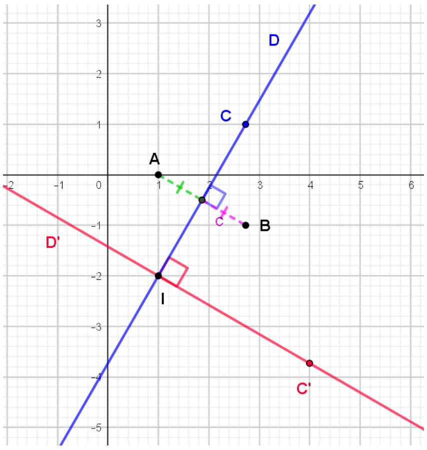
2. $-i=e^{-i\frac{\pi}{2}} \quad |-i|=1 \quad \arg(-i)=-\frac{\pi}{2}\ (2\pi)$

L'application f au point (z) associe le point M'(z') tel que $z'=-iz+3-i$ donc f est une rotation d'angle de mesure $-\frac{\pi}{2}$.

Son centre est l'unique point invariant par f.

$f(M)=M \quad \Leftrightarrow \quad z=-iz+3-i \quad \Leftrightarrow \quad (1+i)z=3-i \quad \Leftrightarrow \quad z=\frac{3-i}{1+i}=\frac{(3-i)(1-i)}{(1-i)(1+i)}=\frac{3-1-4i}{2}=1-2i$

f est la rotation de centre I(1-2i) et d'angle de mesure $-\frac{\pi}{2}$.
L'image de la droite D est une droite D'.
Or D=(IC) et f(I)=I et f(C)=C' donc $(\vec{IC};\vec{IC'})=-\frac{\pi}{2}\ (2\pi)$ et les droites D et D' sont orthogonales.
D' est la perpendiculaire à D passant par I.




## EXERCICE 5

1. $z^2+(-6+i)z+7+3i=0$

$\Delta=(-6+i)^2-4(7+3i)=36-1-12i-28-12i=7-24i$

$\delta=x+iy$ x et y sont des nombres réels.

$\delta^2=\Delta \Leftrightarrow (x+iy)^2=7-24i \Leftrightarrow x^2-y^2+2ixy=7-24i \Leftrightarrow \begin{cases} x^2-y^2=7 \\ 2xy=-24 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2-y^2=7 \\ xy=-12 \end{cases}$

$|\delta|^2=|\Delta| \Leftrightarrow x^2+y^2=\sqrt{7^2+24^2}=\sqrt{49+576}=\sqrt{625}=25$

$\begin{cases} x^2-y^2=7 \\ x^2+y^2=25 \end{cases}$ donc $2x^2=32 \Leftrightarrow x^2=16 \Leftrightarrow |x|=4$

Si x=4 alors 4y=-12 ⇔ y=-3
Si x = -4 alors -4y=-12 ⇔ y=3
Les racines carrées de $\Delta$ sont $\delta=4-3i$ et $-\delta=-4+3i$.
Les solutions de l'équation sont :

$\frac{-(-6+i)+4-3i}{2}=\frac{10-4i}{2}=5-2i$ et $-(-6+i)-4+3i\times 2=\frac{2+2i}{2}=1+i$

$\mathscr{S}=\{1+i;5-2i\}$

2. $z_1=1+i=\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$ et $z_2=5-2i$

La caractérisation compexe d'une similitude plane directe est $z'=az+b$.

$s(A)=A'$ A(-2) A'(1)

$s(M_1)=M_2$ $M_1(1+i)$ $M_2(5-2i)$

$\begin{cases} s(A)=A' \\ s(M_1)=M_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2a+b=1 \\ a(1+i)=5-2i \end{cases}$

On obtient par différence :

$2a+a(1+i)=4-2i \Leftrightarrow (3+i)a=4-2i \Leftrightarrow a=\frac{4-2i}{3+i}=\frac{(4-2i)(3-i)}{(3+i)(3-i)}=\frac{12-61-4i-2}{9+1}=\frac{10-10i}{10}$

