Exercices Fiche 1

Exercice 1:

Soit la suite (v_n) définie par $v_n = 2-5n$ pour $n \geqslant 0$.

1. A partir de quel indice a-t-on $v_n < -1000$.
2. Déterminer la limite de la suite (v_n).

Exercice 2:

Soit la suite (u_n) définie par $u_n = \sqrt{n^2+n+1}$ pour $n \geqslant 0$.

1. Montrer que pour tout $n \geqslant 0$, $u_n > n$.
2. En déduire la limite de la suite (u_n).

Exercice 3:

Soit (u_n) et (v_n) deux suites définies par $u_n = 1+\frac{3}{n}$ et $v_n = 4-\frac{5}{\sqrt{n}}$ pour $n \geqslant 1$.

1. Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n$.
2. En déduire:
   a. $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{u_n}{v_n}$.
   b. $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{v_n-4}{u_n}$.
3. Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1-u_n}{4-v_n}$.

Exercice 4:

Déterminer la limite de chaque suite $(u_n)_{n>0}$ définie par:

a. $u_n = \frac{1}{n}\sin\frac{\pi}{n}$

b. $u_n = \frac{n+(-1)^n}{n^2+3}$

c. $u_n = \left(2+\frac{1}{n}\right)^2$

d. $u_n = \frac{1-\cos(n^2)}{\sqrt{n}}$.

Exercice 5:

1. Montrer que pour tout $n > 0$, $\sqrt{n+1}-\sqrt{n} = \frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}$.
2. En déduire que $0 < \sqrt{n+1}-\sqrt{n} < \frac{1}{2\sqrt{n}}$.
3. Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt{n+1}-\sqrt{n}$.

Exercice 6:

Dans une ville, en 2010, le montant des recettes est de 15 millions d'euros pour une population de 10 000 habitants.
On suppose que chaque année, la population s'accroît de 500 habitants et les recettes progressent de

1 millions d'euros.

On désigne par R_n la recette par habitant en euros pendant l'année $2010+n$, où $n \in \mathbb{N}$

1. Exprimer R_n en fonction de n .

2. a. Étudier le sens de variation de la suite (R_n) .

b. Ce modèle est-il favorable aux habitants de la ville?

3. a. Étudier la convergence de la suite (R_n) .

b. Quel interprétation peut-on en donner?

Exercice 7:

Un nénuphar géant couvre 10m² d'un étang et croît de 8% chaque jour. On désigne par a_n l'aire de ce nénuphar n jours plus tard.

1. Précisez la nature de la suite (a_n) et en déduire l'expression a_n en fonction de n .

2. Justifier que le nénuphar finira par recouvrir tout l'étang.

3. Au bout de combien de jours le nénuphar couvrira-t-il tout l'étang, si celui-ci a une superficie de 1000m² ? De 10 000 m²? De 100 000 m²?

Exercice 8:

(u_n) est la suite définie par $u_0=0$ et pour tout entier naturel non nul: $u_n=u_{n-1}+3\times 10^{-n}$

1. Écrire sous forme décimale u_1 ; u_2 ; u_3 .

2. Déterminer la limite de la suite (u_n)

CORRECTION

Exercice 1:

Soit la suite (v_n) définie par $v_n = 2-5n$ pour $n \geqslant 0$.

1. A partir de quel indice a-t-on $v_n > -1000$.

$$v_n < -1000$$
$$\Leftrightarrow 2-5n < -1000$$
$$\Leftrightarrow 5n > 1002$$
$$\Leftrightarrow n > \frac{1002}{5}$$
$$\Leftrightarrow n > 200{,}4$$

A partir du rang 201, $v_n < -1000$

2. Déterminer la limite de la suite (v_n)

$$\lim_{n\to+\infty} v_n = -\infty$$

Exercice 2:

Soit la suite (u_n) définie par $u_n = \sqrt{n^2+n+1}$ pour $n \geqslant 0$.

