Exercices Fiche 1

Exercice 1:

Soit f la fonction définie sur [-2; +∞[par $f(x)=\sqrt{x+2}$.
L'objectif est de déterminer, s'il existe, $f'(-1)$.

1. Montrer que pour tout réel h strictement positif,
$\frac{f(-1+h)-f(-1)}{h}=\frac{1}{\sqrt{h+1}+1}$
Indication: on utilisera une méthode classique qui consiste à multiplier en haut et en bas par la quantité conjuguée. La quantité conjuguée de $\sqrt{a}-\sqrt{b}$ est $\sqrt{a}+\sqrt{b}$, et inversement.
2. En déduire que f est dérivable en -1 et déterminer le nombre dérivé $f'(-1)$.

Exercice 2:

1. Déterminer la meilleure approximation affine de $(2+h)^2$ lorsque h est proche de 0.
2. Utiliser cette approximation pour déterminer mentalement des valeurs approchées de $1{,}98^2$ et $2{,}04^2$.

Exercice 3:

1. Déterminer la meilleure approximation affine de $\frac{-1}{3+h}$ lorsque h est proche de 0.
2. Utiliser cette approximation pour calculer mentalement des valeurs approchées de: $\frac{-1}{3{,}05}$ et $\frac{-1}{2{,}98}$.

Exercice 4:

Soit f une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que: $f(3)=2$, $f'(3)=-1$, $f'(3{,}2)=-0{,}5$.

1. Utiliser la meilleure approximation affine de f en 3 pour déterminer une valeur approchée de $f(3{,}2)$.
2. En utilisant la question précédente et la meilleure approximation affine de f en 3,2, déterminer une valeur approchée de $f(3{,}3)$.

Exercice 5:

Déterminer les domaines de dérivabilité ainsi que les fonctions dérivées des fonctions suivantes:

1. $h(x) = 2x^2 - 5x$.
2. $i(x) = \frac{x^4+3x^2-5x}{4}$
3. $j(x) = (3x + 4)(x^2 - 5)$.
4. $k(x) = \frac{1}{x}(3 + \sqrt{x})$
5. $l(x) = \frac{2x^2}{x+3}$.

Exercice 6:

Déterminer une équation de la tangente à la parabole $\mathscr{P}$ d'équation $y=-2x^2+7x-1$ au point A(1; 4).

Exercice 7:

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par: $f(x)=2x^2-3x+1$ et $\mathscr{P}$ la parabole représentant f dans le plan muni d'un repère.

1. Justifier le fait que f soit dérivable sur $\mathbb{R}$ et déterminer f'.
2. Déterminer une équation de la tangente à $\mathscr{P}$ au point d'abscisse B(0; 1).
3. Existe-t-il un point M de $\mathscr{P}$ en lequel la tangente est parallèle à la droite d'équation $y=-2x$.
4. Soit a un réel.
Déterminer une équation de la tangente Δ à la parabole $\mathscr{P}$ au point A d'abscisse a.
En déduire que la courbe $\mathscr{P}$ admet deux tangentes passant par l'origine O du repère.

CORRECTION

Exercice 1:

Soit f la fonction définie sur [-2; +∞[par $f(x)=\sqrt{x+2}$.
L'objectif est de déterminer, s'il existe, $f'(-1)$.

1. Montrer que pour tout réel h strictement positif,
$\frac{f(-1+h)-f(-1)}{h}=\frac{1}{\sqrt{h+1}+1}$
Indication: on utilisera une méthode classique qui consiste à multiplier en haut et en bas par la quantité conjuguée. La quantité conjuguée de $\sqrt{a}-\sqrt{b}$ est $\sqrt{a}+\sqrt{b}$, et inversement.
2. En déduire que f est dérivable en -1 et déterminer le nombre dérivé $f'(-1)$.

1.

$$\frac{f(-1+h)-f(-1)}{h}=\frac{\sqrt{-1+h+2}-\sqrt{-1+2}}{h}=\frac{\sqrt{h+1}-1}{h}=\frac{(\sqrt{h+1}-1)(\sqrt{h+1}+1)}{h(\sqrt{h+1}+1)}=\frac{(\sqrt{h+1})^2-1^2}{h(\sqrt{h+1}+1)}$$
$$=\frac{h+1-1}{h(\sqrt{h+1}+1)}=\frac{1}{\sqrt{h+1}+1}$$

Donc:
$$\frac{f(-1+h)-f(-1)}{h}=\frac{1}{\sqrt{h+1}+1}$$

2.

$$\lim_{h\to 0}\frac{1}{\sqrt{h+1}+1}=\frac{1}{\sqrt{1}+1}=\frac{1}{2}$$
Donc, f est dérivable en -1 et $f'(-1)=\frac{1}{2}$.

Exercice 2:

1. Déterminer la meilleure approximation affine de $(2+h)^2$ lorsque h est proche de 0.
2. Utiliser cette approximation pour déterminer mentalement des valeurs approchées de $1{,}98^2$ et $2{,}04^2$.

