Dérivation

1. Le nombre dérivé.

1.1. Définition.

Définition: Soit f une fonction définie sur un intervalle contenant a.

La fonction f est dérivable en a si $\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$ tend vers un réel l quand h tend vers 0. Il est alors appelé nombre dérivé de f en a et noté $f'(a)$.

Notations:

– Pour traduire que $\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$ tend vers $f'(a)$ quand h tend vers 0, on note $f'(a) = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$.

– On peut également noté Δx pour désigner un accroissement de la variable x et Δf l'accroissement des images correspondantes.
Ainsi de $x=a$ à $x=a+h$, on aura:
$\Delta x = (a+h) - a = h$ et $\Delta f = f(a+h)-f(a)$.
Par suite: $\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}=\dfrac{\Delta f}{\Delta x}$ et $f'(a)=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{\Delta f}{\Delta x}$.

Exemple: La distance parcourue par un point mobile M à l'instant t ($t \geq 0$) est $d(t)=t^2$ où t est exprimée en seconde et $d(t)$ en mètre.
Nous allons calculer $d'(3)$.

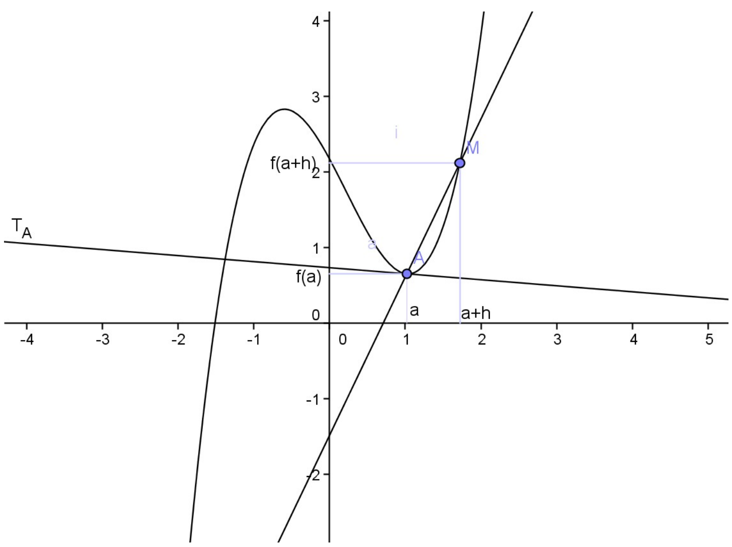
$$\frac{d(3+h)-d(3)}{h}=\frac{(3+h)^2-3^2}{h}=\frac{9+6h+h^2-9}{h}=\frac{6h+h^2}{h}=6+h.$$

$$\lim_{h\to 0}\frac{d(3+h)-d(3)}{h}=\lim_{h\to 0} 6+h=6.$$

Donc $d'(3)=6$.
$d'(3)$ représente la vitesse instantanée du point mobile à la troisième seconde.

1.2. Tangente à une courbe.

Soit $\mathscr{C}$ la courbe représentative de f dans un repère (O; $\vec{i}$, $\vec{j}$) et les points A et M de $\mathscr{C}$ d'abscisses respectives a et $a+h$.



$\frac{f(a+h)-f(a)}{h}=\frac{\Delta f}{\Delta x}$ représente alors le coefficient directeur de la droite (AM).

Dire que $\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$ tend vers $f'(a)$ quand h tend vers 0 signifie que le coefficient directeur de la droite (AM) tend vers $f'(a)$.
Autrement dit, quand M tend vers A sur la courbe, les droites (AM) tendent vers une position limite: celle de la droite T_A passant par A et de coefficient directeur $f'(a)$.

Définition: Soit f une fonction dérivable en a et $\mathscr{C}$ sa courbe représentative.
La droite passant par $A(a; f(a))$ et de coefficient directeur $f'(a)$ est appelée la tangente à la courbe $\mathscr{C}$ au point A.

