Applications du produit scalaire.

Compléments de trigonométrie.

$(O;\vec{i},\vec{j})$ est un repère orthonormal du plan.

1. Équations cartésiennes d'une droite

1.1. Remarque

a)

$A(x_A;y_A)$ est un point fixé du plan.

$\vec{n}\begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\end{pmatrix}$ est un vecteur non nul donné. $(\alpha\neq0 \text{ ou } \beta\neq0)$

L'ensemble des points M du plan tels que $\overrightarrow{AM}.\vec{n}=0$ est une droite.

Démonstration:

$M(x;y)$ $\vec{n}\begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\end{pmatrix}$ $\overrightarrow{AM}\begin{pmatrix}x-x_A\\ y-y_A\end{pmatrix}$

$\overrightarrow{AM}.\vec{n}=0$

$\Leftrightarrow \alpha(x-x_A)+\beta(y-y_A)=0$

$\Leftrightarrow \alpha x+\beta y-\alpha x_A-\beta y_A=0$

Si on pose : $a=\alpha$ et $b=\beta$ et $c=-\alpha x_A-\beta y_A$, on obtient $ax+by+c=0$ (avec $a\neq0$ ou $b\neq0$) donc une équation cartésienne d'une droite du plan.

b) **Réciproquement**.

Soit $\mathscr{D}$ la droite : $ax+by+c=0$ (avec $a\neq0$ ou $b\neq0$).

On détermine les coordonnées $(x_A;y_A)$ d'un point A de $\mathscr{D}$.

Par exemple, si $a\neq0$, alors on pose $y_A=0$ et $x_A=\frac{-c}{a}$. Si $a=0$ alors $b\neq0$, on pose $x_A=0$ et $y_A=\frac{-c}{b}$.

$M(x;y)\in\mathscr{D}$

$\Leftrightarrow ax+by+c=0=ax_A+by_A+c=0$

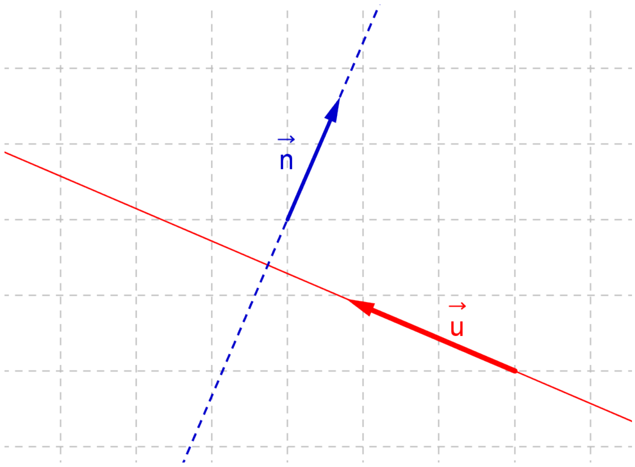
$\Leftrightarrow a(x-x_A)+b(y-y_A)=0$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{AM}.\vec{n}=0$ avec $\vec{n}\begin{pmatrix}a\\ b\end{pmatrix}$

1.2. Vecteur normal à une droite

$\mathscr{D}$ est une droite du plan.

Dire que le vecteur $\vec{n}$ est **un vecteur normal** à $\mathscr{D}$ signifie que $\vec{n}\neq\vec{0}$ et que $\vec{n}$ est orthogonal à un vecteur directeur de $\mathscr{D}$.



1.3. Propriété

Le plan est muni d'un repère orthonormal.
1) Une droite de vecteur normal $\vec{n}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ a une équation de la forme $ax+by+c=0$ où $c \in \mathbb{R}$ Une telle équation est appelée **équation cartésienne** de la droite.
2) Un ensemble d'équation $ax+by+c=0$ (avec a et b non simultanément nuls) est une droite de vecteur normal $\vec{n}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$.

1.4. Application

Dans un repère orthonormal, on a les points A(3;-1) et B(2;4). Déterminer une équation de la médiatrice $\mathscr{D}$ du segment [AB].

La droite $\mathscr{D}$ est orthogonale à la droite (AB), donc $\overrightarrow{AB}$ est un vecteur normal à la droite $\mathscr{D}$.
$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} -1 \\ 5 \end{pmatrix}$ donc $\mathscr{D}$ a pour équation $-x+5y+c=0$.

Soit I le milieu du segment [AB], I a pour coordonnées:
$x_I=\frac{3+2}{2}=\frac{5}{2}$
$y_I=\frac{-1+4}{2}=\frac{3}{2}$.

I appartient à la droite $\mathscr{D}$, donc $-x_I+5y_I+c=0$.
Donc $-\frac{5}{2}+5\times\frac{3}{2}+c=0$ d'où $c=\frac{5}{2}-\frac{15}{2}=-\frac{10}{2}=-5$.