1. Soit f la fonction définie par $f(x)=x^2$
On veut déterminer l'approximation de $f(2+h)$ pour h proche de 0.
$f(2+h)\approx f(2)+f'(2)h$ pour h proche de 0.
Déterminons $f(2)$ et $f'(2)$
$f(2)=2^2=4$
$$\frac{f(2+h)-f(2)}{h}=\frac{(2+h)^2-2^2}{h}=\frac{4+4h+h^2-4}{h}=\frac{h(4+h)}{h}=4+h$$
$$\lim_{h\to 0}\frac{f(2+h)-f(2)}{h}=\lim_{h\to 0}4+h=4$$
Donc, $f'(2)=4$
On a donc:
$f(2+h)\approx 4+4h$ pour h proche de 0
$(2+h)^2\approx 4+4h$ pour h proche de 0

2.

$1{,}98^2=(2-0{,}02)^2\approx 4+4\times(-0{,}02)$
$1{,}98^2\approx 3{,}92$
$2{,}04^2=(2+0{,}04)^2\approx 4+4\times 0{,}04$
$2{,}04^2\approx 4{,}16$

Exercice 3:

1. Déterminer la meilleure approximation affine de $\frac{-1}{3+h}$ lorsque h est proche de 0.
2. Utiliser cette approximation pour calculer mentalement des valeurs approchées de: $\frac{-1}{3{,}05}$ et $\frac{-1}{2{,}98}$.

1.

Soit f la fonction définie par $f(x)=\frac{-1}{x}$

On veut déterminer l'approximation de $f(3+h)$ pour h proche de 0.

$f(3+h)\approx f(3)+f'(3)h$ pour h proche de 0.

Déterminons $f(3)$ et $f'(3)$

$f(3)=\frac{-1}{3}$

$$\frac{f(3+h)-f(3)}{h}=\frac{\frac{-1}{3+h}-\frac{-1}{3}}{h}=\frac{\frac{-3+3+h}{3(3+h)}}{h}=\frac{h}{3h(3+h)}=\frac{1}{3(3+h)}$$

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(3+h)-f(3)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{1}{3(3+h)}=\frac{1}{9}$$

Donc, $f'(3)=\frac{1}{9}$

On a donc:

$f(3+h)\approx\frac{-1}{3}+\frac{1}{9}h$ pour h proche de 0

$\frac{-1}{(3+h)}\approx\frac{-1}{3}+\frac{1}{9}h$ pour h proche de 0

2.

$$\frac{-1}{3{,}05}=\frac{-1}{(3+0{,}05)}\approx\frac{-1}{3}+\frac{1}{9}0{,}05=\frac{-3}{9}+\frac{0{,}05}{9}=\frac{-2{,}95}{9}$$

$$\frac{-1}{3{,}05}\approx-0{,}33+0{,}11\times0{,}05=-0{,}3245$$

$$\frac{-1}{2{,}98}=\frac{-1}{(3-0{,}02)}\approx\frac{-1}{3}+\frac{1}{9}(-0{,}02)=\frac{-3}{9}-\frac{0{,}02}{9}=\frac{-3{,}02}{9}$$

$$\frac{-1}{2{,}98}\approx-0{,}33-0{,}11\times0{,}02=-0{,}3322$$

Exercice 4:

Soit f une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que: $f(3)=2$, $f'(3)=-1$, $f'(3{,}2)=-0{,}5$.

1. Utiliser la meilleure approximation affine de f en 3 pour déterminer une valeur approchée de $f(3{,}2)$.
2. En utilisant la question précédente et la meilleure approximation affine de f en 3,2, déterminer une valeur approchée de $f(3{,}3)$.

1.

$f(3+h)\approx f(3)+f'(3)h$ pour h proche de 0.

$f(3+h)\approx 2-h$ pour h proche de 0.

$f(3{,}2)=f(3+0{,}2)\approx 2-0{,}2$

$f(3{,}2)\approx 1{,}8$

2.

$f(3{,}2+h)\approx f(3{,}2)+f'(3{,}2)h$ pour h proche de 0.

$f(3{,}2+h)\approx 1{,}8-0{,}5h$ pour h proche de 0.
$f(3{,}3)=f(3{,}2+0{,}1)\approx 1{,}8-0{,}5\times 0{,}1$
$f(3{,}3)\approx 1{,}75$

Exercice 5:

Déterminer les domaines de dérivabilité ainsi que les fonctions dérivées des fonctions suivantes:

1. h(x) = $2x^2 - 5x$.
2. $i(x) = \dfrac{x^4+3x^2-5x}{4}$
3. j(x) = $(3x + 4)(x^2 - 5)$.
4. k(x) = $\dfrac{1}{x}(3 + \sqrt{x})$
5. l(x) = $\dfrac{2x^2}{x+3}$.

