Exercices Fiche 1

Exercice 1

On donne les points A(0;2) et B(3;1). M est un point de coordonnées $(m;0)$ avec m réel.
1. Calculer $\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}$ en fonction de m.
2. Déduisez en les valeurs de m pour lesquelles le triangle AMB est rectangle en M.

Exercice 2

Soit ABCD un parallélogramme tel que AB=4, AD=2 et $\widehat{BAD}$ =60°.
1. Démontrer que: $(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD})^2=28$ et $(\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AD})^2=12$.
2. En déduire les longueurs AC et BD et une mesure approchée en degré de l'angle $\widehat{BAC}$ à 10^{-1} près.

Exercice 3

Soit ABC un triangle tel que AB=10, AC=8 et BC=7.
1. Déterminer ses trois angles. On donnera des mesures approchées en degré à 10^{-1} près.
2. Calculer les longueurs de la médiane issue de A et la médiane issue de B.

Exercice 4

Donner une équation de la droite $\mathscr{D}$ passant par A et $\vec{u}$ est un vecteur normal.

a. A(-1; 2) et $\vec{u}\begin{pmatrix}3\\-5\end{pmatrix}$

b. A(-4; 3) et $\vec{u}\begin{pmatrix}-2\\1\end{pmatrix}$

Exercice 5

Soit ABC un triangle tel que A(2;0), B(4;1) et C(3;4).
Déterminer une équation de la hauteur $\mathscr{D}$ issue de A.
Déterminer les coordonnées de l'orthocentre de ABC.

Exercice 6

On donne les points A(0;4), B(-3; 0).
1. Donner une équation du cercle de diamètre [AB].
2. Déterminer une équation de la tangente T à $\mathscr{C}$ au point B.

Exercice 7

Déterminer le lieu des points d'équation donnée:
a. $x^2-2x+y^2-6y-6=0$
b. $x^2+y^2+4y+8=0$
c. $x^2+10x+y^2-2y+22=0$

Exercice 8

On considère le point A(3;1).
1. Écrire une équation du cercle $\mathscr{C}$ de centre A et de rayon 5.
2. Soit C le point de coordonnées (1; -3).
a. Déterminer une équation de l'ensemble $\mathscr{E}$ des points M du plan tels que $MA^2+MC^2=50$.
b. Déterminer cet ensemble et le tracer.
c. Déterminer les points d'intersection de $\mathscr{E}$ et de $\mathscr{C}$.

Exercice 9

On se propose de résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation : $\frac{\sqrt{3}}{2}\cos x-\frac{1}{2}\sin x=\frac{1}{2}$

1. <u>Première méthode :</u>

a) Déterminer un nombre réel α tel que $\cos\alpha=\frac{\sqrt{3}}{2}$ et $\sin\alpha=\frac{1}{2}$.

b) En transformant l'écriture du premier membre, montrer que l'équation est équivalente à une équation du type $\cos X=a$

c) Résoudre alors l'équation.

2. <u>Deuxième méthode :</u>

$(O;\vec{i},\vec{j})$ est un repère orthonormal du plan. On pose $X=\cos x$ et $Y=\sin x$

$M(X;Y)$ est un point d'intersection du cercle d'équation : $X^2+Y^2=1$ et de la droite d'équation : $\frac{\sqrt{3}}{2}X-\frac{1}{2}Y+\frac{1}{2}=0$

a) Résoudre le système :

$$\begin{cases} X^2+Y^2=1 \\ \sqrt{3}X-Y-1=0 \end{cases}$$

b) Résoudre alors l'équation proposée.

CORRECTION

Exercice 1

On donne les points A(0;2) et B(3;1). M est un point de coordonnées $(m;0)$ avec m réel.
1. Calculer $\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}$ en fonction de m .
2. Déduisez en les valeurs de m pour lesquelles le triangle AMB est rectangle en M.