Donc $\mathscr{D}$ a pour équation cartésienne $-x+5y-5=0$.

Remarque:

$\mathscr{D}$ admet une infinité d'équations cartésiennes. En effet, il suffit de multiplier par un réel.
On peut donc dire que $\mathscr{D}$ admet pour équation cartésienne $-2x+10y-10=0$ (multiplier par 2), ou $x-5y+5=0$ (multiplier par -1) …..

1.5. Droites perpendiculaires

Dans un repère orthonormal, soient les droites $\mathscr{D}$ et $\mathscr{D}'$ d'équations respectives $ax+by+c=0$ et $a'x+b'y+c'=0$.
$\mathscr{D}$ et $\mathscr{D}'$ sont **perpendiculaires** si et seulement si $aa'+bb'=0$.

Démonstration:

Soit $\vec{n}\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}$ et $\vec{n'}\begin{pmatrix}a'\\b'\end{pmatrix}$ les vecteurs normaux de $\mathscr{D}$ et $\mathscr{D}'$.
$\mathscr{D}$ et $\mathscr{D}'$ sont perpendiculaires si et seulement si les vecteurs $\vec{n}$ et $\vec{n'}$ sont orthogonaux.
Or $\vec{n}$ et $\vec{n'}$ sont orthogonaux si et seulement si $\vec{n}\cdot\vec{n'}=0$, c'est à dire si et seulement si $aa'+bb'=0$.

Exemple:

Dans un repère orthonormal, soit $\mathscr{D}$ et $\mathscr{D}'$ les droites d'équations respectives: $3x+2y-1=0$ et $6x-9y+5=0$.

$3\times 6+2\times(-9)=18-18=0$ donc les droites $\mathscr{D}$ et $\mathscr{D}'$ sont perpendiculaires.

2. Équations de cercles

2.1. Caractérisation du cercle de diamètre [AB]

Soit $\mathscr{C}$ le cercle de diamètre [AB].
Le cercle de diamètre [AB], privé de A et de B, est l'ensemble des points M du plan tels que le triangle MAB est rectangle en M, c'est à dire l'ensemble des points M tels que:
$\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}=0$, avec $\overrightarrow{MA}\neq\vec{0}$ et $\overrightarrow{MB}\neq 0$.
De plus, si M=A ou si M=B, on a $\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}=0$.

Théorème:
Le cercle de diamètre [AB] est l'ensemble des points M tels que $\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}=0$.

2.2. Équation d'un cercle connaissant les coordonnées du centre et le rayon.

Soit $\mathscr{C}$ le cercle de centre A et de rayon R.
Plaçons nous dans un repère orthonormal. Notons $A(x_A;y_A)$.

$\mathscr{C}$ est l'ensemble des points M tel que AM=R⇔AM²=R².

$M(x;y)\in\mathscr{C}$
⇔AM²=R²
$\Leftrightarrow (x-x_A)^2+(y-y_A)^2=R^2$

Propriété:

Le cercle $\mathscr{C}$ de centre $A(x_A;y_A)$ et de rayon R est l'ensemble des points tels que $(x-x_A)^2+(y-y_A)^2=R^2$.
On dit que $(x-x_A)^2+(y-y_A)^2=R^2$ est **une équation du cercle** $\mathscr{C}$.

Exemples:

a)Soit $\mathscr{E}$ l'ensemble d'équation $(x-3)^2+(y-1)^2=4$.
Cet ensemble est le cercle de centre A(3;1) et de rayon 2.

b)Soit le cercle $\mathscr{C}$ de centre A(-2;3) et de rayon 5.
$\mathscr{C}$ a pour équation $(x-(-2))^2+(y-3)^2=5^2$, soit $(x+2)^2+(y-3)^2=25$.

2.3. Équation d'un cercle connaissant les coordonnées de deux points diamétralement opposés.

Soit $A(x_A;y_A)$ et $B(x_B;y_B)$ deux points dans un repère orthonormal. Soit $\mathscr{C}$ le cercle de diamètre [AB].
$M(x;y)$ appartient à $\mathscr{C}$
$\Leftrightarrow \overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}=0$
$\Leftrightarrow (x-x_A)(x-x_B)+(y-y_A)(y-y_B)=0$
$\Leftrightarrow x^2+y^2-(x_A+x_B)x-(y_A+y_B)y+x_A x_B+y_A y_B=0$

Une équation de $\mathscr{C}$ est donc de la forme $x^2+y^2+ax+by+c=0$.

Remarque:

Tout cercle a une équation de la forme $x^2+y^2+ax+by+c=0$, mais toute équation de cette forme n'est pas nécessairement celle d'un cercle.

