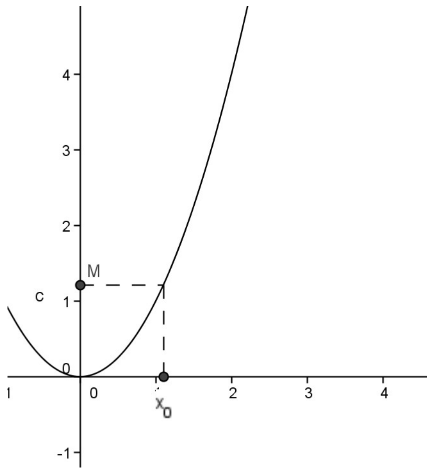
Limites de fonctions et asymptotes

1. Limites en $\pm\infty$

Soit f une fonction définie sur un intervalle $]\,a\,;+\infty[$, a appartenant à $\mathbb{R}$
Chercher la limite de $f(x)$ quand x tend vers $+\infty$, c'est étudier le comportement des réels $f(x)$ quand on prend pour x des valeurs aussi grande que l'on veut.

On observe trois types importants de comportement:

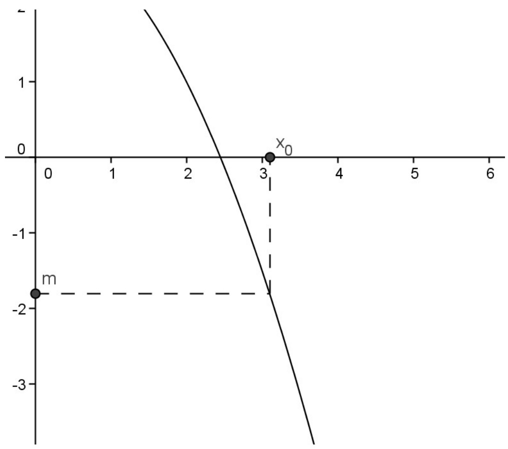
1) Si pour x assez grand, les images $f(x)$ sont aussi grandes que l'on veut, on dit que $f(x)$ tend vers $+\infty$ quand x tend vers $+\infty$.
On note alors: $\lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$



$f(x)>M$ dès que $x>x_0$.

Exemples:
$\lim_{x\to+\infty} x^2=+\infty$
$\lim_{x\to+\infty} \sqrt{x}=+\infty$

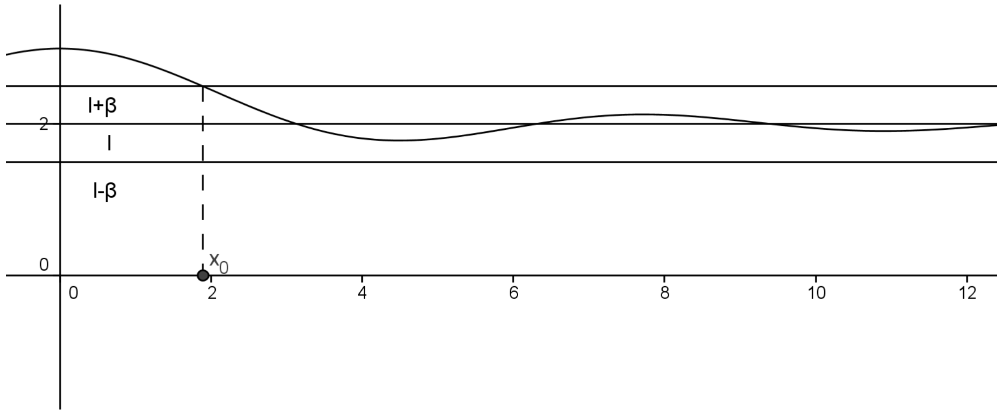
2) Si pour x suffisamment grand, les images de $f(x)$ sont aussi petites que l'on veut, on dit que $f(x)$ tend vers $-\infty$ quand x tend vers $+\infty$.
On note alors: $\lim_{x\to+\infty} f(x)=-\infty$



$f(x) < m$ quand $x < x_0$.