1. $\overrightarrow{MA}\begin{pmatrix}-m\\2\end{pmatrix}$ $\overrightarrow{MB}\begin{pmatrix}3-m\\1\end{pmatrix}$

$\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB}=-m(3-m)+2\times1=-3m+m^2+2$

2. Le triangle AMB est rectangle en M si et seulement si $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB}=0$

donc si et seulement si $m^2-3m+2=0$.

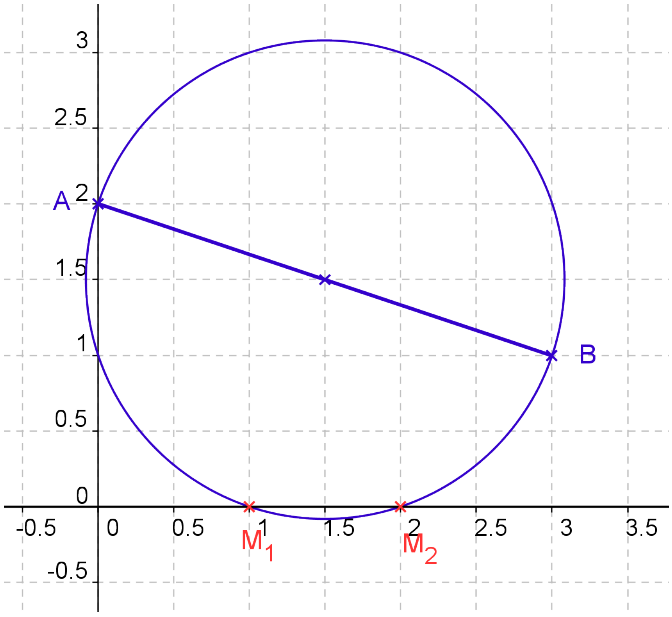
$\Delta=(-3)^2-4\times1\times2=9-8=1$

$m_1=\frac{3-1}{2}=1$ et $m_2=\frac{3+1}{2}=2$. S={1;2}

Remarque : Le point $M(m;0)$ appartient à l'axe des abscisses c'est à dire la droite d'équation $y=0$.

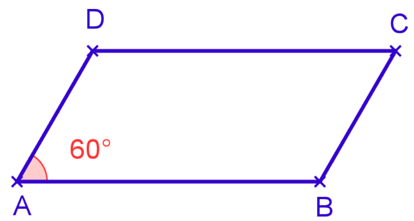
Le triangle AMB est rectangle en M si et seulement si le point M appartient au cercle de diamètre [AB].

Les points solutions sont les points d'intersection du cercle de diamètre [AB] et de l'axe des abscisses. On obtient $M_1(1;0)$ et $M_2(2;0)$.



Exercice 2

Soit ABCD un parallélogramme tel que AB=4, AD=2 et $\widehat{BAD}$ =60°.
1. Démontrer que: $(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD})^2=28$ et $(\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AD})^2=12$.
2. En déduire les longueurs AC et BD et une mesure approchée en degré de l'angle $\widehat{BAC}$ à 10^{-1} près.



1. $(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD})^2=\overrightarrow{AB}^2+2\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AD}^2$

Or, $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AD}=AB\times AD\times\cos\widehat{BAD}=4\times2\times\cos 60°=8\times\frac{1}{2}=4$

Donc, $(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD})^2=4^2+2\times4+2^2=16+8+4=28$.

$(\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AD})^2=\overrightarrow{AB}^2-2\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AD}^2$
$(\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AD})^2=4^2-2\times4+2^2=16-8+4=12$

2. ABCD est un parallélogramme donc $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AC}$
Donc, $\overrightarrow{AC}^2=(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD})^2=28$
Donc, $AC=\sqrt{28}=2\sqrt{7}$.

$\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{DA}=\overrightarrow{DB}$
Donc, $\overrightarrow{DB}^2=(\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AD})^2=12$
Donc, $BD=\sqrt{12}=2\sqrt{3}$.