Déterminons une équation de la tangente à $\mathscr{C}$ au point $A(a; f(a))$.
Notons T_A la tangente à $\mathscr{C}$ au point d'abscisse $A(a; f(a))$.
T_A étant une droite, elle a une équation du type $y=mx+p$.
D'après la définition, on sait que $m=f'(a)$.
On sait que A appartient à T_A, on a donc:
$f(a) = f'(a)\times a + p$. Par conséquent, $p=f(a)-f'(a)a$.
Par suite, on a $y=f'(a)x+f(a)-f'(a)\times a$.
Donc T_A a pour équation $y=f'(a)(x-a)+f(a)$.

T_A a pour équation $y=f'(a)(x-a)+f(a)$.

Exemple: Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2$.
Déterminons l'équation de la tangente à la courbe représentative de f au point d'abscisse 3.
Nous avons déterminé à l'exemple vu dans le I.1 que $f'(3) = 6$.
On a de plus $f(3)=9$.
D'où la tangente a pour équation: $y=6(x-3)+9 = 6x-18+9=6x-9$.
d'où la tangente a pour équation: $y=6x-9$.

2. Approximation affine d'une fonction en a.

Si f est dérivable en a, la courbe $\mathscr{C}$ admet une tangente T_A au point $A(a; f(a))$.
On admettra que, parmi les droites passant par A, la tangente T_A est celle qui approche le mieux la courbe $\mathscr{C}$ autour du point A.
Comme T_A est la représentation graphique de la fonction $x \mapsto f'(a)(x-a)+f(a)$ on dit que la fonction $x \mapsto f'(a)(x-a)+f(a)$ est la meilleure approximation affine de la fonction $h \mapsto f(a+h)$ au voisinage de 0.

Bilan: Si f est dérivable en a, alors $f(a+h) \approx f(a) + f'(a)h$ lorsque h est proche de 0.

Exemple: Soit f la fonction définie par $f(x)=x^2$.
On veut déterminer l'approximation de $f(1+h)$ pour h proche de 0.
Déterminons, pour cela, $f'(1)$.

$$\frac{f(1+h)-f(1)}{h}=\frac{(1+h)^2-1^2}{h}=\frac{1+2h+h^2-1}{h}=\frac{2h+h^2}{h}=2+h$$

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}=\lim_{h\to 0} 2+h=2$$

D'où $f'(1)=2$.
$f(1)=1$
$f'(1)h+f(1)=2h+1$.
Par suite, $f(1+h)\approx 2h+1$ pour h proche de 0.
Cela nous permet de calculer facilement (surtout quand on n'a pas de calculatrice), une approximation de $1{,}024^2$.
On a $1{,}024^2 \approx 2\times 0{,}024 + 1$
D'où $1{,}024^2 \approx 1{,}048$.

3. Fonction dérivée.

3.1. Définition.

Définition: Soit D un intervalle de $\mathbb{R}$ ou une réunion d'intervalles. On dit qu'une fonction f est dérivable sur D si elle est dérivable en tout réel a de D.

Dans ce cas, la fonction qui à tout a de D associe le nombre dérivé $f'(a)$ de f en a est appelé fonction dérivée de f.

On la note: $f' : D \rightarrow \mathbb{R}$
$a \mapsto f'(a)$

3.2. Dérivées des fonctions usuelles.

- *Fonctions constantes.*

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=k$, où k est un réel.
f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x, $f'(x)=0$.

Justification: Pour tout a appartenant à $\mathbb{R}$, et pour tout h non nul,
$$\frac{f(a+h)-f(a)}{h}=\frac{k-k}{h}=0.$$
donc $\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}=\lim\limits_{h\to 0} 0=0$.
Par suite, pour tout a appartenant à $\mathbb{R}$, $f'(a)=0$.

- *Fonction affines.*

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=mx+p$.
f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x, $f'(x)=m$.

Justification: Pour tout a appartenant à $\mathbb{R}$, et pour tout h non nul,
$$\frac{f(a+h)-f(a)}{h}=\frac{m(a+h)-ma}{h}=\frac{mh}{h}=m.$$
donc $\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}=\lim\limits_{h\to 0} m=m$.
Par suite, pour tout a appartenant à $\mathbb{R}$, $f'(a)=m$.

Conséquence: La dérivée de $f: x \mapsto x$ sur $\mathbb{R}$ est la fonction f' définie sur $\mathbb{R}$ par $f'(x)=1$.