1. Montrer que pour tout $n \geqslant 0$, $u_n > n$.

Pour $n \geqslant 0$,
$$n^2+n+1 > n^2$$
$$\sqrt{n^2+n+1} > \sqrt{n^2}$$
$$\sqrt{n^2+n+1} > n$$
Donc, pour tout $n \geqslant 0$, $u_n > n$

2. En déduire la limite de la suite (u_n).

Pour tout $n \geqslant 0$, $u_n > n$ et $\lim_{n\to+\infty} n = +\infty$, donc $\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.

Exercice 3:

Soit (u_n) et (v_n) deux suites définies par $u_n = 1+\frac{3}{n}$ et $v_n = 4-\frac{5}{\sqrt{n}}$ pour $n \geqslant 1$.

1. Déterminer $\lim_{n\to+\infty} u_n$ et $\lim_{n\to+\infty} v_n$.

$u_n = 1+\frac{3}{n}$ et $\lim_{n\to+\infty} \frac{3}{n} = 0$ donc, $\lim_{n\to+\infty} u_n = 1$

$v_n = 4-\frac{5}{\sqrt{n}}$ et $\lim_{n\to+\infty} \frac{5}{\sqrt{n}} = 0$ donc, $\lim_{n\to+\infty} v_n = 4$

2. En déduire:

a. $\lim_{n\to+\infty} \frac{u_n}{v_n}$.

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{u_n}{v_n} = \frac{1}{4}$$

b. $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{v_n-4}{u_n}$.

$$\frac{v_n-4}{u_n}=\frac{v_n}{u_n}-\frac{4}{u_n}$$

$$\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{v_n}{u_n}=\frac{4}{1}=4$$

$\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{u_n}=\frac{1}{1}=1$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{4}{u_n}=\frac{4}{1}=4$

Par suite, $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{v_n-4}{u_n}=4-4=0$

3. Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1-u_n}{4-v_n}$.

$$1-u_n=1-1-\frac{3}{n}=-\frac{3}{n}$$

$$4-v_n=4-4+\frac{5}{\sqrt{n}}=\frac{5}{\sqrt{n}}$$

$$\frac{1-u_n}{4-v_n}=-\frac{3}{n}\times\frac{\sqrt{n}}{5}=-\frac{3}{5}\times\frac{\sqrt{n}}{n}=-\frac{3}{5}\times\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n}\times\sqrt{n}}=-\frac{3}{5}\times\frac{1}{\sqrt{n}}$$

Or, $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}=0$

Donc, $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1-u_n}{4-v_n}=-\frac{3}{5}\times 0=0$

Exercice 4:

Déterminer la limite de chaque suite $(u_n)_{n>0}$ définie par:

a. $u_n=\frac{1}{n}\sin\frac{\pi}{n}$

Pour tout $n>0$, $-1<\sin\left(\frac{\pi}{n}\right)<1$

Donc:

$$-\frac{1}{n}<\frac{1}{n}\sin\left(\frac{\pi}{n}\right)<\frac{1}{n}$$

Or, $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n}=0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} -\frac{1}{n}=0$ donc, d'après le théorème des gendarmes $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\sin\left(\frac{\pi}{n}\right)=0$

b. $u_n=\frac{n+(-1)^n}{n^2+3}$

$$u_n=\frac{n}{n^2+3}+\frac{(-1)^n}{n^2+3}$$

$$\frac{n}{n^2+3}=\frac{n}{n\left(n+\frac{3}{n}\right)}=\frac{1}{n+\frac{3}{n}}$$

Or, $\lim_{n\to+\infty} n+\frac{3}{n}=+\infty$, donc: $\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n+\frac{3}{n}}=0$

Pour tout n :

$\frac{-1}{n^2+3}\leqslant\frac{(-1)^n}{n^2+3}\leqslant\frac{1}{n^2+3}$

et $\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n^2+3}=\lim_{n\to+\infty}\frac{-1}{n^2+3}=0$