Dans le triangle ABC :
$BC^2=AB^2+AC^2-2\times AB\times AC\times\cos\widehat{BAC}$
$4=16+28-2\times4\times2\sqrt{7}\cos\widehat{BAC}$
$16\sqrt{7}\cos\widehat{BAC}=40$
$\cos\widehat{BAC}=\frac{40}{16\sqrt{7}}=\frac{5}{2\sqrt{7}}=\frac{5\sqrt{7}}{14}$
Donc, $\widehat{BAC}\approx19{,}1^\circ$

Exercice 3

Soit ABC un triangle tel que AB=10, AC=8 et BC=7.
1. Déterminer ses trois angles. On donnera des mesures approchées en degré à 10^{-1} près.
2. Calculer les longueurs de la médiane issue de A et la médiane issue de B.

1. $BC^2=AB^2+AC^2-2\times AB\times AC\times\cos\widehat{BAC}$

$49=100+64-2\times10\times8\times\cos\widehat{BAC}$

$160\cos\widehat{BAC}=115$

$\cos\widehat{BAC}=\dfrac{115}{160}=\dfrac{23}{32}$

Et, donc $\widehat{BAC}\approx 44{,}1^\circ$

$AC^2=AB^2+BC^2-2\times AB\times BC\times\cos\widehat{ABC}$

$64=100+49-2\times10\times7\times\cos\widehat{ABC}$

$140\cos\widehat{ABC}=85$

$\cos\widehat{ABC}=\dfrac{85}{140}=\dfrac{17}{28}$

Et, donc $\widehat{ABC}\approx 52{,}6^\circ$

$AB^2=BC^2+AC^2-2\times BC\times AC\times\cos\widehat{ACB}$

$100=49+64-2\times7\times8\times\cos\widehat{ACB}$

$112\cos\widehat{ACB}=13$

$\cos\widehat{ACB}=\dfrac{13}{112}$

Et, donc $\widehat{ACB}\approx 83{,}3^\circ$

On peut vérifier que la somme est égale à 180°.

2. $AB^2+AC^2=2\,AI^2+2\,IC^2$

$100+64=2\,AI^2+2\times\dfrac{49}{4}$

$2\,AI^2=164-\dfrac{49}{2}$

$AI^2=\dfrac{279}{4}$

$AI=\sqrt{\dfrac{279}{4}}=\dfrac{\sqrt{279}}{2}=\dfrac{3\sqrt{31}}{2}$

$BA^2+BC^2=2\,BJ^2+2\,JC^2$

$100+49=2\,BJ^2+2\times16$

$2\,BJ^2=149-32$

$BJ^2=\dfrac{117}{2}$

$BJ=\sqrt{\dfrac{117}{2}}=3\sqrt{\dfrac{13}{2}}$

Exercice 4

Donner une équation de la droite $\mathscr{D}$ passant par A et $\vec{u}$ est un vecteur normal.

a. A(-1; 2) et $\vec{u}\begin{pmatrix} 3 \\ -5 \end{pmatrix}$

b. A(-4; 3) et $\vec{u}\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$

a) $M(x;y)\in\mathscr{D} \Leftrightarrow \overrightarrow{AM}.\vec{u}=0$

Or, $\overrightarrow{AM}\begin{pmatrix} x+1 \\ y-2 \end{pmatrix}$

$M(x;y)\in\mathscr{D} \Leftrightarrow 3(x+1)-5(y-2)=0$

$M(x;y)\in\mathscr{D} \Leftrightarrow 3x-5y+13=0$

$\mathscr{D}$: $3x-5y+13=0$

b) $M(x;y)\in\mathscr{D} \Leftrightarrow \overrightarrow{AM}.\vec{u}=0$

Or, $\overrightarrow{AM}\begin{pmatrix} x+4 \\ y-3 \end{pmatrix}$

$M(x;y)\in\mathscr{D} \Leftrightarrow -2(x+4)+1(y-3)=0$

$M(x;y)\in\mathscr{D} \Leftrightarrow -2x+y-11=0$

$\mathscr{D}$: $-2x+y-11=0$

Exercice 5

Soit ABC un triangle tel que A(2;0), B(4;1) et C(3;4).
Déterminer une équation de la hauteur $\mathscr{D}$ issue de A.
Déterminer les coordonnées de l'orthocentre de ABC.