- ***Fonctions puissances.***

Soit n un nombre entier supérieur ou égal à 2.
Soit f la fonction définie sur ℝ par $f(x)=x^n$
f est dérivable sur ℝ et pour tout réel x, $f'(x)=nx^{n-1}$.

Cette propriété sera admise.
Exemples:

- soit f définie sur ℝ par $f(x)=x^2$, $f'(x)=2x$.
- soit f définie sur ℝ par $f(x)=x^3$, $f'(x)=3x^2$.

- ***Fonction inverse.***

Soit f la fonction définie sur ℝ* par $f(x)=\frac{1}{x}$

f est dérivable sur ℝ* et pour tout réel x non nul, $f'(x)=-\frac{1}{x^2}$.

Justification: Pour tout a appartenant à ℝ*, h appartenant à ℝ* avec $a+h\neq 0$,

$$\frac{f(a+h)-f(a)}{h}=\frac{\frac{1}{a+h}-\frac{1}{a}}{h}=\frac{\frac{a-(a+h)}{a(a+h)}}{h}=\frac{-h}{h(a+h)a}=\frac{-1}{a(a+h)}.$$

$\lim_{h\to 0} a+h=a$ d'où $\lim_{h\to 0}\frac{-1}{a(a+h)}=\frac{-1}{a^2}$.

Par conséquent, $f'(a)=\frac{-1}{a^2}$.

- ***Fonction racine carrée.***

Soit f la fonction définie sur $[0;+\infty[$ par $f(x)=\sqrt{x}$.

f est dérivable sur $]0;+\infty[$ et pour tout réel $x>0$, $f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}$.

Justification: Pour a un réel positif ou nul, h un réel non nul tel que $a+h\geqslant 0$.

$$\frac{f(a+h)-f(a)}{h}=\frac{\sqrt{a+h}-\sqrt{a}}{h}=\frac{(\sqrt{a+h}-\sqrt{a})(\sqrt{a+h}+\sqrt{a})}{h(\sqrt{a+h}+\sqrt{a})}=\frac{a+h-a}{h(\sqrt{a+h}+\sqrt{a})}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{a+h}+\sqrt{a}}$$

Or $\lim_{h\to 0}\sqrt{a+h}=\sqrt{a}$, d'où $\lim_{h\to 0}\frac{1}{\sqrt{a+h}+\sqrt{a}}=\frac{1}{2\sqrt{a}}$.

Par suite, $f'(a)=\frac{1}{2\sqrt{a}}$ avec $a\neq 0$.

Attention, la fonction racine carrée est définie sur ℝ₊ mais pas sa dérivée.

4. Opérations sur les fonctions dérivables.

Soit D un intervalle ou une réunion d'intervalles.

4.1. Somme de fonctions.

Propriété: Soit u et v deux fonctions dérivables sur D.
Alors $u+v$ est dérivable sur D et $(u+v)' = u'+v'$.

Preuve: Soit a appartenant à D, $h \neq 0$,

$$\frac{(u+v)(a+h)-(u+v)(a)}{h} = \frac{u(a+h)-u(a)}{h} + \frac{v(a+h)-v(a)}{h} .$$

Or, $\lim_{h\to 0} \frac{u(a+h)-u(a)}{h} = u'(a)$ et $\lim_{h\to 0} \frac{v(a+h)-v(a)}{h} = v'(a)$.
Donc, pour tout a appartenant à D, $(u+v)'(a) = u'(a)+v'(a)$.

4.2. Produit de fonctions.

Propriété: soit u et v deux fonctions dérivables sur D.
Alors $u \times v$ est dérivable sur D et $(uv)' = u'v+uv'$.
En particulier, si λ est un réel, $(\lambda v)' = \lambda v'$.

Preuve: Soit a appartenant à D, $h \neq 0$.

$$\begin{aligned}\frac{uv(a+h)-uv(a)}{h} &= \frac{u(a+h)v(a+h)-u(a)v(a)}{h}\\ &= \frac{u(a+h)v(a+h)-u(a)v(a+h)+u(a)v(a+h)-u(a)v(a)}{h}\\ &= \frac{u(a+h)-u(a)}{h}v(a+h)+\frac{v(a+h)-v(a)}{h}u(a) .\end{aligned}$$

Or $\lim_{h\to 0} \frac{u(a+h)-u(a)}{h} = u'(a)$ et $\lim_{h\to 0} \frac{v(a+h)-v(a)}{h} = v'(a)$.
On admettra de plus que $\lim_{h\to 0} v(a+h) = v(a)$.
On obtient donc $(uv)'(a) = u'(a)v(a)+u(a)v'(a)$ pour tout a appartenant à D.
Soit en particulier, $(\lambda u(a))' = \lambda u'(a)+0\times u(a) = \lambda u'(a)$.

