Exercices Fiche 2

Exercice 1

Soit MNP un triangle tel que M(-1;2), N(3;1) et P(2;4).
1. Déterminer une équation de la hauteur $\mathscr{D}$ issue de M.
2. Déterminer une équation de la hauteur $\mathscr{D}'$ issue de N.
3. Déterminer les coordonnées de l'orthocentre du triangle MNP.

Exercice 2

Soient les points A(10;7) et B(4;-1).
1. Donner une équation du cercle $\mathscr{C}$ de diamètre [AB].
2. Soit la droite $\mathscr{D}$ d'équation $3x-2y+7=0$.
Déterminer l'équation de la droite d perpendiculaire à la droite $\mathscr{D}$ passant par le point B.

Exercice 3

Déterminer et tracer , lorsqu'il est non vide, le lieu des points d'équation donnée.
E_1: $6x-2y-4=0$.
E_2 : $x^2-2x+y^2-6y-6=0$.
E3 : $x^2+10x+y^2-2y+28=0$.

Exercice 4

1. Donner les valeurs exactes de $\cos\frac{3\pi}{4}$ et $\sin\frac{3\pi}{4}$.

2. Donner les valeurs exactes de $\cos\frac{2\pi}{3}$ et $\sin\frac{2\pi}{3}$.

3. En déduire les valeurs exactes de $\cos\frac{17\pi}{12}$ et $\sin\frac{17\pi}{12}$.

Exercice 5

On considère l'équation :

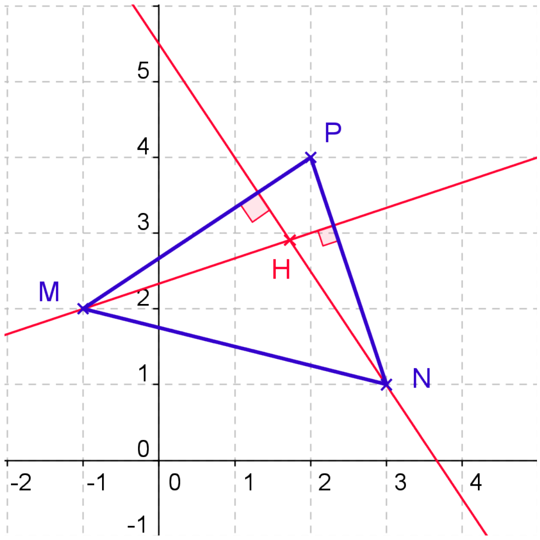
$$(E): \sin x+\cos x=\frac{\sqrt{6}}{2}$$

1. Déterminer des nombres réels a et α tels que pour tout nombre réel x on ait : $a\cos(x-\alpha)=\sin x+\cos x$
2. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation (E).

CORRECTION

Exercice 1

Soit MNP un triangle tel que M(-1;2), N(3;1) et P(2;4).
1. Déterminer une équation de la hauteur $\mathscr{D}$ issue de M.
2. Déterminer une équation de la hauteur $\mathscr{D}'$ issue de N.
3. Déterminer les coordonnées de l'orthocentre du triangle MNP.



1. $\mathscr{D}$ est la droite passant par M et de vecteur normal $\overrightarrow{NP}$.

$\overrightarrow{NP}\begin{pmatrix}2-3\\4-1\end{pmatrix}$ $\quad$ $\overrightarrow{NP}\begin{pmatrix}-1\\3\end{pmatrix}$

$K(x;y)\in\mathscr{D} \Leftrightarrow \overrightarrow{MK}.\overrightarrow{NP}=0$

Or, $\overrightarrow{MK}\begin{pmatrix}x+1\\y-2\end{pmatrix}$

$K(x;y)\in\mathscr{D} \Leftrightarrow -1(x+1)+3(y-2)=0$

$K(x;y)\in\mathscr{D} \Leftrightarrow -x-1+3y-6=0$

$\mathscr{D}$: $-x+3y-7=0$

2. $\mathscr{D}'$ est la droite passant par N et de vecteur normal $\overrightarrow{MP}$.