Donc, d'après le théorème des gendarmes: $\lim_{n\to+\infty}\frac{(-1)^n}{n^2+3}=0$

Par suite, $\lim_{n\to+\infty}\frac{n+(-1)^n}{n^2+3}=0$

c. $u_n=\left(2+\frac{1}{n}\right)^2$

$u_n=4+\frac{4}{n}+\frac{1}{n^2}$

$\lim_{n\to+\infty}\frac{4}{n}=0$ et $\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n^2}=0$

Donc, $\lim_{n\to+\infty}\left(2+\frac{1}{n}\right)^2=4$

d. $u_n=\frac{1-\cos(n^2)}{\sqrt{n}}$.

Pour tout $n>0$

$-1\leq\cos(n^2)\leq 1$

$-1\leqslant-\cos(n^2)\leqslant 1$

$0\leqslant 1-\cos(n^2)\leqslant 2$

$0\leqslant\frac{1-\cos(n^2)}{\sqrt{n}}\leqslant\frac{2}{\sqrt{n}}$

Or, $\lim_{n\to+\infty}\frac{2}{\sqrt{n}}=0$

Donc, d'après le théorème des gendarmes: $\lim_{n\to+\infty}\frac{1-\cos(n^2)}{\sqrt{n}}=0$

Exercice 5:

1. Montrer que pour tout $n>0$, $\sqrt{n+1}-\sqrt{n}=\frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}$.

   Pour tout $n>0$:

   $$\frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}=\frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})}=\frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{(\sqrt{n+1})^2-(\sqrt{n})^2}=\frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{n+1-n}=\sqrt{n+1}-\sqrt{n}$$

2. En déduire que $0<\sqrt{n+1}-\sqrt{n}<\frac{1}{2\sqrt{n}}$.

   Pour tout entier $n>0$:

$$n+1>n$$
$$\Leftrightarrow \sqrt{n+1}>\sqrt{n}$$
$$\Leftrightarrow \sqrt{n+1}-\sqrt{n}>0$$

$$\sqrt{n+1}>\sqrt{n}$$
$$\Leftrightarrow \sqrt{n+1}+\sqrt{n}>\sqrt{n}+\sqrt{n}$$
$$\Leftrightarrow \sqrt{n+1}+\sqrt{n}>2\sqrt{n}$$
$$\Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}<\frac{1}{2\sqrt{n}}$$

Donc: $0<\sqrt{n+1}-\sqrt{n}<\frac{1}{2\sqrt{n}}$

3. Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt{n+1}-\sqrt{n}$.

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{2\sqrt{n}}=0$$

Donc, d'après le théorème des gendarmes: $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt{n+1}-\sqrt{n}=0$

Exercice 6:

Dans une ville, en 2010, le montant des recettes est de 15 millions d'euros pour une population de 10 000 habitants.
On suppose que chaque année, la population s'accroît de 500 habitants et les recettes progressent de 1 millions d'euros.
On désigne par R_n la recette par habitant en euros pendant l'année $2010+n$, où $n \in \mathbb{N}$

1. Exprimer R_n en fonction de n .

$$R_0=\frac{15000000}{10000}=1500$$
$$R_n=\frac{15000000+1000000n}{10000+500n}=\frac{1000000(15+n)}{500(20+n)}=2000\times\frac{15+n}{20+n}$$

2. a. Étudier le sens de variation de la suite (R_n) .

Pour tout n :
$$R_{n+1}-R_n$$
$$=2000\times\frac{15+n+1}{20+n+1}-2000\times\frac{15+n}{20+n}$$
$$=2000\times\frac{(15+n+1)(20+n)-(15+n)(20+n+1)}{(20+n+1)(20+n)}$$
$$=2000\times\frac{20(15+n)+15n+n^2+20+n-20(15+n)-15n-15-n^2-n}{(20+n+1)(20+n)}$$
$$=2000\times\frac{5}{(20+n+1)(20+n)}>0$$
Donc la suite (R_n) est strictement croissante.

b. Ce modèle est-il favorable aux habitants de la ville?

