Exercices fiche 2

Exercice 1:

(v_n) est la suite géométrique de premier terme $v_0=1$ et de raison $q=0{,}8$.

Soit (u_n) la suite définie pour tout entier naturel n par: $u_n=\dfrac{v_n+4}{2v_n+6}$

Calculer la limite de la suite (u_n) .

Exercice 2:

1. Déterminer la limite de la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n par $u_n=\sqrt{\dfrac{4n+1}{n+2}}$ (on peut calculer la limite en $+\infty$ d'une fonction).

2. Déterminer la limite de la suite (v_n) définie pour tout entier naturel n par $v_n=\sqrt{n+2}-\sqrt{n}$.

3. Déterminer la limite de la suite (w_n) définie pour tout entier naturel n non nul par: $w_n=\dfrac{\cos n}{n}$ (on déterminera un encadrement de w_n).

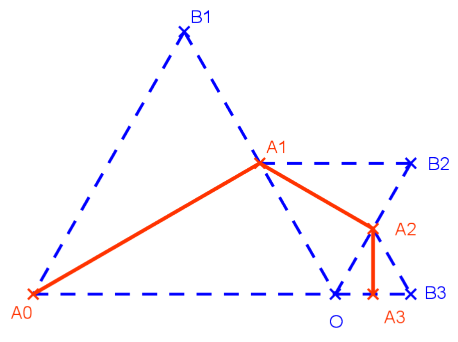
Exercice 3:

Soit (u_n) la suite définie par son premier terme $u_0=0$ et pour tout entier naturel n : $u_{n+1}=\dfrac{3}{4}u_n+1$.

1. Démontrer que la suite (v_n) définie pour tout entier naturel n par $v_n=4-u_n$ est géométrique. On précisera le premier terme et la raison.
2. Exprimer v_n puis u_n en fonction de n .
3. Calculer la limite de la suite (u_n) .

Exercice 4:

Dans le plan, on se donne 2 points distincts O et A_0 et on choisit une unité de longueur: OA_0 (c'est à dire: $OA_0=1$)
Puis on construit les points B_1 tel que A_0OB_1 soit un triangle équilatéral direct et A_1 milieu de $[OB_1]$.
Puis on construit les points B_2 tel que A_1OB_2 soit un triangle équilatéral direct et A_2 milieu de $[OB_2]$.
Puis on construit les points B_3 tel que A_2OB_3 soit un triangle équilatéral direct et A_3 milieu de $[OB_3]$.
Puis, on réitère la construction pour obtenir les points: $B_4;B_5;\ldots;B_n$ et $A_4;A_5;\ldots A_n$



1. On considère la suite (u_n) telle que $u_0=A_0A_1$; $u_1=A_1A_2$; $u_2=A_2A_3$ …; $u_n=A_0A_{n-1}$
a) Calculer u_0 ; u_1 ; u_2
b) On admet que la suite (u_n) est géométrique; en déduite u_n en fonction de n .
2. On considère la suite (l_n) telle que $l_0=A_0A_1$; $l_1=l_0+A_1A_2$; $l_2=l_1+A_2A_3$ …; $l_{n+1}=l_n+A_{n+1}A_{n+2}$
Calculer la limite de la suite (l_n)

CORRECTION

Exercice 1:

(v_n) est la suite géométrique de premier terme $v_0=1$ et de raison $q=0{,}8$.

Soit (u_n) la suite définie pour tout entier naturel n par: $u_n=\dfrac{v_n+4}{2\,v_n+6}$

Calculer la limite de la suite (u_n) .

Pour tout entier naturel n : $v_n=v_0\times q^n=0{,}8^n$

Donc, $u_n=\dfrac{0{,}8^n+4}{2\times 0{,}8^n+6}$

$0{,}8<1$ donc, $\lim\limits_{n\to+\infty} 0{,}8^n=0$, donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n=\dfrac{0+4}{2\times 0+6}=\dfrac{4}{6}=\dfrac{2}{3}$

Exercice 2:

1. Déterminer la limite de la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n par $u_n=\sqrt{\dfrac{4\,n+1}{n+2}}$ (on peut calculer la limite en $+\infty$ d'une fonction).