$\overrightarrow{MP}\begin{pmatrix}2-(-1)\\4-2\end{pmatrix}$ $\quad$ $\overrightarrow{MP}\begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix}$

$K(x;y)\in\mathscr{D}' \Leftrightarrow \overrightarrow{NK}.\overrightarrow{MP}=0$

Or, $\overrightarrow{NK}\begin{pmatrix}x-3\\y-1\end{pmatrix}$

$K(x;y)\in\mathscr{D}' \Leftrightarrow 3(x-3)+2(y-1)=0$

$K(x;y)\in\mathscr{D}' \Leftrightarrow 3x-9+2y-2=0$

$\mathscr{D}'$: $3x+2y-11=0$

3. L'orthocentre H du triangle MNP est le point d'intersection des hauteurs $\mathscr{D}$ et $\mathscr{D}'$.

$$\begin{cases}-x+3y-7=0\\ 3x+2y-11=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}-3x+9y-21=0\\ 3x+2y-11=0\end{cases}$$

On ajoute les équations membre à membre :

$$11y-32=0$$

$$y=\frac{32}{11}$$

$$-x+3\times\frac{32}{11}-7=0$$

$$x=\frac{96}{11}-7$$

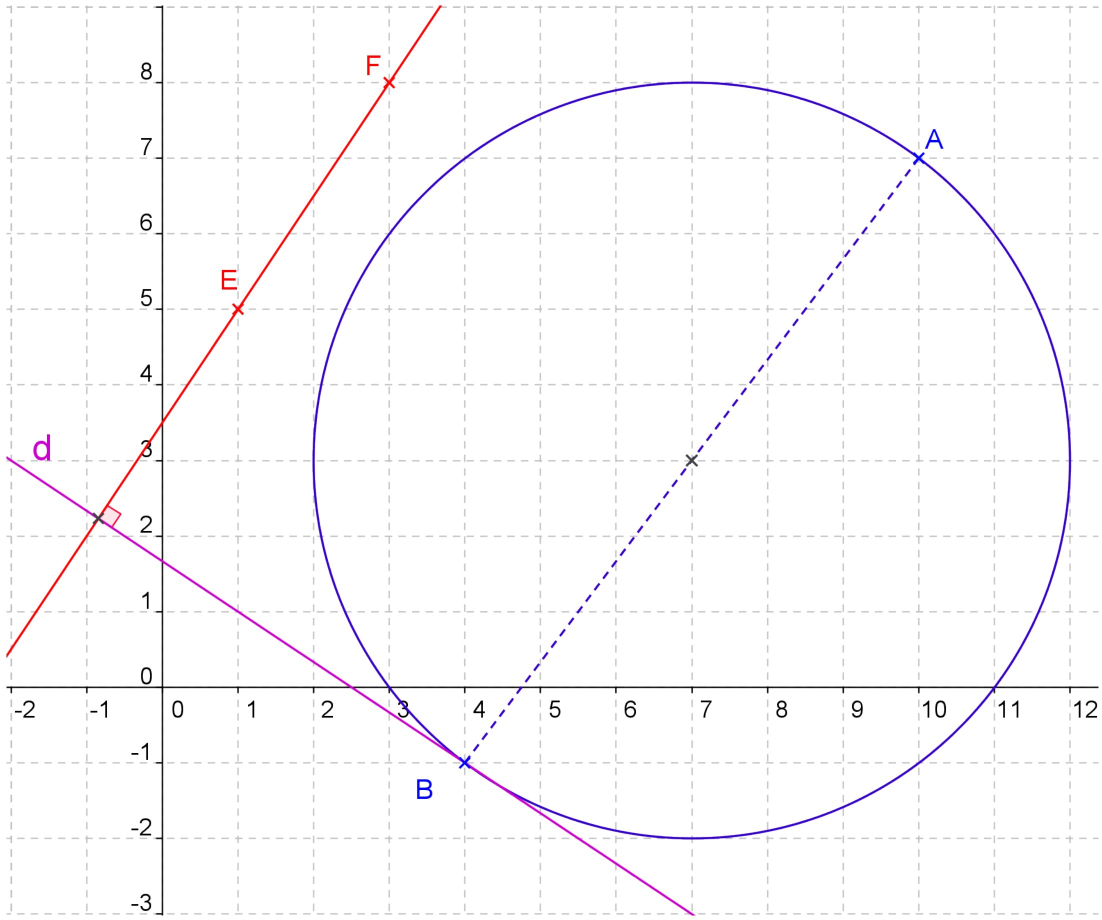
$$x=\frac{96}{11}-\frac{77}{11}$$

$$x=\frac{19}{11}$$

Donc, $H\left(\frac{19}{11};\frac{32}{11}\right)$

Exercice 2

Soients les points A(10;7) et B(4;-1).
1. Donner une équation du cercle $\mathscr{C}$ de diamètre [AB].
2. Soit la droite $\mathscr{D}$ d'équation $3x-2y+7=0$.
Déterminer l'équation de la droite d perpendiculaire à la droite $\mathscr{D}$ passant par le point B.



1. $\mathscr{C}$ est le cercle de diamètre [AB].