$\mathscr{D}$ est la hauteur du triangle ABC issue de A donc $\mathscr{D}$ est la droite passant par A et de vecteur normal $\overrightarrow{BC}$.

$M(x;y)\in\mathscr{D} \Leftrightarrow \overrightarrow{AM}.\overrightarrow{BC}=0$

Or, $\overrightarrow{AM}\begin{pmatrix} x-2 \\ y \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{BC}\begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}$

$M(x;y)\in\mathscr{D} \Leftrightarrow -1(x-2)+3y=0$

$M(x;y)\in\mathscr{D} \Leftrightarrow -x+3y+2=0$

$\mathscr{D}$: $-x+3y+2=0$

$\mathscr{D}'$ est la hauteur du triangle ABC issue de B donc $\mathscr{D}'$ est la droite passant par B et de vecteur normal $\overrightarrow{AC}$.

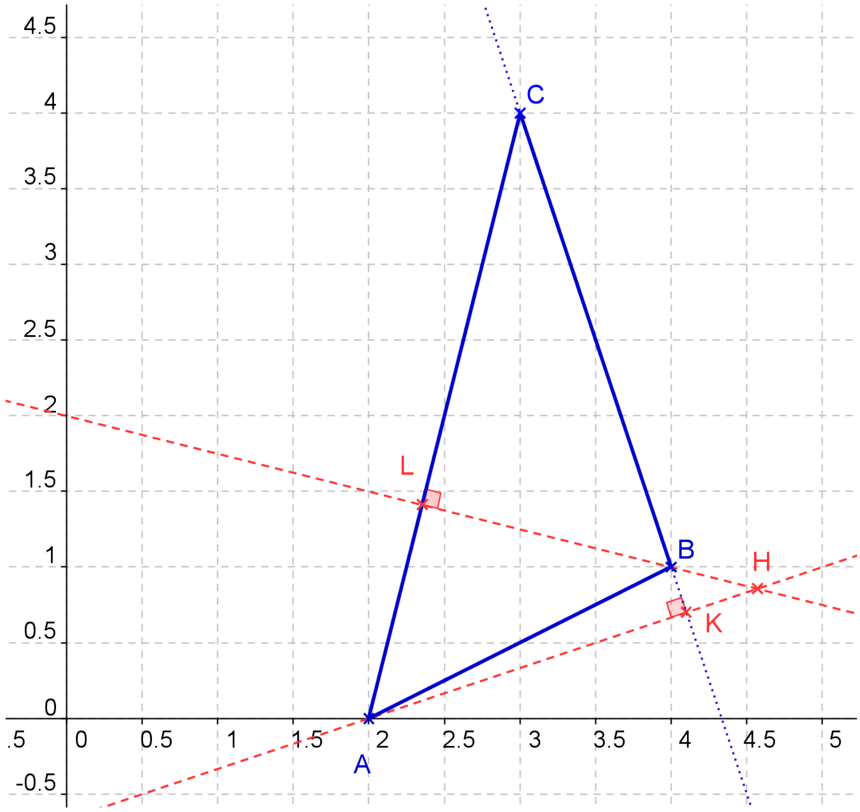
$M(x;y)\in\mathscr{D}' \Leftrightarrow \overrightarrow{BM}.\overrightarrow{AC}=0$

Or, $\overrightarrow{BM}\begin{pmatrix} x-4 \\ y-1 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}$

$M(x;y)\in\mathscr{D}' \Leftrightarrow 1(x-4)+4(y-1)=0$

$M(x;y)\in\mathscr{D}' \Leftrightarrow x+4y-8=0$

$\mathscr{D}'$: $x+4y-8=0$



L'orthocentre H du triangle ABC est le point d'intersection des droites $\mathscr{D}$ et $\mathscr{D}'$.

