Exercices Fiche 2

Exercice 1:

Soit f la fonction définie par $f(x)=\dfrac{2x+1}{x-2}$.

1. Déterminer le domaine de définition de f.
2. Déterminer f'.
3. Étudier les variations de f et dresser son tableau de variation.

Exercice 2:

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=x^3-3x^2+2x+1$, $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans un repère.

1. Dresser le tableau de variation de f.
2. Donner une équation de la tangente Δ à la courbe $\mathscr{C}$ au point d'abscisse 0.
3. Étudier la position de $\mathscr{C}$ par rapport à Δ.

Exercice 3:

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=2x^3+12x^2+5$.
Quels sont les extremums locaux de f ?

Exercice 4:

Quelle est la somme minimale que l'on peut obtenir en ajoutant un réel strictement positif et son inverse ?

Exercice 5: **pour optimiser!**

Un grand lessivier commercialise son produit pour lave-vaisselle sous forme solide. Les doses se présentent sous forme de parallélépipède rectangle de dimensions x, y et $2x$ en centimètres ($1\leq x\leq 2$).
Chaque lavage nécessite une dose d'un volume d'environ 12 cm^3. Pour économiser l'emballage, on cherche à avoir une surface totale minimale.

1. Faire un schéma et exprimer y en fonction de x.
2. a. Montrer que la surface totale de ce parallélépipède est $S(x) = 4x^2 + \dfrac{36}{x}$ sur [1;2].

   b. Montrer que $S'(x)$ a le même signe que $x^3 - \dfrac{9}{2}$.
3. Étude d'une fonction auxiliaire.

   a. Dresser le tableau de variation de la fonction u définie sur [1; 2] par $u(x) = x^3 - \dfrac{9}{2}$.

   b. En déduire que l'équation $u(x) = 0$ a une unique solution α dans [1;2] et en donner une valeur approchée à la calculatrice à 0,1 près.
   c. En déduire le signe de $u(x)$ suivant les valeurs de x.
4. En déduire le tableau de variation de S.
5. a. Quelle valeur de x rend S minimale?
   b. Quelle est la surface minimale d'une dose de produit?

CORRECTION

Exercice 1:

Soit f la fonction définie par $f(x)=\dfrac{2x+1}{x-2}$.

1. Déterminer le domaine de définition de f.
2. Déterminer f'.
3. Étudier les variations de f et dresser son tableau de variation.

1. $D_f=\mathbb{R}\{2\}$

2. f est définie et dérivable sur $\mathbb{R}\{2\}$. Pour tout x de $\mathbb{R}\{2\}$:

On pose:

$u(x)=2x+1$ $\qquad$ $u'(x)=2$

$v(x)=x-2$ $\qquad$ $v'(x)=1$

$$f'(x)=\frac{2(x-2)-1(2x+1)}{(x-2)^2}$$

$$f'(x)=\frac{2x-4-2x-1}{(x-2)^2}$$

$$f'(x)=\frac{-5}{(x-2)^2}$$

3. Pour tout x de $\mathbb{R}\{2\}$, $f'(x)<0$, donc f est décroissante sur $]-\infty;2[$ et sur $]2;+\infty[$

x	$-\infty$		2		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	‖	$-$	
$f(x)$		$\searrow$	‖	$\searrow$	

Exercice 2:

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$par $f(x)=x^3-3x^2+2x+1$, $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans un repère.

1. Dresser le tableau de variation de f.
2. Donner une équation de la tangente Δ à la courbe $\mathscr{C}$ au point d'abscisse 0.
3. Étudier la position de $\mathscr{C}$ par rapport à Δ.

1. f est une fonction polynôme donc f est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$

Pour tout x de $\mathbb{R}$

$f'(x)=3x^2-6x+2$

$3x^2-6x+2=0$

$\Delta=(-6)^2-4\times3\times2=36-24=12$

L'équation admet deux solutions:

$x_1=\dfrac{6-2\sqrt{3}}{6}=\dfrac{3-\sqrt{3}}{3}$ et $x_2=\dfrac{6+2\sqrt{3}}{6}=\dfrac{3+\sqrt{3}}{3}$

x	$-\infty$		x_1		x_2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$		$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$	

2. $T: y=f'(0)(x-0)+f(0)$

Or, $f(0)=0^3-3\times0^2+2\times0+1=1$ et $f'(0)=3\times0^2-6\times0+2=2$

Donc:
$T: y=2(x-0)+1$
$T: y=2x+1$

3. $x^3-3x^2+2x+1-(2x+1)=x^3-3x^2=x^2(x-3)$

$x^2(x-3)=0 \Leftrightarrow x=0$ ou $x=3$
$f(0)=1$ et $f(3)=3^3-3\times3^2+2\times3+1=7$

La courbe et la tangente se coupent en les points de coordonnées (0;1) et (3;7)

Pour tout x de $\mathbb{R}$
$x^2 \geqslant 0$
$x-3 \geqslant 0 \Leftrightarrow x \geqslant 3$
$x^2(x-3) \geqslant 0 \Leftrightarrow x \geqslant 3$

Donc, la courbe est au-dessus de la tangente pour $x>3$ et elle est en-dessous de la tangente pour $x<3$

Exercice 3:
Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$par $f(x)=2x^3+12x^2+5$.
Quels sont les extremums locaux de f ?

f est une fonction polynôme donc f est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$
Pour tout x de $\mathbb{R}$
$f'(x)=6x^2+24x$

$f'(x)=0$
$\Leftrightarrow 6x^2+24x=0$
$\Leftrightarrow 6x(x+4)=0$
$\Leftrightarrow x=0$ ou $x=-4$

$f(0)=2\times0^3+12\times0+5=5$
$f(-4)=2\times(-4)^3+12\times(-4)^2+5=69$

x	$-\infty$		-4		0		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$		$\nearrow$	69	$\searrow$	5	$\nearrow$	

En -4 et 0, f' s'annule en changeant de signe donc $f(-4)$ et $f(0)$ sont des extremums locaux.
Donc, 69 et 5 sont les extremums locaux de f.