$M(x;y)\in\mathscr{C} \Leftrightarrow \overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB}=0$

Or, $\overrightarrow{MA}\begin{pmatrix}10-x\\7-y\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{MB}\begin{pmatrix}4-x\\-1-y\end{pmatrix}$.

$M(x;y)\in\mathscr{C} \Leftrightarrow (10-x)(4-x)+(7-y)(-1-y)=0$

$M(x;y)\in\mathscr{C} \Leftrightarrow 40-4x-10x+x^2-7-7y+y+y^2=0$

$M(x;y)\in\mathscr{C} \Leftrightarrow x^2+y^2-14x-6y+33=0$

$\mathscr{C}$: $x^2+y^2-14x-6y+33=0$

Remarque :

$\mathscr{C}$: $(x-7)^2-49+(y-3)^2-9+33=0$

$\mathscr{C}$: $(x-7)^2+(y-3)^2=25$

Donc $\mathscr{C}$ est le cercle de centre $I(7;3)$ et de rayon 5.

2. $\mathscr{D}$: $3x-2y+7=0$

$\vec{u}\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de $\mathscr{D}$ donc c'est un vecteur normal à d .

$M(x;y)\in\mathscr{C} \Leftrightarrow \overrightarrow{BM}.\vec{u}=0$

Or, $\overrightarrow{BM}\begin{pmatrix}x-4\\y+1\end{pmatrix}$

$M(x;y)\in\mathscr{C} \Leftrightarrow 2(x-4)+3(y+1)=0$

$M(x;y)\in\mathscr{C} \Leftrightarrow 2x-8+3y+3=0$

$d: 2x+3y-5=0$

Remarque :

$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}4-10\\-1-7\end{pmatrix}$ $\qquad$ $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-6\\-8\end{pmatrix}$ $\qquad$ $\vec{u}\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}$

$(-6)\times3-(-8)\times2=-18+16=-2\neq0$

Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\vec{u}$ ne sont pas colinéaires donc d n'est pas la tangente au cercle $\mathscr{C}$ en B.

Pour tracer la droite $\mathscr{D}$: $3x-2y+7=0$, on détermine les coordonnées de deux points sur cette droite, ici $E(1;5)$ et $F(3;8)$.

Exercice 3

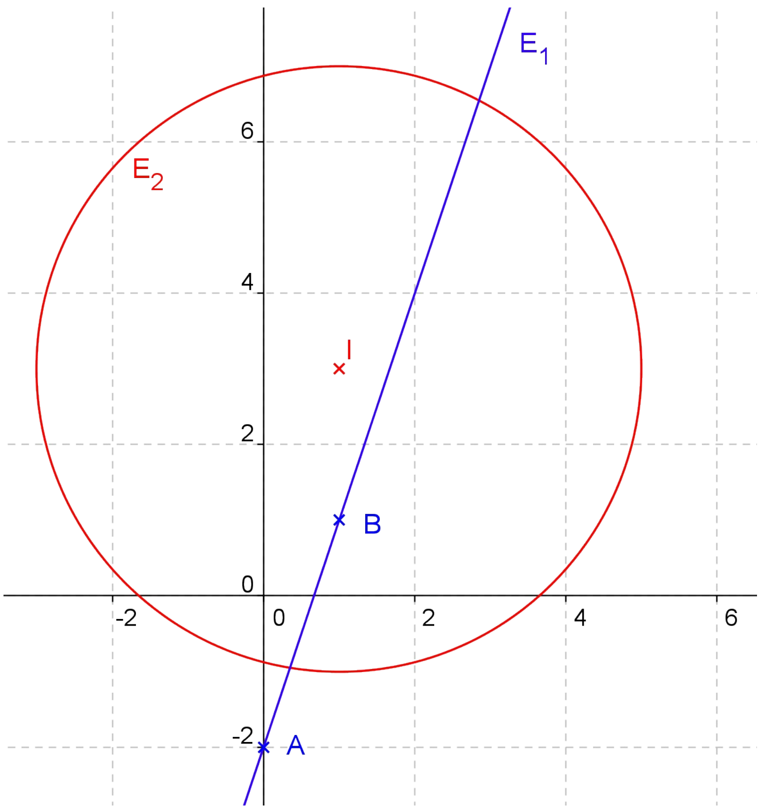
Déterminer et tracer , lorsqu'il est non vide, le lieu des points d'équation donnée.
E_1: $6x-2y-4=0$.
E_2 : $x^2-2x+y^2-6y-6=0$.
E3 : $x^2+10x+y^2-2y+28=0$.

E_1: $6x-2y-4=0$.

On a une équation cartésienne d'une droite du plan et $y=3x-2$ est l'équation réduite de cette droite.
$A(0;-2)$ et $B(1;1)$ appartiennent à cette droite.

