Limite d'une suite

1. Limite d'une suite.

Étudier la convergence d'une suite (u_n), c'est se demander ce que deviennent les termes u_n lorsque n prend des valeurs de plus en plus grandes, c'est à dire lorsque n tend vers +∞.

Plus précisément, on s'intéresse aux questions suivantes:
1) Les nombres u_n se dispersent-ils ? Finissent-ils par être de plus en plus grand ou petit?
2) Les nombres u_n finissent-ils par s'accumuler prés d'un nombre fixe l ?

1.1. Notion de limite infinie.

Exemple:

Quand n devient grand, n^2 le devient aussi.
Pour n'importe quel réel M, aussi grand soit-il, il existe toujours une valeur de n à partir de laquelle n^2 est plus grand que M.
En effet, pour tout $n>\sqrt{M}$, $n^2>M$.
On traduit ceci en disant que la suite (n²) a pour limite +∞.

De façon générale:

- Dire qu'une suite (u_n) a pour limite +∞ signifie que tous ses termes sont aussi grands que l'on veut pour n suffisamment grand.
On note $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n=+\infty$.

- Dire qu'une suite (u_n) a pour limite -∞ signifie que tous ses termes sont aussi petits que l'on veut pour n suffisamment grand.
On note $\lim\limits_{n\to+\infty} (u_n)=-\infty$

Exemples:

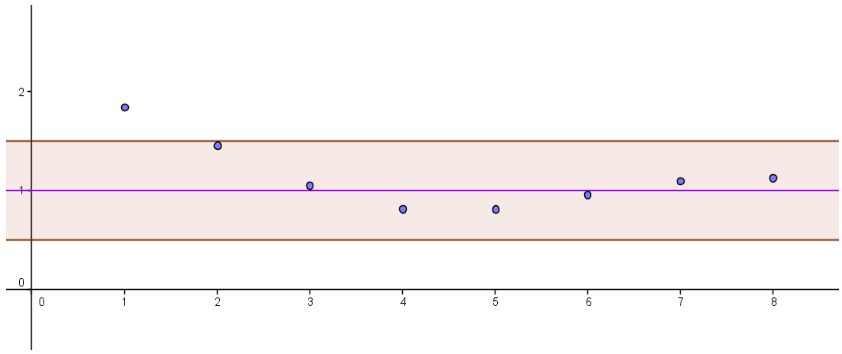
Les suites $\left(\sqrt{n}\right)_{n\geqslant0}$, $(4n)_{n\geqslant0}$ ont pour limite +∞.
Les suites $\left(-n^2\right)_{n\geqslant0}$, $\left(-n^3\right)_{n\geqslant0}$ ont pour limite -∞.

1.2. Suite convergente

Définition:

Soit (u_n) une suite numérique et l un nombre réel.
La suite (u_n) converge vers l si tout intervalle ouvert contenant l contient tous les termes de la suite sauf un nombre fini d'entre eux.
Dans ce cas, la suite (u_n) est dite convergente.
On note $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n=l$.
Les suites qui ne convergent pas sont dites divergentes.

Interprétation graphique:

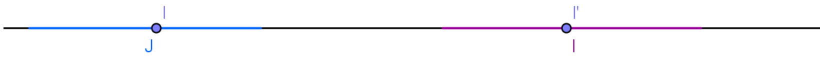


Propriété:

Si une suite (u_n) converge vers l, l est unique.
On l'appelle la limite de la suite.

Preuve:

La suite (u_n) converge vers l. Supposons qu'elle converge aussi vers l' avec $l \neq l'$, par exemple $l < l'$.
Considérons un intervalle ouvert I contenant l' et un intervalle ouvert J contenant l qui soient disjoints.



Comme (u_n) converge vers l', il existe un indice n_0 tel que pour tout $n \geqslant n_0$, $u_n \in$I.
De même, (u_n) converge vers l donc il existe n_1, tel que pour tout $n \geqslant n_1$, $u_n \in$J.
Alors, pour n à la fois supérieur à n_0 et à n_1, $u_n \in$I et $u_n \in$J. Ceci est impossible puisque I et J sont disjoints.
Il est donc impossible que $l \neq l'$, ce qui prouve l'unicité de l.