$$\begin{cases} -x+3y+2=0 \\ x+4y-8=0 \end{cases}$$

On obtient en additionnant les équations membre à membre:

$7y-6=0$

$7y=6$

$y=\dfrac{6}{7}$

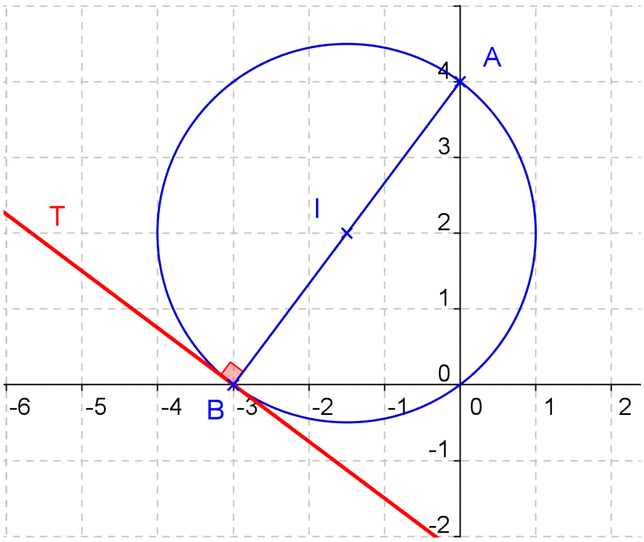
et, $x=3y+2=3\times\dfrac{6}{7}+2=\dfrac{18}{7}+\dfrac{14}{7}=\dfrac{32}{7}$

$H\left(\dfrac{32}{7};\dfrac{6}{7}\right)$

Exercice 6

On donne les points A(0;4), B(-3; 0).

1. Donner une équation du cercle de diamètre [AB].
2. Déterminer une équation de la tangente T à $\mathscr{C}$ au point B.



1. Le cercle de diamètre [AB] est l'ensemble des points $M(x;y)$ tels que $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB}=0$.

$\overrightarrow{MA}\begin{pmatrix}-x\\4-y\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{MB}\begin{pmatrix}-3-x\\-y\end{pmatrix}$

$\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB}=0 \Leftrightarrow -x(-3-x)-y(4-y)=0$
$\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB}=0 \Leftrightarrow 3x+x^2-4y+y^2=0$
Donc, une équation du cercle de diamètre [AB] est : $x^2+y^2+3x-4y=0$

2. La tangente au cercle de diamètre [AB] en B est la droite passant par B et de vecteur normal $\overrightarrow{AB}$.

$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-3\\-4\end{pmatrix}$
$M(x;y)\in T \Leftrightarrow \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BM}=0$
Or $\overrightarrow{BM}\begin{pmatrix}x+3\\y\end{pmatrix}$
$M(x;y)\in T \Leftrightarrow -3(x+3)-4y=0$
$M(x;y)\in T \Leftrightarrow -3x-4y-9=0$

$T: 3x+4y+9=0$

Exercice 7

Déterminer le lieu des points d'équation donnée:
a. $x^2-2x+y^2-6y-6=0$
b. $x^2+y^2+4y+8=0$
c. $x^2+10x+y^2-2y+22=0$

a. $x^2-2x+y^2-6y-6=0$
$(x-1)^2-1+(y-3)^2-9-6=0$
$(x-1)^2+(y-3)^2=16=4^2$
C'est l'équation d'un cercle de centre $I(1;3)$ et de rayon 4.

b. $x^2+y^2+4y+8=0$
$x^2+(y+2)^2-4+8=0$
$x^2+(y+2)^2=-4$
Il s'agit de l'ensemble vide.

c. $x^2+10x+y^2-2y+22=0$
$(x+5)^2-25+(y-1)^2-1+22=0$
$(x+5)^2+(y-1)^2=4=2^2$
C'est l'équation d'un cercle de centre $I(-5;1)$ et de rayon 2.