Exemples:

a) Soit $\mathscr{A}$ l'ensemble d'équation $x^2+y^2-2x+4y+12=0$

$x^2+y^2-2x+4y+12=0$

$\Leftrightarrow x^2-2x+1-1+y^2+4y+4-4+12=0$
$\Leftrightarrow (x-1)^2+(y+2)^2+7=0$
$\Leftrightarrow (x-1)^2+(y+2)^2=-7$
La somme de deux carrés étant toujours positifs, cet ensemble est vide.

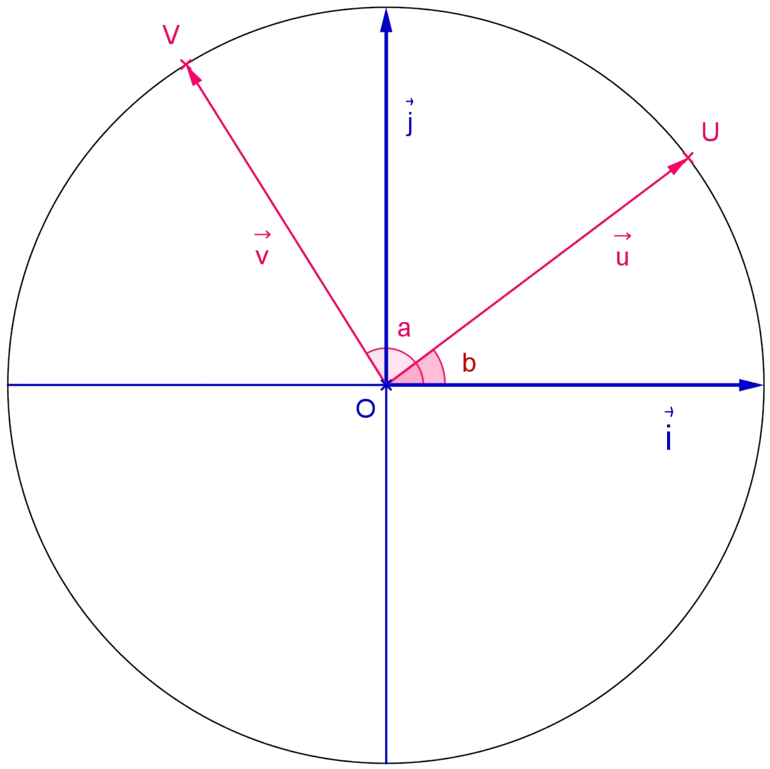
b) Soit $\mathscr{B}$ l'ensemble d'équation $x^2+y^2-6x+10y+25=0$.

$x^2+y^2-6x+10y+25=0$
$\Leftrightarrow x^2-6x+9-9+y^2+10y+25-25+25=0$
$\Leftrightarrow (x-3)^2+(y+5)^2-9=0$
$\Leftrightarrow (x-3)^2+(y-(-5))^2=9$

D'où $\mathscr{B}$ est le cercle de centre B(3; -5) et de rayon 3.

3. Compléments de trigonométrie

3.1. Cosinus d'une différence



$(O;\vec{i},\vec{j})$ est un repère orthonormal direct.

a et b sont deux nombres réels donnés.

$U(\cos b;\sin b)$ $\qquad$ $V(\cos a;\sin a)$

$\vec{u}=\overrightarrow{OU}$ et $\vec{v}=\overrightarrow{OV}$

On a $\|\vec{u}\|=OU=1$ et $(\vec{i};\vec{u})=b(2\pi)$

$\|\vec{v}\|=OV=1$ et $(\vec{i};\vec{v})=a(2\pi)$

$(\vec{u};\vec{v})=(\vec{u};\vec{i})+(\vec{i};\vec{v})(2\pi)$
$(\vec{u};\vec{v})=-(\vec{i};\vec{u})+(\vec{i};\vec{v})(2\pi)$
$(\vec{u};\vec{v})=-b+a(2\pi)$
$(\vec{u};\vec{v})=a-b(2\pi)$

$\vec{u}.\vec{v}=\|\vec{u}\|\times\|\vec{v}\|\times\cos(\vec{u};\vec{v})$
$\vec{u}.\vec{v}=1\times1\times\cos(a-b)$

D'autre part, $\vec{u}.\vec{v}=\cos a\times\cos b+\sin a\times\sin b$

Donc, $\cos(a-b)=\cos a\cos b+\sin a\sin b$

3.2. Remarques

- Si on remplace b par $-b$, on obtient :
  $\cos(a-(-b))=\cos(a+b)=\cos a\cos(-b)+\sin a\sin(-b)$
  Or, $\cos(-b)=\cos b$ et $\sin(-b)=-\sin b$
  On obtient $\cos(a+b)=\cos a\cos b-\sin a\sin b$
- $\sin(a+b)=\cos\left(\frac{\pi}{2}-(a+b)\right)$
  $\sin(a+b)=\cos\left[\left(\frac{\pi}{2}-a\right)-b\right]$
  $\sin(a+b)=\cos\left(\frac{\pi}{2}-a\right)\cos b+\sin\left(\frac{\pi}{2}-a\right)\sin b$
  $\sin(a+b)=\sin a\cos b+\cos a\sin b$
- Si on remplace b par $-b$, on obtient :
  $\sin(a-b)=\sin a\cos(-b)+\cos a\sin(-b)$
  $\sin(a-b)=\sin a\cos b-\cos a\sin b$