Exemple:

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n} = 0$$
$$\lim_{n \to +\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = 0$$

Remarque :

Toute suite n'a pas nécessairement de limite.

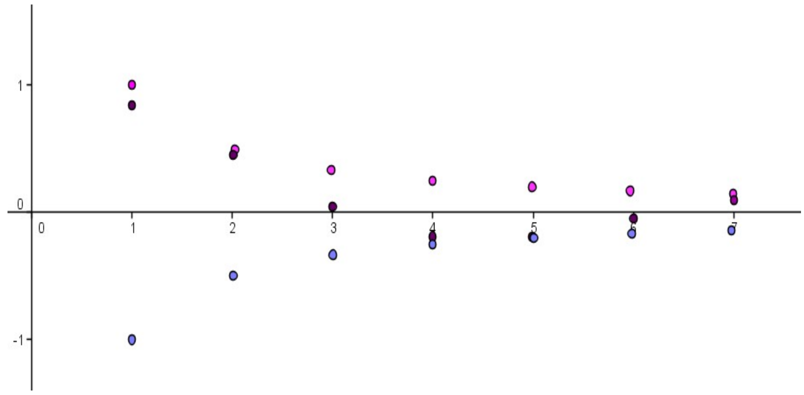
Contre-exemple: La suite (u_n) définie par $u_n = (-1)^n$ pour $n \in \mathbb{N}$ n'a pas de limite.

2. Pour démontrer qu'une suite a une limite

2.1. Théorème des gendaérmes

Théorème:

Soit (u_n), (v_n) et (w_n) trois suites définies sur $\mathbb{N}$ telles que pour tout n appartenant à $\mathbb{N}$ $u_n \leqslant v_n \leqslant w_n$. Si les suites (u_n) et (w_n) convergent vers la même limite l, alors la suite (v_n) converge elle aussi vers l.



Les suites représentées par les points roses et bleues encadrent la suite représentée par les points violets. On voit que la suite représentée par les points violets est contrainte de converger vers la même limite que les deux autres suites.

Preuve:

Soit I un intervalle de centre l.
La suite (u_n) converge vers l donc il existe un indice n_1 à partir duquel tous les termes de la suite (u_n) sont dans l'intervalle I.
La suite (w_n) converge vers l, donc il existe un indice n_2 à partir duquel tous les termes de la suite (w_n) sont dans l'intervalle I.
Soit N le plus grand des entiers n_1 et n_2.
A partir de l'indice N, les réels u_n et w_n sont dans l'intervalle I, et donc aussi les réels v_n. Donc la suite (v_n) converge vers l.

Application :

Déterminons la limite de la suite (v_n) définie par $v_n=\frac{\sin n}{n}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

On sait que pour tout n appartenant à $\mathbb{N}^*$, on a $-1 \leqslant \sin n \leqslant 1$.

Donc par suite, on a $\frac{-1}{n} \leqslant \frac{\sin n}{n} \leqslant \frac{1}{n}$.

Soit les suites (u_n) et (w_n) définies sur $\mathbb{N}^*$ par $u_n=\frac{-1}{n}$ et $w_n=\frac{1}{n}$.

$\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{-1}{n}=0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n}=0$ donc,d'après le théorème des gendarmes, $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n=0$.

2.2. Limites et opérations.

On admettra le théorème suivant:

Théorème:

Soit (u_n) une suite convergeant vers un réel l, (v_n) une suite convergeant vers un réel l'.

La suite (w_n) ,définie par $w_n=u_n+v_n$ pour tout n, converge vers $l+l'$.

La suite (s_n), définie par $s_n=u_n\times v_n$ pour tout n, converge vers $l\times l'$.

Si de plus (v_n) est une suite dont tous les termes sont non nuls et convergeant vers un réel non nul l', alors la suite (t_n), définie par $t_n=\frac{u_n}{v_n}$ converge vers le réel $\frac{l}{l'}$.