Exercice 8

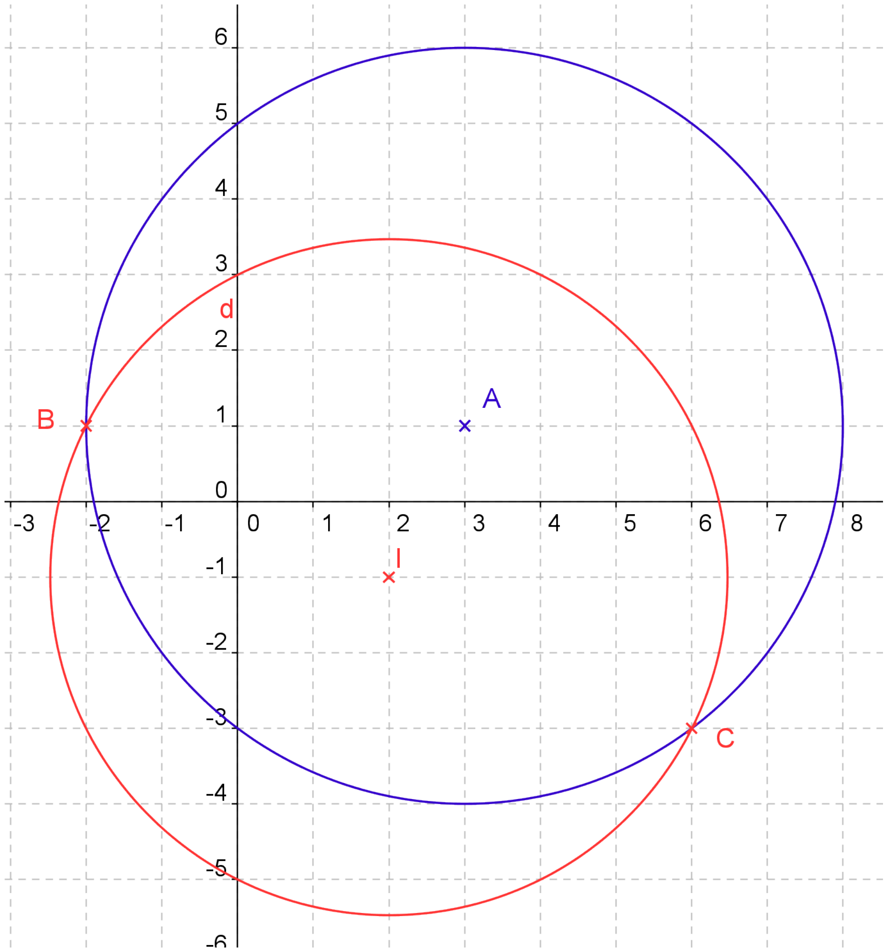
On considère le point A(3;1).
1. Écrire une équation du cercle $\mathscr{C}$ de centre A et de rayon 5.
2. Soit C le point de coordonnées (1; -3).
a. Déterminer une équation de l'ensemble $\mathscr{E}$ des points M du plan tels que MA²+MC²=50.
b. Déterminer cet ensemble et le tracer.
c. Déterminer les points d'intersection de $\mathscr{E}$ et de $\mathscr{C}$.

1. $M(x;y)\in\mathscr{C} \Leftrightarrow AM=5 \Leftrightarrow AM^2=25$
$M(x;y)\in\mathscr{C} \Leftrightarrow (x-3)^2+(y-1)^2=25$
$M(x;y)\in\mathscr{C} \Leftrightarrow x^2+y^2-6x-2y-15=0$ (en bleu sur le dessin)

2. a. $M(x;y)$ $\qquad \overrightarrow{MA}\begin{pmatrix}3-x\\1-y\end{pmatrix}$ $\qquad \overrightarrow{MC}\begin{pmatrix}1-x\\-3-y\end{pmatrix}$