1. $h(x)=2x^2-5x$
h est dérivable sur ℝ et pour tout x de ℝ, $h'(x)=4x-5$

2. $i(x)=\dfrac{x^4+3x^2-5x}{4}$

i est dérivable sur ℝ et pour tout x de ℝ, $i'(x)=\dfrac{4x^3+6x-5}{4}$

3. $j(x)=(3x+4)(x^2-5)$
j est dérivable sur ℝ et pour tout x de ℝ
On pose:
$u(x)=3x+4$ $u'(x)=3$
$v(x)=x^2-5$ $v'(x)=2x$
$j'(x)=3(x^2-5)+2x(3x+4)$
$j'(x)=3x^2-15+6x^2+8x$
$j'(x)=9x^2+8x-15$

4. $k(x)=\dfrac{1}{x}(3+\sqrt{x})$
k est dérivable sur $]0;+\infty[$, et pour tout $x>0$:
On pose:
$u(x)=\dfrac{1}{x}$ $u'(x)=\dfrac{-1}{x^2}$
$v(x)=3+\sqrt{x}$ $v'(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$
$k'(x)=\dfrac{-1}{x^2}(3+\sqrt{x})+\dfrac{1}{2\sqrt{x}}\dfrac{1}{x}$

5. $l(x)=\dfrac{2x^2}{x+3}$
l est dérivable sur ℝ{-3}, et pour tout x de ℝ{-3},
On pose:
$u(x)=2x^2$ $u'(x)=4x$
$v(x)=x+3$ $v'(x)=1$
$l'(x)=\dfrac{4x(x+3)-1\times 2x^2}{(x+3)^2}$

$l'(x)=\frac{4x^2+12x-2x^2}{(x+3)^2}$
$l'(x)=\frac{2x^2+12x}{(x+3)^2}$

Exercice 6:

Déterminer une équation de la tangente à la parabole $\mathscr{P}$ d'équation $y=-2x^2+7x-1$ au point A(1; 4).

$T_A: y=f'(a)(x-a)+f(a)$
$T_A: y=f'(1)(x-1)+f(1)$

Or, $f(1)=-2\times1^2+7\times1-1=-2+7-1=4$

$f(x)=-2x^2+7x-1$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout x de $\mathbb{R}$ $f'(x)=-4x+7$
$f'(1)=-4\times1+7=3$

Donc:
$T_A: y=3(x-1)+4$
$T_A: y=3x+1$

Exercice 7:

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par: $f(x)=2x^2-3x+1$ et $\mathscr{P}$ la parabole représentant f dans le plan muni d'un repère.

1. Justifier le fait que f soit dérivable sur $\mathbb{R}$ et déterminer f'.
2. Déterminer une équation de la tangente à $\mathscr{P}$ au point d'abscisse B(0; 1).
3. Existe-t-il un point M de $\mathscr{P}$ en lequel la tangente est parallèle à la droite d'équation $y=-2x$.
4. Soit a un réel.
   Déterminer une équation de la tangente Δ à la parabole $\mathscr{P}$ au point A d'abscisse a.
   En déduire que la courbe $\mathscr{P}$ admet deux tangentes passant par l'origine O du repère.

1. f est une fonction polynôme donc f est dérivable sur $\mathbb{R}$, et pour tout x de $\mathbb{R}$
$f'(x)=4x-3$

2. $T_B: y=f'(b)(x-b)+f(b)$
$T_B: y=f'(0)(x-0)+f(0)$
Or,
$f(0)=2\times0^2-3\times0+1=1$
$f'(0)=4\times0-3=-3$

Donc:
$T_B: y=-3x+1$

3. On pose $M(x; f(x))$
Pour que la tangente au point M soit parallèle à la droite d'équation $y=-2x$, il faut que $f'(x)=-2$

$f'(x)=-2$
$\Leftrightarrow 4x-3=-2$
$\Leftrightarrow 4x=1$
$\Leftrightarrow x=\frac{1}{4}=0{,}25$

$f(0{,}25)=2\times 0{,}25^2-3\times 0{,}25+1=0{,}375$
$M(0{,}25\,;0{,}375)$
$T_M : y=f'(0{,}25)(x-0{,}25)+f(0{,}25)$
$T_M : y=-2(x-0{,}25)+0{,}375$
$T_M : y=-2x+0{,}875$

Au point M de coordonnées (0,25;0,375), la tangente à la courbe a pour équation $y=-2x+0{,}875$. Cette tangente est parallèle à la droite d'équation $y=-2x$.

4. $T_A : y=f'(a)(x-a)+f(a)$
Or, $f(a)=2a^2-3a+1$
$f'(a)=4a-3$

$\Delta : y=(4a-3)(x-a)+(2a^2-3a+1)$
$\Delta : y=4ax-4a^2-3x+3a+2a^2-3a+1$
$\Delta : y=(4a-3)x-2a^2+1$

Δ passe par l'origine du repère
$\Leftrightarrow (4a-3)\times 0-2a^2+1=0$
$\Leftrightarrow -2a^2+1=0$
$\Leftrightarrow 2a^2=1$
$\Leftrightarrow a^2=\frac{1}{2}$
$\Leftrightarrow a=\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$ ou $a=-\frac{1}{\sqrt{2}}=-\frac{\sqrt{2}}{2}$

Aux points de la parabole d'abscisses $\frac{\sqrt{2}}{2}$ et $-\frac{\sqrt{2}}{2}$, les tangentes passant par l'origine O du repère.