Exemple: $\lim\limits_{x \to +\infty} -x^2 = -\infty$

3) Si pour x suffisamment grand, les images $f(x)$ sont aussi proches d'un réel l que l'on veut, on dit que $f(x)$ tend vers l quand x tend vers +∞.
On note alors: $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = l$.
La droite Δ d'équation: $y = l$ est alors appelée asymptote horizontale à la courbe de f en +∞.



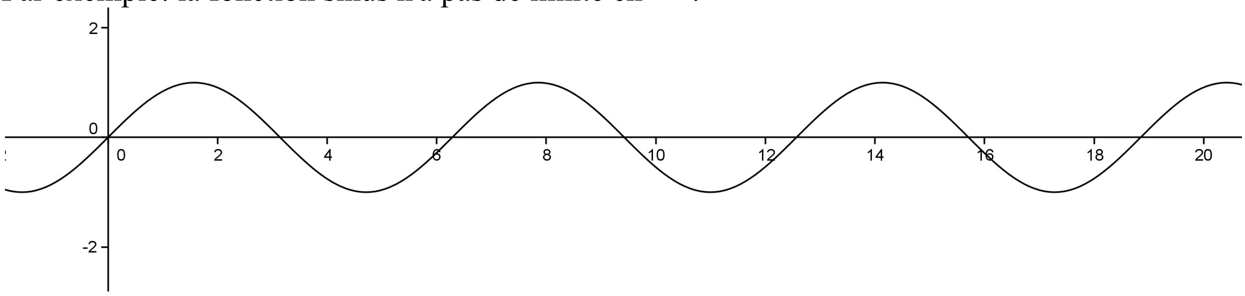
$l - \beta < f(x) < l + \beta$ dès que $x > x_0$.

Exemples: $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1}{x} = 0$

$\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1}{\sqrt{x}} = 0$.

Remarques:

– Certaines fonctions n'ont aucun de ces comportements en +∞. On dit alors que la fonction n'a pas de limite en +∞.
Par exemple: la fonction sinus n'a pas de limite en +∞.



– Si f est définie sur]-∞; a [, on définit de même des limites quand x tend vers -∞. On notera $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$ une telle limite.
Exemples: $\lim\limits_{x \to -\infty} x^2 = +\infty$