$MA^2+MC^2=50$
$\Leftrightarrow (3-x)^2+(1-y)^2+(1-x)^2+(-3-y)^2=0$
$\Leftrightarrow 9-6x+x^2+1-2y+y^2+1-2x+x^2+9+6y+y^2-50=0$
$\Leftrightarrow 2x^2+2y^2-8x+4y-30=0$
$\mathscr{C}$: $x^2+y^2-4x+2y-15=0$

b. $x^2+y^2-4x+2y-15=0$
$\Leftrightarrow (x-2)^2-4+(y+1)^2-1-15=0$
$\Leftrightarrow (x-2)^2+(y+1)^2=20$
$\mathscr{E}$ est le cercle de centre $I(2;-1)$ et de rayon $\sqrt{20}=2\sqrt{5}$ (en rouge sur le dessin)



c. $\begin{cases} x^2+y^2-6x-2y-15=0 \\ x^2+y^2-4x+2y-15=0 \end{cases}$

On soustrait membre à membre les deux équations, on obtient :

$-2x-4y=0$

Donc, $x=-2y$

On remplace dans la première équation, on obtient :

$(-2y)^2+y^2-6(-2y)-2y-15=0$

$4y^2+y^2+12y-2y-15=0$

$5y^2+10y-15=0$

$y^2+2y-3=0$

$\Delta=2^2-4\times1\times(-3)=4+12=16$

$y_1=\dfrac{-2-4}{2}=-3$ et $y_2=\dfrac{-2+4}{2}=1$.

Si $y_1=-3$ alors $x_1=-2\times(-3)=6$

Si $y_2=1$ alors $x_2=-2\times1=-2$

$\mathscr{C}$ et $\mathscr{E}$ ont deux points d'intersection $B(-2;1)$ et $C(6;-3)$

Exercice 9

On se propose de résoudre dans ℝ l'équation : $\frac{\sqrt{3}}{2}\cos x-\frac{1}{2}\sin x=\frac{1}{2}$

1. Première méthode :

a) Déterminer un nombre réel α tel que $\cos\alpha=\frac{\sqrt{3}}{2}$ et $\sin\alpha=\frac{1}{2}$.

b) En transformant l'écriture du premier membre, montrer que l'équation est équivalente à une équation du type $\cos X=a$

c) Résoudre alors l'équation.

2. Deuxième méthode :
$(O;\vec{i},\vec{j})$ est un repère orthonormal du plan. On pose $X=\cos x$ et $Y=\sin x$
$M(X;Y)$ est un point d'intersection du cercle d'équation : $X^2+Y^2=1$ et de la droite d'équation : $\frac{\sqrt{3}}{2}X-\frac{1}{2}Y+\frac{1}{2}=0$

a) Résoudre le système :
$$\begin{cases} X^2+Y^2=1 \\ \sqrt{3}X-Y-1=0 \end{cases}$$
b) Résoudre alors l'équation proposée.

1. a) Pour $\alpha=\frac{\pi}{6}$, on a $\cos\frac{\pi}{6}=\frac{\sqrt{3}}{2}$ et $\sin\frac{\pi}{6}=\frac{1}{2}$.