Conséquence: toute fonction polynôme est dérivable sur $\mathbb{R}$

Exemples:

1) soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 4x^3+2x+1$.
   $(x^3)' = 3x^2$ et $(x)' = 1$.
   D'où pour x appartenant à $\mathbb{R}$, $f'(x) = 4 \times 3x^2+2 \times 1 = 12x^2+2$.
2) Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = x^2\cos(x)$.
   La fonction carré et la fonction cosinus étant dérivables sur $\mathbb{R}$, la fonction g est dérivable sur $\mathbb{R}$.
   $(x^2) = 2x$ et $(\cos x)' = -\sin x$.

Donc $g'(x) = 2x \times \cos x + x^2 \times (-\sin x) = 2x\cos x - x^2 \sin x$.

4.3. Inverse d'une fonction.

Propriété: Soit v une fonction dérivable sur D, et tel que pour tout réel a de D, $v(a) \neq 0$.

Alors la fonction $\frac{1}{v}$ est dérivable sur D et $\left(\frac{1}{v}\right)' = -\frac{v'}{v^2}$.

Preuve: Soit a appartenant à D, h appartenant à ℝ tel que $v(a+h) \neq 0$.

$$\frac{\frac{1}{v(a+h)} - \frac{1}{v(a)}}{h} = \frac{v(a) - v(a+h)}{hv(a)v(a+h)} = \frac{v(a) - v(a+h)}{h} \cdot \frac{1}{v(a)v(a+h)}$$

Or $\lim\limits_{h \to 0} \frac{v(a) - v(a+h)}{h} = -v'(a)$ et $\lim\limits_{h \to 0} \frac{1}{v(a+h)v(a)} = \frac{1}{v^2(a)}$.

Par suite, $\lim\limits_{h \to 0} \frac{\frac{1}{v(a+h)} - \frac{1}{v(a)}}{h} = -\frac{v'(a)}{v^2(a)}$.

Donc $\frac{1}{v}$ est dérivable sur D avec $\left(\frac{1}{v}(x)\right)' = -\frac{v'(x)}{v^2(x)}$.

Exemple: Soit la fonction f définie par $f(x) = \frac{1}{2x-5}$.

f est définie et dérivable sur $\mathbb{R} \left\{\frac{5}{2}\right\}$.

Notons u la fonction définie sur $\mathbb{R} \left\{\frac{5}{2}\right\}$, $u(x) = 2x - 5$.

On a $u'(x) = 2$.

Par suite, pour x appartenant à $\mathbb{R} \left\{\frac{5}{2}\right\}$, $f'(x) = -\frac{2}{(2x-5)^2}$.

4.4. Quotient de fonctions.

Propriété: Soit u et v deux fonctions dérivables sur D et telles que pour tout réel a de D, $v(a) \neq 0$.

Alors, la fonction $\frac{u}{v}$ est dérivable sur D et $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$.

Preuve: On peut écrire $\frac{u}{v} = u \times \frac{1}{v}$.

En appliquant les deux propriétés précédentes, on obtient:

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \left(u \times \frac{1}{v}\right)' = u' \times \frac{1}{v} + u \times \left(\frac{1}{v}\right)' = u' \times \frac{1}{v} + u \times \frac{-v'}{v^2} = \frac{u'v - uv'}{v^2}.$$

Exemple: Soit la fonction f définie par $f(x) = \frac{4x}{x^2 - 1}$.

f est définie et dérivable sur ℝ{-1; 1}.