Exemple:

Soit la suite (u_n) définie par $u_n=\frac{n^2-3n}{3n^2+4}$ pour n appartenant à $\mathbb{N}$

$$u_n=\frac{n^2-3n}{3n^2+4}=\frac{n^2\left(1-\frac{3}{n}\right)}{n^2\left(3+\frac{4}{n^2}\right)}.$$

Donc pour $n>0$, $u_n=\frac{1-\frac{3}{n}}{3+\frac{4}{n^2}}$.

Or $\lim_{n\to+\infty} 1-\frac{3}{n}=1$ et $\lim_{n\to+\infty} 3+\frac{4}{n^2}=3$.

D'où $\lim_{n\to+\infty} u_n=\frac{1}{3}$.

2.3. Cas d'une suite définie par une fonction.

Théorème:

Si une fonction f a une limite finie l en $+\infty$, alors la suite $(f(n))_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers l.
Autrement dit, si $\lim_{x\to+\infty} f(x)=l$ et si la suite (u_n) est définie par $u_n=f(n)$ pour tout $n\in\mathbb{N}$, alors $\lim_{n\to+\infty} u_n=l$.

Attention: la réciproque est fausse.

Voici un contre-exemple:
Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$par $f(x)=\cos(2\pi x)$.
Soit (u_n) la suite définie par $u_n=f(n)$ pour tout $n\in\mathbb{N}$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \cos(2\pi n) = 1$. Donc la suite (u_n) est une suite constante et donc $\lim_{n \to +\infty} u_n = 1$
Mais la fonction f n'a pas de limite en $+\infty$.

3. Limite d'une suite arithmétique.

3;1. Théorèmes.

Théorème:

Si une fonction f a pour limite $+\infty$ en $+\infty$, alors la suite $(f(n))_{n \in \mathbb{N}}$ a pour limite $+\infty$.
Autrement dit, si $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ et si la suite (u_n) est définie par $u_n = f(n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ alors $\lim_{n \to +\infty} u_n = +\infty$.

Théorème:

Si une fonction f a pour limite $-\infty$ en $+\infty$, alors la suite $(f(n))_{n \in \mathbb{N}}$ a pour limite $-\infty$.
Autrement dit, si $\lim_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$ et si la suite (u_n) est définie par $u_n = f(n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ alors $\lim_{n \to +\infty} u_n = -\infty$.

Attention: les réciproques sont fausses.

Voici deux contre-exemples:
Soit la fonction f_1 définie sur $\mathbb{R}$ par $f_1(x) = x\cos(2\pi x)$

Soit (u_n) la suite définie par $u_n = f_1(n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$
Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = n\cos(2\pi n) = n$. Donc $\lim_{n \to +\infty} u_n = +\infty$ Mais la fonction f n'a pas de limite en $+\infty$.

Soit la fonction f_2 définie sur $\mathbb{R}$ par $f_2(x) = x\cos((2x+1)\pi)$

Soit (u_n) la suite définie par $u_n = f_2(n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$
Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = n\cos((2n+1)\pi) = -n$. Donc $\lim_{n \to +\infty} u_n = -\infty$ Mais la fonction f n'a pas de limite en $+\infty$.

3.2. Cas des suites arithmétiques.

Soit (u_n) la suite arithmétique de premier terme u_0 et de raison r. On a pour tout n : $u_n = u_0 + nr$

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = u_0 + rx$

Si r>0, $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ donc $\lim_{n \to +\infty} u_n = +\infty$

Si r<0, $\lim_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$ donc $\lim_{n \to +\infty} u_n = -\infty$

Si r=0, la suite (u_n) est une suite constante égale à u_0

Conclusion:

La limite d'une suite arithmétique de raison strictement négative est -∞.
La limite d'une suite arithmétique de raison strictement positive est +∞.

4. Limite d'une suite géométrique.

On admettra le théorème suivant.

Théorème:

Si $-1<q<1$, alors $\lim_{n\to+\infty} q^n=0$.

Si $q=1$, alors $\lim_{n\to+\infty} q^n=1$.

Si $q>1$, alors $\lim_{n\to+\infty} q^n=+\infty$.

Exemple:

La suite géométrique de terme $u_n=3\times\left(\frac{1}{2}\right)^n$ a pour limite 0 car la raison q appartient à l'intervalle]-1; 1[.