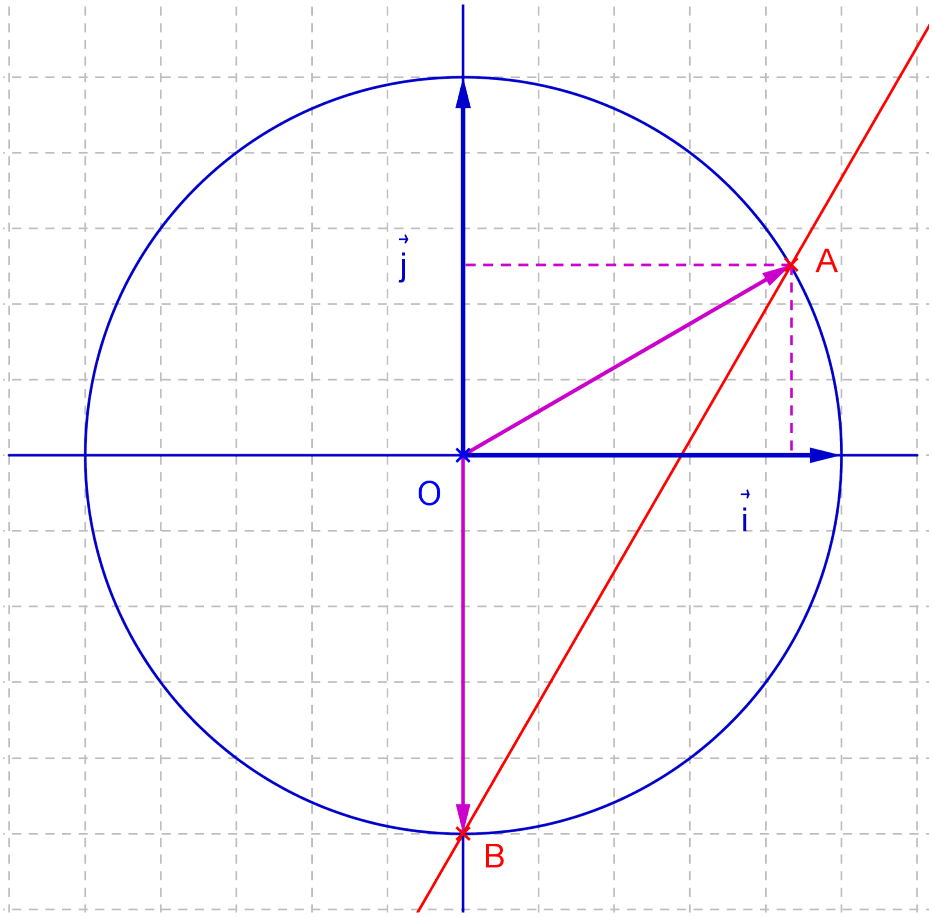
b) $\frac{\sqrt{3}}{2}\cos x-\frac{1}{2}\sin x=\frac{1}{2}$

$\Leftrightarrow \cos\frac{\pi}{6}\cos x-\sin\frac{\pi}{6}\sin x=\frac{1}{2} \Leftrightarrow \cos\left(x+\frac{\pi}{6}\right)=\frac{1}{2}$

c) $\cos\left(x+\frac{\pi}{6}\right)=\frac{1}{2} \Leftrightarrow \cos\left(x+\frac{\pi}{6}\right)=\cos\frac{\pi}{3}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=\frac{\pi}{6}+2k\pi \\ \text{ou} \\ x=\frac{-\pi}{2}+2k\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\frac{\pi}{6}+2k\pi \\ \text{ou} \\ x=\frac{-\pi}{2}+2k\pi \end{cases}$$

2.



a) $\begin{cases} X^2+Y^2=1 \\ \sqrt{3}X-Y-1=0 \end{cases}$

$\sqrt{3}X-Y-1=0$
Donc, $Y=\sqrt{3}X-1$

Dans la première équation, on obtient :
$X^2+Y^2=1$
$X^2+(\sqrt{3}X-1)^2=1$
$X^2+3X^2-2\sqrt{3}X+1=1$
$4X^2-2\sqrt{3}X=0$
$4X\left(X-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=0$
$4X=0$ ou $X-\frac{\sqrt{3}}{2}=0$
Pour $X_1=0$ alors $Y_1=-1$
Pour $X_2=\frac{\sqrt{3}}{2}$ alors $Y_2=\frac{3}{2}-1=\frac{1}{2}$.
Le cercle et la droite ont deux points d'intersection : $A\left(\frac{\sqrt{3}}{2};\frac{1}{2}\right)$ et $B(0;-1)$.

b) Pour A : $\cos x=\frac{\sqrt{3}}{2}$ et $\sin x=\frac{1}{2}$ donc $x=\frac{\pi}{6}+2k\pi$.

Pour B : $\cos x=0$ et $\sin x=-1$ donc $x=\frac{-\pi}{2}+2k\pi$

On obtient : $\begin{cases} x=\frac{\pi}{6}+2k\pi \\ \text{ou} \\ x=\frac{-\pi}{2}+2k\pi \end{cases}$