3.3. Formules d'addition

Pour tous nombres réels a et b
$\cos(a-b)=\cos a\cos b+\sin a\sin b$
$\cos(a+b)=\cos a\cos b-\sin a\sin b$
$\sin(a+b)=\sin a\cos b+\cos a\sin b$
$\sin(a-b)=\sin a\cos b-\cos a\sin b$

3.4. Exercice

En remarquant que : $\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{12}$ et $\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{4}=\frac{7\pi}{12}$, déterminer les valeurs exactes de $\cos\frac{\pi}{12}$; $\sin\frac{\pi}{12}$; $\cos\frac{7\pi}{12}$; $\sin\frac{7\pi}{12}$.

$$\cos\frac{\pi}{12}=\cos\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4}\right)=\cos\frac{\pi}{3}\cos\frac{\pi}{4}+\sin\frac{\pi}{3}\sin\frac{\pi}{4}$$

$$\cos\frac{\pi}{12}=\frac{1}{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\cos\frac{\pi}{12}=\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$$

$$\sin\frac{\pi}{12}=\sin\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4}\right)=\sin\frac{\pi}{3}\cos\frac{\pi}{4}-\cos\frac{\pi}{3}\sin\frac{\pi}{4}$$

$$\sin\frac{\pi}{12}=\frac{\sqrt{3}}{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{1}{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\sin\frac{\pi}{12}=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$$

$$\cos\frac{7\pi}{12}=\cos\left(\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{4}\right)=\cos\frac{\pi}{3}\cos\frac{\pi}{4}-\sin\frac{\pi}{3}\sin\frac{\pi}{4}$$

$$\cos\frac{7\pi}{12}=\frac{1}{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\cos\frac{7\pi}{12}=\frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}$$

$$\sin\frac{7\pi}{12}=\sin\left(\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{4}\right)=\sin\frac{\pi}{3}\cos\frac{\pi}{4}+\cos\frac{\pi}{3}\sin\frac{\pi}{4}$$

$$\sin\frac{7\pi}{12}=\frac{\sqrt{3}}{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{1}{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$\sin\frac{7\pi}{12}=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$

3.5. Formules de duplication

On pose $a=b$.

$\cos(a+b)=\cos(a+a)=\cos 2a=\cos a\times\cos a-\sin a\times\sin a=\cos^2 a-\sin^2 a$

$\sin(a+b)=\sin(a+a)=\sin 2a=\sin a\cos a+\cos a\sin a=2\sin a\cos a$

<u>Remarque :</u>

$\cos^2 a+\sin^2 a=1$

Donc, $\cos^2 a-\sin^2 a=\cos^2 a-(1-\cos^2 a)=2\cos^2 a-1$

et, $\cos^2 a-\sin^2 a=(1-\sin^2 a)-\sin^2 a=1-2\sin^2 a$

Pour tout nombre réel a

$\cos 2a=\cos^2 a-\sin^2 a$

$\cos 2a=2\cos^2 a-1$

$\cos 2a=1-2\sin^2 a$

$\sin 2a=2\sin a\cos a$

3.6. Exercice

Calculer $\cos\frac{\pi}{8}$ et $\sin\frac{\pi}{8}$.

$\cos\frac{\pi}{4}=\cos\left(2\times\frac{\pi}{8}\right)=2\cos^2\frac{\pi}{8}-1$

Donc, $2\cos^2\frac{\pi}{8}=\frac{\sqrt{2}}{2}+1$

$\cos^2\frac{\pi}{8}=\frac{2+\sqrt{2}}{4}$

Or, $0<\frac{\pi}{8}<\frac{\pi}{2}$, donc $\cos\frac{\pi}{8}>0$.

Donc, $\cos\frac{\pi}{8}=\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$

$\cos\frac{\pi}{4}=\cos\left(2\times\frac{\pi}{8}\right)=1-2\sin^2\frac{\pi}{8}$

Donc, $2\sin^2\frac{\pi}{8}=1-\frac{\sqrt{2}}{2}$

$\sin^2\frac{\pi}{8}=\frac{2-\sqrt{2}}{4}$

Or, $0<\frac{\pi}{8}<\frac{\pi}{2}$, donc $\sin\frac{\pi}{8}>0$.

Donc, $\sin\frac{\pi}{8}=\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$