E_2 : $x^2-2x+y^2-6y-6=0$.
$(x-1)^2-1+(y-3)^2-9-6=0$
$(x-1)^2+(y-3)^2=16$
E_2 est le cercle de centre $I(1;3)$ et de rayon 4.

E3 : $x^2+10x+y^2-2y+28=0$.
$(x+5)^2-25+(y-1)^2-1+28=0$
$(x+5)^2+(y-1)^2=-2<0$
E_3 est l'ensemble vide.



Exercice 4

1. Donner les valeurs exactes de $\cos\frac{3\pi}{4}$ et $\sin\frac{3\pi}{4}$.

2. Donner les valeurs exactes de $\cos\frac{2\pi}{3}$ et $\sin\frac{2\pi}{3}$.

3. En déduire les valeurs exactes de $\cos\frac{17\pi}{12}$ et $\sin\frac{17\pi}{12}$.

1. $\cos\frac{3\pi}{4}=\cos\left(\pi-\frac{\pi}{4}\right)=-\cos\frac{\pi}{4}=-\frac{\sqrt{2}}{2}$

$\sin\frac{3\pi}{4}=\sin\left(\pi-\frac{\pi}{4}\right)=\sin\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}$

2. $\cos\frac{2\pi}{3}=\cos\left(\pi-\frac{\pi}{3}\right)=-\cos\frac{\pi}{3}=-\frac{1}{2}$

$\sin\frac{2\pi}{3}=\sin\left(\pi-\frac{\pi}{3}\right)=\sin\frac{\pi}{3}=\frac{\sqrt{3}}{2}$

3. $\frac{3\pi}{4}+\frac{2\pi}{3}=\frac{9\pi+8\pi}{12}=\frac{17\pi}{12}$

$\cos\frac{17\pi}{12}=\cos\left(\frac{3\pi}{4}+\frac{2\pi}{3}\right)=\cos\frac{3\pi}{4}\cos\frac{2\pi}{3}-\sin\frac{3\pi}{4}\sin\frac{2\pi}{3}$

$\cos\frac{17\pi}{12}=-\frac{\sqrt{2}}{2}\times\left(-\frac{1}{2}\right)-\frac{\sqrt{2}}{2}\times\frac{\sqrt{3}}{2}$

$\cos\frac{17\pi}{12}=\frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}$

$\sin\frac{17\pi}{12}=\sin\left(\frac{3\pi}{4}+\frac{2\pi}{3}\right)=\sin\frac{3\pi}{4}\cos\frac{2\pi}{3}+\cos\frac{3\pi}{4}\sin\frac{2\pi}{3}$

$\sin\frac{17\pi}{12}=\frac{\sqrt{2}}{2}\times-\frac{1}{2}+\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\times\frac{\sqrt{3}}{2}$

$\sin\frac{17\pi}{12}=\frac{-\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}$

Exercice 5

On considère l'équation :

$(E):\sin x+\cos x=\frac{\sqrt{6}}{2}$

1. Déterminer des nombres réels a et α tels que pour tout nombre réel x on ait : $a cos(x-\alpha)=\sin x+\cos x$
2. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation (E).

1. $\cos(x-\alpha)=\cos x\sin\alpha+\sin x\cos\alpha$

$a\cos(x-\alpha)=a\cos x\sin\alpha+a\sin x\cos\alpha$

Pour avoir pour tout réel x, $a cos(x-\alpha)=\sin x+\cos x$, il suffit de choisir :

$a\cos\alpha=1$ et $a\sin\alpha=1$

Donc,

$a^2\cos^2\alpha+a^2\sin^2\alpha=1^2+1^2=2$

$a^2(\cos^2\alpha+\sin^2\alpha)=2$

$a^2=2$

On peut prendre $a=\sqrt{2}$ (ou $a=-\sqrt{2}$)

Alors, $\cos\alpha=\frac{\sqrt{2}}{2}$ et $\sin\alpha=\frac{\sqrt{2}}{2}$.

On prend $\alpha=\frac{\pi}{4}$

On obtient $\cos x+\sin x=\sqrt{2}\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)$.

2. $(E):\sin x+\cos x=\frac{\sqrt{6}}{2}$

$\Leftrightarrow \sqrt{2}\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\sqrt{6}}{2}$

$\Leftrightarrow \cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\sqrt{3}}{2}=\cos\frac{\pi}{6}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x-\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{6}+2k\pi \\ \text{ou} \\ x-\frac{\pi}{4}=-\frac{\pi}{6}+2k\pi \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=\frac{5\pi}{12}+2k\pi \\ \text{ou} \\ x=\frac{\pi}{12}+2k\pi \end{cases}$$