Notons u et v les fonctions définies sur ℝ{-1; 1} par $u(x)=4x$ et $v(x)=x^2-1$.
On a $u'(x)=4$ et $v'(x)=2x$.
On a alors pour tout x appartenant à ℝ{-1; 1},
$$f'(x)=\frac{4(x^2-1)-4x\times 2x}{(x^2-1)^2}=\frac{4x^2-4-8x^2}{(x^2-1)^2}=\frac{-4x^2-4}{(x^2-1)^2}.$$

4.5. Composée.

Propriété (admise): Soit u une fonctions dérivable sur D, a et b sont deux réels, J est l'ensemble des x tels que $ax+b$ ∈D.
Alors la fonction f définie sur J par $f(x)=u(ax+b)$ est dérivable sur J, et pour tout réel x de J, $f'(x)=au'(ax+b)$.

Exemple: Soit f la fonction définie sur [2;+∞[par $f(x)=\sqrt{3x-6}$.
Notons u la fonction définie sur [0; +∞[par $u(x)=\sqrt{x}$, u est dérivable sur]0; +∞[et $u'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}$.
On a $ax+b=3x-6$.
D'où $f'(x)=3\times\frac{1}{2\sqrt{3x-6}}=\frac{3}{2\sqrt{3x-6}}$ et f est dérivable sur]2; +∞[.

5. Sens de variation et dérivée.

5.1. Du sens de variation au signe de la dérivée.

Propriété: Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I.
1) Si f est croissante sur I, alors pour tout réel x de I, $f'(x)\geqslant 0$.
2) Si f est constante sur I, alors pour tout réel x de I, $f'(x)=0$.
3) Si f est décroissante sur I, alors pour tout réel x de I, $f'(x)\leqslant 0$.

Démonstration: nous démontrerons le 1) et 2) de la propriété ci-dessus,le 3) se démontrant comme le 1) à quelques signes prés.
Soit une fonction f dérivable sur un intervalle I.
1) Supposons que la fonction f est croissante sur I.
Soit x ∈I, h ∈ℝ* tel que $x+h$ ∈I.

- si $h>0$, $x\leqslant x+h$ donc $f(x)\leqslant f(x+h)$ et donc $\frac{f(x+h)-f(x)}{h}\geqslant 0$.
- si $h<0$, $x+h\leqslant x$ donc $f(x+h)\leqslant f(x)$ et donc $\frac{f(x+h)-f(x)}{h}\geqslant 0$.

Comme f est dérivable, $f'(x)$ est la limite de $\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ quand h tend vers 0.
Or, si l'on donne à h des valeurs proches de 0, $\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ prend des valeurs positives.
On admet alors que sa limite est positive et on a donc $f'(x)\geqslant 0$ pour tout x appartenant à I.
2) Supposons que la fonction f est constante sur I.
Soit x ∈I, h ∈ℝ* tel que $x+h$ ∈I.

$f(x+h)=f(x)$ d'où $f(x+h)-f(x)=0$ et $\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=0$.

Par conséquent, pour tout x appartenant à I, $f'(x)=0$.

5.2. Du signe de la dérivée au sens de variation.

On admettra le théorème suivant.

Théorème: Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I.
1) Si $f'(x)=0$ pour tout x appartenant à I, f est une fonction constant sur I.
2) Si $f'(x)\geqslant 0$ pour tout x appartenant à I, f est croissante sur I.
3) Si $f'(x)\leqslant 0$ pour tout x appartenant à I, f est décroissante sur I.

Application:

Étudions le sens de variation de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$par $f(x)=x^3+2x^2-7x+1$.

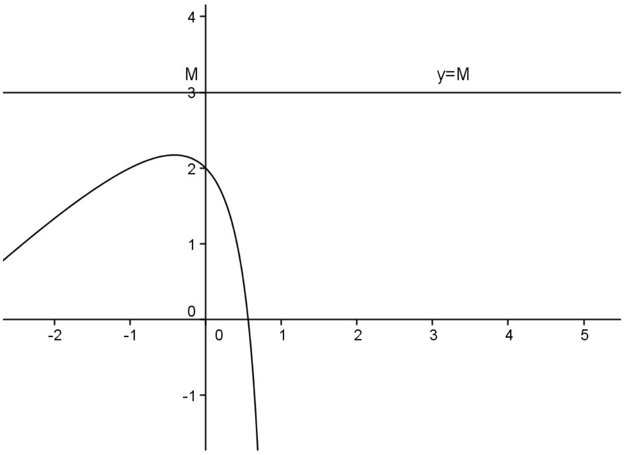
- Déterminons la dérivée de f sur $\mathbb{R}$
  f est une fonction polynôme, elle est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ et on a ,pour tout x ,
  $f'(x)=3x^2+4x-7$.
- Étudions le signe de f' .
  f' est un trinôme du second degré. Étudions le signe de $3x^2+4x-7$.
  On a $\Delta=4^2-4\times3\times(-7)=16+84=100$.
  L'équation $3x^2+4x-7=0$ admet deux racines:
  $x_1=\frac{-4+\sqrt{100}}{6}=\frac{-4+10}{6}=1$ et $x_2=\frac{-4-\sqrt{100}}{6}=\frac{-4-10}{6}=\frac{-7}{3}$.
  D'où f' est positive partout sauf entre $\frac{-7}{3}$ et 1.
- En déduire le sens de variation de f .