$\Leftrightarrow a=1-i$

$-2(1-i)+b=1 \Leftrightarrow b=3-2i$

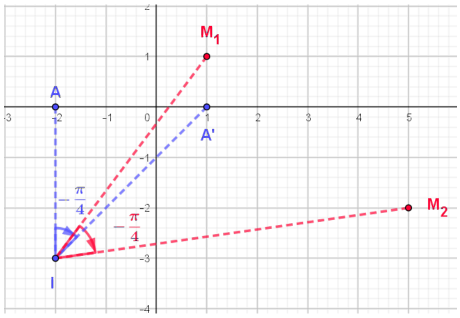
$z'=(1-i)z+3-2i$

$|1-i|^2=2 \Leftrightarrow |1-i|=\sqrt{2}$ $1-i=\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2};-i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=\sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}$

Le centre de la similitude est l'unique point invariant.

$s(M)=M \iff z=(1-i)z+3-2i \iff iz=3-2i \iff z=\frac{3-2i}{i}=\frac{-3i-2}{1}=-2-3i$

s est la similitude plane directe de centre I(-2-3i), de rapport $\sqrt{2}$ et d'angle de mesure $-\frac{\pi}{4}$.




On peut remarquer que les triangles IAA' et $IM_1M_2$ sont rectangles isocèles.

## EXERCICE 6

1. $s_1$ est la similitude plane directe de centre O, de rapport $\sqrt{2}$ ert d'angle de mesure $\frac{\pi}{4}$.

La caractérisation complexe de $s_1$ est de la forme : $z'=az+b$ avec a et b nombres complexes et

$a=\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}=\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)=\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=1+i$

$z'=(1+i)z+b$

$s_1(O)=O$ donc $b=0$

$z'=(1+i)z$

2. $A(1;0)$ $z_A=1$ $z_{A'}=1+i$ $A'(1+i)$

$B(0;1)$ $z_B=i$ $z_{B'}=(1+i)i=-1+i$ $B'(-1+i)$

La caractérisation d'une similitude directe $s_2$ telle que $s_2(M)=M_2(z_2)$ est $z'=az+b$ avec a et b nombres complexes.

$s_2(A)=B' \iff z_{B'}=az_A+b \iff -1+i=a(1)+b \iff a+b=-1+i$

$s_2(B)=A' \iff z_{A'}=az_B+b \iff 1+i=ai+b \iff ia+b=1+i$

$\begin{cases} a+b=-1+i \\ ia+b=1+i \end{cases}$ on obtient $(-1+i)a=2 \iff a=\frac{2}{-1+i}=\frac{2(-1-i)}{(-1+i)(-1-i)}=\frac{2(-1-i)}{2}=-1-i$

$a=-1-i$ et $b=-1+i+1+i=2i$

$z'=(-1-i)z+2i$

Il existe donc une unique similitude plane directe $s_2$ qui associe B' à A et A' à B.

$s_2(M)=M_2(z_2) \iff z_2=(-1-i)z+2i$.

$a=-1-i$ $|a|=\sqrt{2}$ $a=\sqrt{2}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}+i(-\frac{\sqrt{2}}{2})\right)$

$\arg a=\theta\ (2\pi)$ $\cos\theta=-\frac{\sqrt{2}}{2}$ $\sin\theta=-\frac{\sqrt{2}}{2}$ $\theta=\frac{5\pi}{4}\ (2\pi)$

Le centre de $s_2$ est l'unique point invariant par $s_2$.

$s_2(M)=M \iff z_2=z \iff z=(-1-i)z+2i \iff (2+i)z=2i \iff z=\frac{2i}{2+i}=\frac{2i(2-i)}{(2+i)(2-i)}$

$\iff z=\frac{4i+2}{4+1}=\frac{2}{5}+i\frac{4}{5}$

<u>Conclusion</u>

$s_2$ est la similitude de centre $I\left(\frac{2}{5};\frac{4}{5}\right)$, de rapport $\sqrt{2}$ et d'angle de mesure $\frac{5\pi}{4}$.

3. $s_2^{-1}$ est la similitude plane de centre I, de rapport $\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$ et d'angle de mesure $-\frac{5\pi}{4}=\frac{3\pi}{4}\ (2\pi)$.

$s_2^{-1} o\, s_1$ est une similitude plane directe de rapport $\frac{\sqrt{2}}{2} \times \sqrt{2} = 1$ et d'angle de mesure $\frac{\pi}{4} + \frac{3\pi}{4} = \pi$ .