$\lim\limits_{x \to -\infty} x^3 = -\infty$

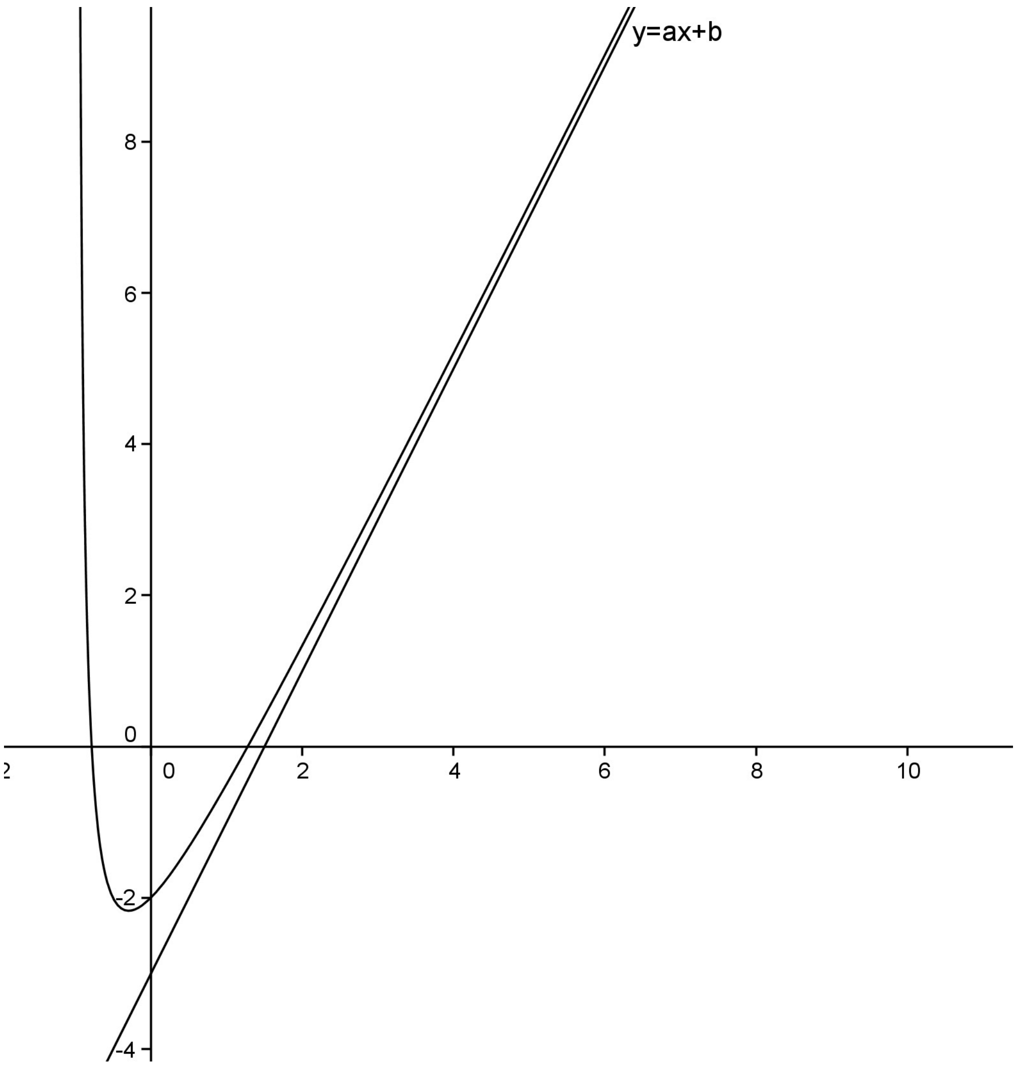
$\lim\limits_{x \to -\infty} 6 - \frac{1}{x} = 6$

2. Asymptotes.

Définition: Soit f une fonction définie sur un intervalle de la forme $]a\,;+\infty[$

La droite Δ d'équation $y=ax+b$ est asymptote à la courbe représentative de f en $+\infty$ s'il existe une fonction h telle que:

pour tout x appartenant à $]a\,;+\infty[$, $f(x)=ax+b+h(x)$ et $\lim_{x\to+\infty} h(x)=0$.



Propriété: Soit f une fonction définie sur un intervalle de la forme $]a\,;+\infty[$

La droite Δ d'équation $y=ax+b$ est asymptote à la courbe représentative de f en $+\infty$ si et seulement si $\lim_{x\to+\infty} f(x)-(ax+b)=0$.

Preuve:

– Supposons que Δ soit asymptote à $\mathscr{C}$ en $+\infty$.
  Il existe dont une fonction h telle que pour tout x appartenant à $]a\,;+\infty[$, $f(x)=ax+b+h(x)$ où $\lim_{x\to+\infty} h(x)=0$.

Alors $f(x)-(ax+b)=h(x)$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)-(ax+b)=0$.

- Supposons que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)-(ax+b)=0$.
  Posons $h(x)=f(x)-(ax+b)$ pour x appartenant à] a ; $+\infty$[.
  On a donc $\lim\limits_{x\to+\infty} h(x)=0$.
  De plus, $ax+b+h(x)=ax+b+f(x)-(ax+b)=f(x)$ pour x appartenant à] a ; $+\infty$[.
  Donc $f(x)=ax+b+h(x)$ avec $\lim\limits_{x\to+\infty} h(x)=0$.
  Donc Δ est asymptote à $\mathscr{C}$ en $+\infty$.