x	$-\infty$		$-7/3$		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$		↗	$419/3$	↘	-3	↗	

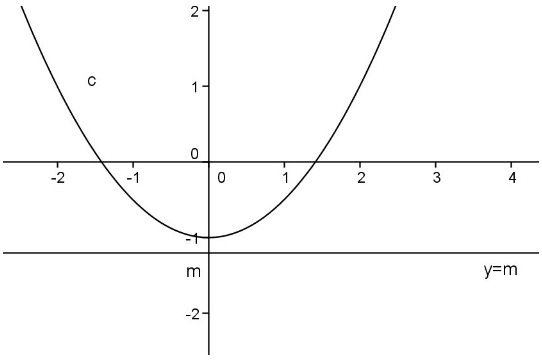
6. Majorant, minorant, extremum local.

6.1. Majorant, minorant.

Définitions: Soit f une fonction définie sur un intervalle I, m et M des réels.
Dire que M est un majorant de f sur I signifie que pour tout x de I, $f(x)\leqslant M$
Dire que m est un minorant de f sur I signifie que pour tout x de I, $f(x)\geqslant m$.

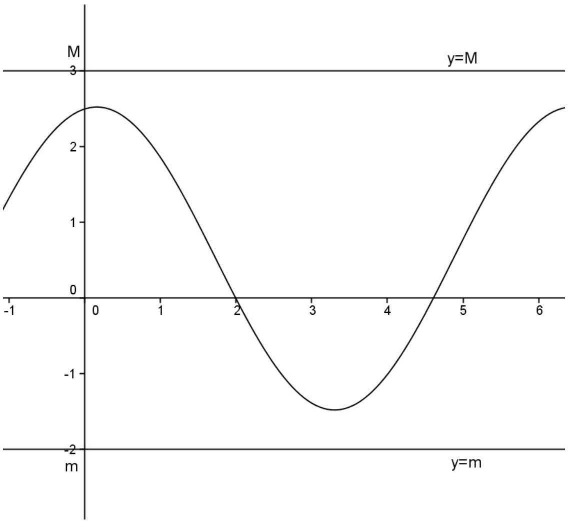


S'il existe a appartenant à I tel que $f(a)=M$, on dit alors que M est le maximum de f sur I.

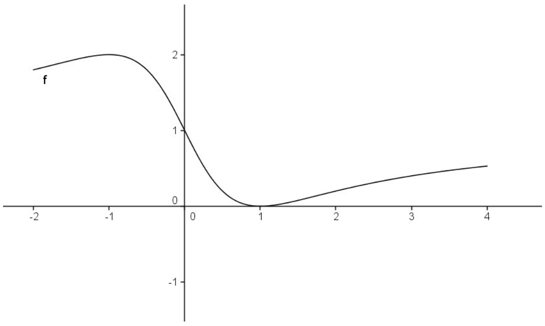


S'il existe b appartenant à I tel que $f(b)=m$, on dit alors que m est le minimum de f sur I.

Dire que f est bornée sur I signifie que f admet un majorant et un minorant sur I.



Exemple: Soit f la fonction définie sur I=[-2; 4].



-1, -2 et 0 sont des minorants de f sur I. Mais 0 est la plus petite valeur prise par f sur I, donc 0 est le minimum de f sur I. f atteint ce minimum en 1.

2 est le maximum de f sur I. Ce maximum est atteint en -1.