$s_2^{-1} o\, s_1$ est une rotation d'angle plat donc une symétrie centrale.

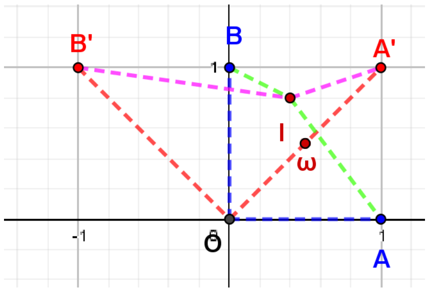
$s_2^{-1} o\, s_1 = S_\omega$ symétrie centrale de centre $\omega$ .

$s_2^{-1} o\, s_1(A) = s_2^{-1}(A') = B$ car $s_2(B) = A'$ donc $S_\omega(A) = B$ .

$\omega$ est le milieu de [AB].

$s_2^{-1} o\, s_1 = S_\omega \quad \Leftrightarrow \quad s_2 o\, s_2^{-1} o\, s_1 = s_2 o\, S_\omega \quad \Leftrightarrow \quad s_1 = s_2 o\, S_\omega \quad \Leftrightarrow \quad s_1 o\, S_\omega = s_2 o\, S_\omega o\, S_\omega \quad \Leftrightarrow \quad s_1 o\, S_\omega = s_2$

car $S_\omega$ est une application involutive.




## EXERCICE 7

$z' = (1 + \mathrm{i}\sqrt{3})\bar{z} + \mathrm{i}$ .

Caractérisation complexe de la forme $z' = a\bar{z} + b$ avec $a = 1 + \sqrt{3}$ $|a|^2 = 1 + 3 = 4$ donc $|a| = 2$

f est une similitude plane inverse de rapport 2.

Le centre de la similitude est l'unique point invariant par f.

$f(M) = M \quad \Leftrightarrow \quad z' = z$

On note $z = x + \mathrm{i}y$ avec x et y nombres réels et $\bar{z} = x - \mathrm{i}y$

$z' = z \quad \Leftrightarrow \quad (1 + \mathrm{i}\sqrt{3})\bar{z} + \mathrm{i} = z \quad (1 + \mathrm{i}\sqrt{3})(x - \mathrm{i}y) + \mathrm{i} = x + \mathrm{i}y \quad \Leftrightarrow \quad x - \mathrm{i}y + \mathrm{i}\sqrt{3}x + \sqrt{3}y + \mathrm{i} = x + \mathrm{i}y$

$$\Leftrightarrow \quad \sqrt{3}y + \mathrm{i}(-2y + \sqrt{3}x + 1) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} \sqrt{3}y = 0 \\ -2y + \sqrt{3}x + 1 = 0 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} y = 0 \\ x = -\frac{\sqrt{3}}{3} \end{cases}$$

le centre de f est le point I d'affixe $-\frac{\sqrt{3}}{3}$ .

f est une similitude de centre I et de rapport 2 donc f est le compsé d'une symétrie orthogonale par rapport à une droite D (passant par I) et de l'homothétie h de centre I et de rapport 2.

$f = h\, o\, S_D \quad \Leftrightarrow \quad h^{-1} o\, f = S_D$

$h^{-1}$ est l'homothétie de centre I et de rapport $\frac{1}{2}$ .

On détermine la caractérisation complexe de $h^{-1}$ .

$h^{-1}(M) = M_1(z_1)$ et M(z)

$z_1 - z_I = \frac{1}{2}(z - z_I) \quad \Leftrightarrow \quad z_1 = \frac{1}{2}z + \frac{1}{2}z_I \quad \Leftrightarrow \quad z_1 = \frac{1}{2}z - \frac{\sqrt{3}}{6}$

$S_D(M) = M_2(z_2) = h^{-1} o\, f(M) = h^{-1}(M')$

$z_2 = \frac{1}{2}z' - \frac{\sqrt{3}}{6} = \frac{1}{2}(1 + \mathrm{i}\sqrt{3})\bar{z} + \frac{1}{2}\mathrm{i} - \frac{\sqrt{3}}{6}$

On détermine l'ensemble des points invariants par $S_D$ .