Exercice 4: Quelle est la somme minimale que l'on peut obtenir en ajoutant un réel strictement positif et son inverse ?

On pose x un réel strictement positif .

On appelle S la fonction qui à tout réel strictement positif associe le nombre $S(x)=x+\dfrac{1}{x}$.

La fonction S est dérivable sur $]0;+\infty[$.

Pour tout x de $]0;+\infty[$, $S'(x)=1-\dfrac{1}{x^2}$

$S'(x)=\frac{x^2-1}{x^2}$

$x^2-1=0$
$\Leftrightarrow x=1$ ou $x=-1$

x	0		1		$+\infty$
$S'(x)$	‖	$-$	0	$+$	
$S(x)$	‖	↘	2	↗	

$S(1)=1+\frac{1}{1}=2$
La somme minimale que l'on peut obtenir en ajoutant un réel strictement positif et son inverse est 2.

Exercice 5: pour optimiser!
Un grand lessivier commercialise son produit pour lave-vaisselle sous forme solide. Les doses se présentent sous forme de parallélépipède rectangle de dimensions x , y et $2x$ en centimètres ($1\leq x\leq 2$).
Chaque lavage nécessite une dose d'un volume d'environ 12 cm³. Pour économiser l'emballage, on cherche à avoir une surface totale minimale.

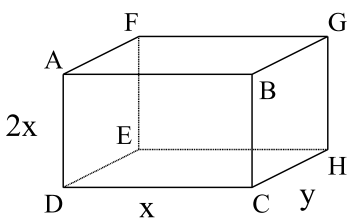
1. Faire un schéma et exprimer y en fonction de x.
2. a. Montrer que la surface totale de ce parallélépipède est $S(x) = 4x^2 + \frac{36}{x}$ sur [1;2].

   b. Montrer que $S'(x)$ a le même signe que $x^3 - \frac{9}{2}$.
3. Étude d'une fonction auxiliaire.

   a. Dresser le tableau de variation de la fonction u définie sur [1; 2] par $u(x) = x^3 - \frac{9}{2}$.

   b. En déduire que l'équation $u(x) = 0$ a une unique solution α dans [1;2] et en donner une valeur approchée à la calculatrice à 0,1 près.
   c. En déduire le signe de $u(x)$ suivant les valeurs de x.
4. En déduire le tableau de variation de S.
5. a. Quelle valeur de x rend S minimale?
   b. Quelle est la surface minimale d'une dose de produit?

1.



$x\times(2x)\times y=12$
$y=\frac{12}{2x^2}$

2. a)Surface des faces « haut et bas »: $2\times x\times\frac{12}{2x^2}=\frac{12}{x}$

Surface des faces « droite et gauche »: $2\times\frac{12}{2x^2}\times 2x=\frac{24}{x}$

Surface des faces « devant et derrière »: $2\times 2x^2=4x^2$

La surface totale de ce parallélépipède est donc $S(x)=\frac{12}{x}+\frac{24}{x}+4x^2=4x^2+\frac{36}{x}$

b) S est une fonction dérivable sur [1;2]

$$S'(x)=8x-\frac{36}{x^2}=\frac{8x^3-36}{x^2}=\frac{8\left(x^3-\frac{36}{8}\right)}{x^2}=\frac{8\left(x^3-\frac{9}{2}\right)}{x^2}$$

Or, pour tout x de [1;2], $\frac{8}{x^2}>0$. Donc S' est du même signe que $x^3-\frac{9}{2}$.

3. a) La fonction u est dérivable sur [1;2].

$u'(x)=3x^2$

$3x^2=0 \Leftrightarrow x=0$

x	1		2
$u'(x)$		$+$	
$u(x)$	$-\frac{7}{2}$	↗	$\frac{7}{2}$

$u(1)=1^3-\frac{9}{2}=-\frac{7}{2}$

$u(2)=2^3-\frac{9}{2}=8-\frac{9}{2}=\frac{7}{2}$

b) u est strictement croissante sur [1;2]; $u(1)=-\frac{7}{2}$ et $u(2)=\frac{7}{2}$.

$0\in\left[-\frac{7}{2};\frac{7}{2}\right]$ donc, il existe un unique nombre α appartenant à [1;2] tel que $u(\alpha)=0$.

Pour $x=1{,}5$, $u(1{,}5)\approx-1{,}13$

Pour $x=1{,}6$, $u(1{,}6)\approx-0{,}40$

Pour $x=1{,}7$, $u(1{,}7)\approx 0{,}41$

$\alpha=1{,}6$ est une valeur approchée à 0,1 près par défaut pour laquelle $u(\alpha)=0$.

c)

x	1		α		2
$u(x)$		$-$	0	$+$	

4.

x	1		α		2
$S'(x)$		$-$	0	$+$	
$S(x)$		↘		↗	

4. a) Pour $x = \alpha$, S est minimale.

b) La surface minimale d'une dose de produit est $S(\alpha) = 4 \times \alpha^2 + \frac{36}{\alpha} \approx 4 \times 1{,}6^2 + \frac{36}{1{,}6} = 32{,}74$

La surface minimale d'une dose de produit est environ $32{,}74\,cm^2$