Ce modèle n'est pas favorable aux habitants, il y a une augmentation annuelle de la recette par habitant.

3. a. Étudier la convergence de la suite (R_n).

$$R_n=2000\times\frac{15+n}{20+n}$$
$$\lim_{n\to+\infty}\frac{15+n}{20+n}=\lim_{n\to+\infty}\frac{n}{n}=1$$
Donc, $\lim_{n\to+\infty}R_n=2000$

b. Quel interprétation peut-on en donner?

Dans le futur, la recette annuelle par habitant sera toujours inférieure à 2000€.

Exercice 7:

Un nénuphar géant couvre 10m² d'un étang et croît de 8% chaque jour. On désigne par a_n l'aire de ce nénuphar n jours plus tard.

1. Précisez la nature de la suite (a_n) et en déduire l'expression a_n en fonction de n.
2. Justifier que le nénuphar finira par recouvrir tout l'étang.
3. Au bout de combien de jours le nénuphar couvrira-t-il tout l'étang, si celui-ci a une superficie de 1000m² ? De 10 000 m²? De 100 000 m²?

1. Coefficient multiplicateur lié à une augmentation de 8% est $1+\frac{8}{100}=1{,}08$

$a_0=10$

$a_n=10\times(1{,}08)^n$

La suite (a_n) est la suite géométrique de premier terme $a_0=10$ et de raison 1,08.

2. 1,08>1 donc $\lim_{n\to+\infty}1{,}08^n=+\infty$

Donc, $\lim_{n\to+\infty}a_n=+\infty$

Donc, le nénuphar finira par recouvrir tout l'étang.

3. $10\times(1{,}08)^n>1000$

$\Leftrightarrow (1{,}08)^n>100$

$\Leftrightarrow n>59$

$10\times(1{,}08)^n>10000$

$\Leftrightarrow (1{,}08)^n>1000$

$\Leftrightarrow n>89$

$10\times(1{,}08)^n>100000$

$\Leftrightarrow (1{,}08)^n>10000$

$\Leftrightarrow n>119$

Il faudra 60 jours, 90 jours et 120 jours pour que le nénuphar couvre tout l'étang, si celui-ci a une superficie de 1000m² , de 10 000 m² et de 100 000 m²

Exercice 8:

(u_n) est la suite définie par $u_0=0$ et pour tout entier naturel non nul: $u_n=u_{n-1}+3\times10^{-n}$

1. Écrire sous forme décimale u_1 ; u_2 ; u_3.

$u_1 = u_0 + 3 \times 10^{-1}$
$u_1 = 0 + \dfrac{3}{10} = 0{,}3$
$u_2 = u_1 + 3 \times 10^{-2}$
$u_2 = 0{,}3 + 3 \times 0{,}01 = 0{,}33$
$u_3 = u_2 + 3 \times 10^{-3}$
$u_3 = 0{,}33 + 3 \times 0{,}001 = 0{,}333$

2. Déterminer la limite de la suite (u_n)

$u_n = 3 \times 10^{-1} + 3 \times 10^{-2} + 3 \times 10^{-3} + \ldots + 3 \times 10^{-n}$
$u_n = 3\,(10^{-1} + 10^{-2} + 10^{-3} + \ldots + 10^{-n})$

Or, $10^{-1} + 10^{-2} + \ldots + 10^{-n}$ est la somme d'une suite géométrique de raison 10^{-1}

$$10^{-1} + 10^{-2} + \ldots + 10^{-n} = 10^{-1} \times \frac{1 - (10^{-1})^n}{1 - 10^{-1}} = \frac{1 - (10^{-1})^n}{9}$$

$\lim\limits_{n \to +\infty} (10^{-1})^n = 0$

Donc, $\lim\limits_{n \to +\infty} 3 \times \dfrac{1}{9} = \dfrac{1}{3}$