$z = z_2 \quad \Leftrightarrow \quad x + \mathrm{i}y = \left(\frac{1}{2} + \mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2}\right)(x - \mathrm{i}y) - \frac{\sqrt{3}}{6} + \frac{1}{2}\mathrm{i} \quad \Leftrightarrow \quad x + \mathrm{i}y = \frac{1}{2}x - \frac{}{2}\mathrm{i}y + \mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2}x + \frac{\sqrt{3}}{2}y - \frac{\sqrt{3}}{6} + \frac{1}{2}\mathrm{i}$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{1}{2}x - \frac{\sqrt{3}}{2}y + \frac{\sqrt{3}}{6} + \mathrm{i}\left(\frac{6}{2}y - \frac{\sqrt{3}}{2}x - \frac{1}{2}\right) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} \frac{1}{2}x - \frac{\sqrt{3}}{2}y + \frac{\sqrt{3}}{6} = 0 \\ -\frac{\sqrt{3}}{2}x + \frac{3}{2}y - \frac{1}{2} = 0 \end{cases}$$

On multiplie la première équation par $-\sqrt{3}$ et on obtient la seconde.

$\Leftrightarrow \left\{-\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{3}{2}y-\frac{1}{2}=0\right. \quad \Leftrightarrow \quad \left\{y=\frac{\sqrt{3}}{3}x+\frac{1}{3}\right.$

$S_D$ est la symétrie orthogonale par rapport à la droite D : $y=\frac{\sqrt{3}}{3}x+\frac{1}{3}$ (le point I appartient à la droite D).

Conclusion

**f est la similitude plane inverse de centre I ; et de rapport 2 et d'axe D.**

**EXERCICE 8**

1. $M(z)$ f(M)=M'(z') $z'=(1-i\sqrt{3})\bar{z}+3+3i\sqrt{3}$.

$\omega(1+i\sqrt{3})$ $\quad z'=(1-i\sqrt{3})\overline{(1+i\sqrt{3})}+3+3i\sqrt{3}=(1-i\sqrt{3})(1-i\sqrt{3})+3+3i\sqrt{3}$

$z'=1-3-2i\sqrt{3}+3+3i\sqrt{3}=1+i\sqrt{3}$

donc $f(\omega)=\omega$.

La caractérisation complexe de f est de la forme $z'=a\bar{z}+b$ donc f est une similitude plane inverse.

$a=1-i\sqrt{3}$ $\quad |a|^2=1+3=4$ $\quad |a|=2=k$

$f(\omega)=\omega$ donc f est une similitude plane inverse de centre $\omega$ et de rapport 2.

Soit h l'homothétie de centre $\omega$ et de rapport 2.

$f=h\circ S_D \quad \Leftrightarrow \quad h^{-1}\circ f=S_D$

$h^{-1}$ est l'homothétie de centre $\omega$ et de rapport $\frac{1}{2}$.

On détermine la caractérisation complexe de $h^{-1}$

M(z) $\quad h(M)=M_1(z_1)$

$z_1-z_\omega=\frac{1}{2}(z-z_\omega) \quad \Leftrightarrow \quad z_1=\frac{1}{2}z+\frac{1}{2}z_\omega=\frac{1}{2}z+\frac{1}{2}(1+i\sqrt{3})$

On détermine la caractérisation complexe de $S_D$.

M(z) $\quad S_D(M)=M_2(z_2) \quad S_D(M)=h^{-1}\circ f(M)=h^{-1}(M')=M_2$

$z'=(1-i\sqrt{3})\bar{z}+2+2i\sqrt{3}$

$z_2=\frac{1}{2}z'+\frac{1}{2}(1+i\sqrt{3})=\left(\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\bar{z}+\frac{3}{2}+i\frac{3\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}$

$z_2=\left(\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\bar{z}+2+2i\sqrt{3} \qquad \left|\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}\right|=1$

On obtient la caractérisation complexe d'un antidéplacement

On détermine l'ensemble des points invariants par $S_D$.

$z=x+iy$ $\quad$ x et y sont des nombres réels.