Remarque: pour tout entier naturel n , $\dfrac{4\,n+1}{n+2}>0$

On pose pour tout $x>0$ $f(x)=\sqrt{\dfrac{4\,x+1}{x+2}}$

$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{4\,x+1}{x+2}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{4\,x}{x}=4$

Donc, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\sqrt{4}=2$

Par suite, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n=4$

2. Déterminer la limite de la suite (v_n) définie pour tout entier naturel n par $v_n=\sqrt{n+2}-\sqrt{n}$.

$$v_n=\sqrt{n+2}-\sqrt{n}=\frac{(\sqrt{n+2}-\sqrt{n})(\sqrt{n+2}+\sqrt{n})}{\sqrt{n+2}+\sqrt{n}}=\frac{n+2-n}{\sqrt{n+2}+\sqrt{n}}=\frac{2}{\sqrt{n+2}+\sqrt{n}}$$

$\sqrt{n+2}>\sqrt{n}$

Donc, $\sqrt{n+2}+\sqrt{n}>2\sqrt{n}$

$\dfrac{1}{\sqrt{n+2}+\sqrt{n}}<\dfrac{1}{2\sqrt{n}}$

Conséquence: $0<v_n<\dfrac{1}{\sqrt{n}}$

et $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{1}{\sqrt{n}}=0$. D'après le théorème des gendarmes: $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n=0$

3. Déterminer la limite de la suite (w_n) définie pour tout entier naturel n non nul par: $w_n=\dfrac{\cos n}{n}$ (on déterminera un encadrement de w_n).

Pour tout entier naturel n non nul: $-1\leqslant\cos(n)\leqslant 1$

$-\dfrac{1}{n}\leqslant\dfrac{\cos(n)}{n}\leqslant\dfrac{1}{n}$

$\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{1}{n}=\lim\limits_{n\to+\infty}-\dfrac{1}{n}=0$

D'après le théorème des gendarmes: $\lim_{n\to+\infty} w_n=0$

Exercice 3:

Soit (u_n) la suite définie par son premier terme $u_0=0$ et pour tout entier naturel n : $u_{n+1}=\frac{3}{4}u_n+1$.

1. Démontrer que la suite (v_n) définie pour tout entier naturel n par $v_n=4-u_n$ est géométrique. On précisera le premier terme et la raison.

Pour tout entier naturel n :

$v_{n+1}=4-u_{n+1}=4-\frac{3}{4}u_n-1=3-\frac{3}{4}u_n$

Or, $u_n=4-v_n$

Donc, $v_{n+1}=3-\frac{3}{4}(4-v_n)=3-3+\frac{3}{4}v_n=\frac{3}{4}v_n$

$v_0=4-u_0=4$

Donc, (v_n) est la suite géométrique de premier terme $v_0=4$ et de raison $\frac{3}{4}$.

2. Exprimer v_n puis u_n en fonction de n .

Pour tout entier naturel n :

$v_n=v_0q^n$

$v_n=4\times\left(\frac{3}{4}\right)^n$

$u_n=4-v_n=4-4\times\left(\frac{3}{4}\right)^n$

3. Calculer la limite de la suite (u_n) .

$-1<q=\frac{3}{4}<1$ donc $\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{3}{4}\right)^n=0$

Par suite, $\lim_{n\to+\infty} u_n=4$

Exercice 4:

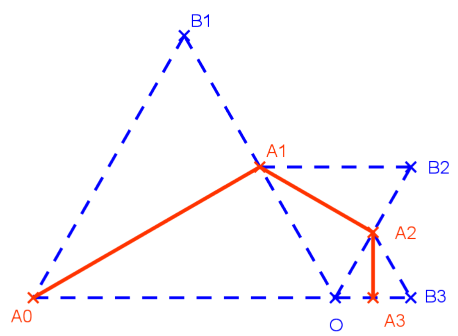
Dans le plan, on se donne 2 points distincts O et A_0 et on choisit une unité de longueur: OA_0 (c'est à dire: $OA_0=1$)

Puis on construit les points B_1 tel que A_0OB_1 soit un triangle équilatéral direct et A_1 milieu de $[OB_1]$.