6.2. Extremum local et dérivées.

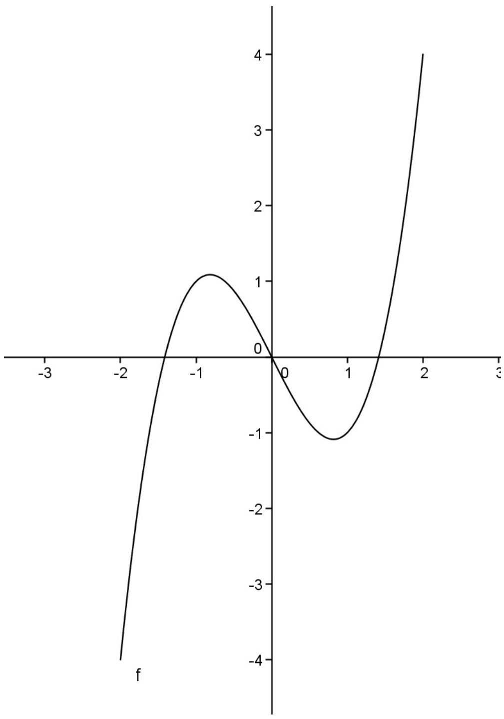
Définitions: f est une fonction définie sur un intervalle I et x_0 est un réel de I.

Dire que $f(x_0)$ est un maximum local (respectivement un minimum local) de f signifie que l'on peut trouver un intervalle ouvert J inclus dans I et contenant x_0 tel que pour tout x de J, $f(x) \leqslant f(x_0)$.

Dire que $f(x_0)$ est un extremum local signifie que $f(x_0)$ est maximum local ou un minimum local.

Exemple:

Soit f une fonction définie sur l'intervalle I=[-2; 2].



$1{,}2 = f(-0{,}8)$ est un maximum local, car pour tout x appartenant à l'intervalle]-2; 1[, $f(x) \leqslant 1{,}2$.

$-1{,}2 = f(0{,}8)$ est un minimum local, car pour tout x appartenant à l'intervalle]0; 2[, $f(x) \geqslant -1{,}2$.

$-4=f(-2)$ n'est pas un minimum local car on ne peut pas trouver d'intervalle ouvert contenu dans I et contenant -2.

Propriété:
Si une fonction f dérivable sur un intervalle I admet un extremum ou un extremum local en α et si α n'est pas une borne de I, alors $f'(\alpha)$ =0.

Preuve: Supposons qu'il s'agisse d'un maximum ou d'un maximum local en α, α n'étant pas une borne de I. C'est à dire qu'il existe un intervalle ouvert J autour de α tel que $f(\alpha)$ soit le maximum de f sur J.

$f'(\alpha)$ est la limite de $\dfrac{f(\alpha+h)-f(\alpha)}{h}$ quand h tend vers 0.

Alors pour h assez voisin de 0, $\alpha+h\in$ J et donc $f(\alpha+h)\leqslant f(\alpha)$.
De ce fait, $f(\alpha+h)-f(\alpha)\leqslant 0$.

On en déduit que si $h>0$, $\dfrac{f(\alpha+h)-f(\alpha)}{h}\leqslant 0$ et si $h<0$, $\dfrac{f(\alpha+h)-f(\alpha)}{h}\geqslant 0$.

Quand h tend vers 0, les rapports $\dfrac{f(\alpha+h)-f(\alpha)}{h}$ prennent des valeurs aussi bien positives ou nulles que négatives ou nulles. On admet alors que leur seule limite possible est 0. D'où $f'(\alpha)=0$.
On tient le même raisonnement avec un minimum.

Remarque: la réciproque de cette propriété est fausse.
Contre-exemple: $f(x)=x^3$ sur ℝ alors $f'(0)=0$, cependant $f(0)$ n'est pas un extremum local.

On admettra la propriété suivante:
Propriété: f est une fonction dérivable sur un intervalle ouvert I et x_0 un réel de I.
Si f' s'annule en x_0 en changeant de signe, alors $f(x_0)$ est un extremum local.

x	$-\infty$		x_0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$		↘	$f(x_0)$	↗	

x	$-\infty$		x_0		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$		↗	$f(x_0)$	↘	