$z_2=z \quad \Leftrightarrow \quad x+iy=\left(\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)(x-iy)+2+2i\sqrt{3}=\frac{1}{2}x-i\frac{\sqrt{3}}{2}x-\frac{1}{2}iy-\frac{\sqrt{3}}{2}y+2+2i\sqrt{3}$

$\Leftrightarrow \quad x+iy=\frac{1}{2}x-\frac{\sqrt{3}}{2}y+2+i\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}x-\frac{1}{2}y+2\sqrt{3}\right) \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x=\frac{1}{2}x-\frac{\sqrt{3}}{2}y+2 \\ y=-\frac{\sqrt{3}}{2}x-\frac{1}{2}y+2\sqrt{3} \end{cases}$

$\Leftrightarrow \quad \begin{cases} \frac{1}{2}x+\frac{\sqrt{3}}{2}y-2=0 \\ \frac{\sqrt{3}}{2}x+\frac{3}{2}-2\sqrt{3}=0 \end{cases}$ si on multiplie la première équation par $\sqrt{3}$ on obtient la deuxième.

$\Leftrightarrow \quad \left\{\frac{\sqrt{3}}{2}x+\frac{3}{2}y-2\sqrt{3}=0\right. \quad \Leftrightarrow \quad \left\{\sqrt{3}x+3y-4\sqrt{3}=0\right. \quad \Leftrightarrow \quad \left\{y=-\frac{\sqrt{3}}{3}x+\frac{4}{3}\sqrt{3}\right.$

L'ensemble des points invariants par $S_D$ est la droite D d'équation : $y=\frac{\sqrt{3}}{3}x+\frac{4}{3}\sqrt{3}$ .

Conclusion

**f est la similitude plane inverse de centre $\omega$ de rapport 2 et d'axe D.**

2. g est la symétrie orthogonale par rapport à la droite $\Delta$ : $y=x\sqrt{3}$ .
M(z) $\quad g(M)=M'(z')$
La caractérisation complexe de g est de la forme $z'=a\bar{z}+b$ .
O est invariant donc b=0 donc $z'=a\bar{z}$
$\omega(1+\sqrt{3})$ appartient à $\Delta$ donc $g(\omega)=\omega$ .

$$1+i\sqrt{3}=a\overline{(1+i\sqrt{3})}=a(1-i\sqrt{3}) \quad \Leftrightarrow \quad a=\frac{1+i\sqrt{3}}{1-i\sqrt{3}}=\frac{(1+i\sqrt{3})^2}{(1-i\sqrt{3})(1+i\sqrt{3})}=\frac{1-3+2i\sqrt{3}}{4}=-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$z'=(-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2})\bar{z}$$

$z=x+iy$ et $z'=x'+iy'$ $\quad x,\ y,\ x'$ et $y'$ sont des nombres réels.

$$x'+iy'=\left(-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)(x+iy)=-\frac{1}{2}x+i\frac{\sqrt{3}}{2}x+\frac{1}{2}iy+\frac{\sqrt{3}}{2}y \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x'=-\frac{1}{2}x+\frac{\sqrt{3}}{2}y \\ y'=\frac{\sqrt{3}}{2}x+\frac{1}{2}y \end{cases}$$

3. M(z) $\quad f(M)=M'(z') \qquad z'=(1-i\sqrt{3})\bar{z}+3+3i\sqrt{3}$

$g(M)=M_1(z_1) \qquad z_1=\left(-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\bar{z}$

$g\circ f(M)=M_2(z_2)=g(M')$

$$z_2=\left(-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\bar{z'}=\left(-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\overline{[(1-i\sqrt{3})\bar{z}+3+3i\sqrt{3}]}=\left(-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)[(1+i\sqrt{3})z+3-3i\sqrt{3}]$$

$$z_2=\left(-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{3}{2}\right)z-\frac{3}{2}+i\frac{3\sqrt{3}}{2}+\frac{9}{2}=-2z+3+3i\sqrt{3}$$

$g\circ f$ est une homothétie de rapport -2.

Détermination du centre de l'homothétie

$z_2=z \quad \Leftrightarrow \quad 3z=3+3i\sqrt{3} \quad \Leftrightarrow \quad z=1+i\sqrt{3}$

$g\circ f$ est l'homothétie de centre $\omega(1+i\sqrt{3})$ et de rapport : -2 ou la similitude plane directe de centre $\omega$ et de rapport:-2 et d'angle de mesure de mesure $\pi$ .