Puis on construit les points B_2 tel que A_1OB_2 soit un triangle équilatéral direct et A_2 milieu de $[OB_2]$.

Puis on construit les points B_3 tel que A_2OB_3 soit un triangle équilatéral direct et A_3 milieu de $[OB_3]$.

Puis, on réitère la construction pour obtenir les points: $B_4;B_5;\ldots;B_n$ et $A_4;A_5;\ldots A_n$



1. On considère la suite (u_n) telle que $u_0=A_0A_1$; $u_1=A_1A_2$; $u_2=A_2A_3$ …; $u_n=A_0A_{n-1}$
a) Calculer u_0 ; u_1 ; u_2

Le triangle A_0OB_1 est un triangle équilatéral; A_1 est le milieu de $[OB_1]$ donc (A_0A_1) est la hauteur de ce triangle issue de A_0 . Donc, le triangle OA_0A_1 est rectangle en A_1 .
On peut utiliser le théorème de Pythagore:
$OA_0^2=OA_1^2+A_0A_1^2$

$OA_0=1$ et $OA_1=\frac{1}{2}$

$1^2=\left(\frac{1}{2}\right)^2+A_0A_1^2$
$A_0A_1^2=1-\frac{1}{4}=\frac{3}{4}$
$A_0A_1=\sqrt{\frac{3}{4}}=\frac{\sqrt{3}}{2}$ $\qquad$ $u_0=\frac{\sqrt{3}}{2}$

(on pouvait aussi utiliser la trigonométrie $\sin\frac{\pi}{3}$ …)

De même, dans le triangle rectangle OA_1A_2 :
$OA_1^2=A_2O^2+A_2A_1^2$
$\left(\frac{1}{2}\right)^2=\left(\frac{1}{4}\right)^2+A_1A_2^2$
$A_1A_2^2=\frac{1}{4}-\frac{1}{16}=\frac{3}{16}$
$A_1A_2=\frac{\sqrt{3}}{4}$ $\qquad$ $u_1=\frac{\sqrt{3}}{4}$
De même, dans le triangle rectangle OA_2A_3 :
$OA_2^2=A_3O^2+A_3A_2^2$
$\left(\frac{1}{4}\right)^2=\left(\frac{1}{8}\right)^2+A_2A_3^2$
$A_2A_3^2=\frac{1}{16}-\frac{1}{64}=\frac{3}{64}$
$A_2A_3=\frac{\sqrt{3}}{8}$ $\qquad$ $u_2=\frac{\sqrt{3}}{8}$

b) On admet que la suite (u_n) est géométrique; en déduite u_n en fonction de n .
On remarque que: $u_1=\frac{1}{2}u_0$ et $u_2=\frac{1}{2}u_1$
Donc, la suite (u_n) est la suite géométrique de premier terme $u_0=\frac{\sqrt{3}}{2}$ et de raison $q=\frac{1}{2}$.
Pour tout entier naturel n , $u_n=u_0\times q^n=\frac{\sqrt{3}}{2}\times\left(\frac{1}{2}\right)^n$

2. On considère la suite (l_n) telle que $l_0=A_0A_1$; $l_1=l_0+A_1A_2$; $l_2=l_1+A_2A_3$ …; $l_{n+1}=l_n+A_{n+1}A_{n+2}$
Calculer la limite de la suite (l_n)

$l_0=u_0$ $\qquad$ $l_1=u_0+u_1$ $\qquad$ $l_2=u_0+u_1+u_2$
$l_n=u_0+u_1+u_2+\ldots+u_n$

$$l_n = \frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{1-\frac{1}{2}} = \sqrt{3} \times \left(1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right)$$

$-1 < \frac{1}{2} < 1$ donc, $\lim_{n \to +\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} = 0$

et, $\lim_{n \to +\infty} l_n = \sqrt{3}$