Remarques:

- Pour a =0, on retrouve le cas de l'asymptote horizontale.
- On a, de même, que Δ est asymptote à $\mathscr{C}$ en $-\infty$ s'il existe une fonction h telle que $f(x)=ax+b+h(x)$ où $\lim\limits_{x\to-\infty} h(x)=0$.

Exemple: Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x)=\dfrac{-x^2+x+1}{x}$.

1. Démontrer que pour tout x appartenant à $\mathbb{R}^*$, $f(x)=-x+1+\dfrac{1}{x}$.
2. Déterminer les asymptotes en $+\infty$ et en $-\infty$ à la courbe $\mathscr{C}_f$ représentative de la fonction f.
3. Préciser la position de $\mathscr{C}_f$ par rapport à son asymptote.

Correction.

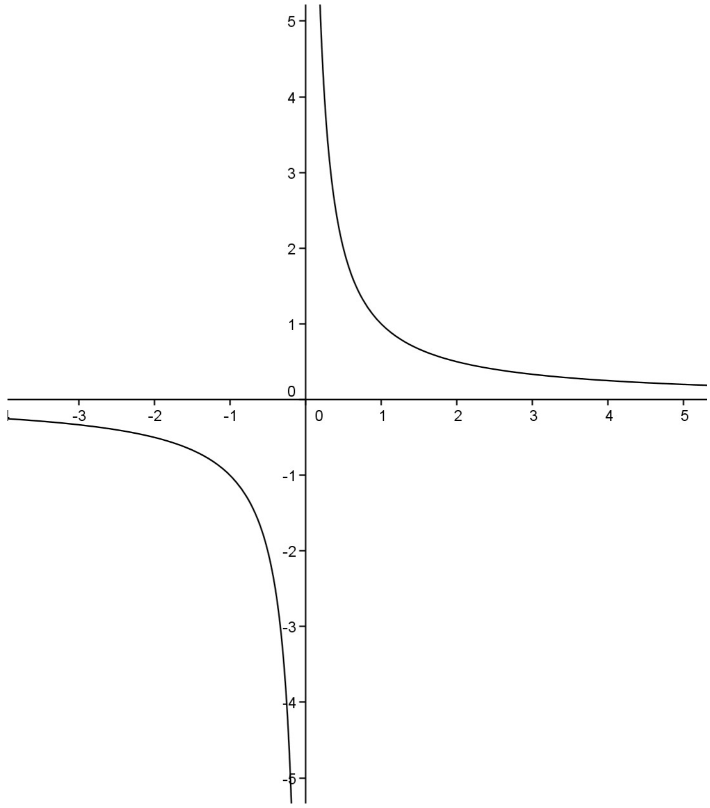
1. Soit $x\in\mathbb{R}^*$, $-x+1+\dfrac{1}{x}=\dfrac{(-x+1)x+1}{x}=\dfrac{-x^2+x+1}{x}=f(x)$.

   D'où pour tout x appartenant à $\mathbb{R}^*$, $f(x)=-x+1+\dfrac{1}{x}$.
2. Soit Δ la droite d'équation $y=-x+1$.
   $f(x)-(-x+1)=-x+1+\dfrac{1}{x}-(-x+1)=\dfrac{1}{x}$.
   $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x}=0$ et $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{1}{x}=0$.
   D'où Δ est asymptote à $\mathscr{C}_f$ en $+\infty$ et en $-\infty$.
3. $f(x)-(-x+1)=-x+1+\dfrac{1}{x}-(-x+1)=\dfrac{1}{x}$.
   $\dfrac{1}{x}>0$ pour $x>0$ et $\dfrac{1}{x}<0$ pour $x<0$.
   Donc Δ est au dessus de $\mathscr{C}_f$ pour $x<0$ et Δ est en dessous de $\mathscr{C}_f$ pour $x>0$.

3. Limite infinie en un réel a.

3.1. Commençons par un exemple.

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x)=\dfrac{1}{x}$.



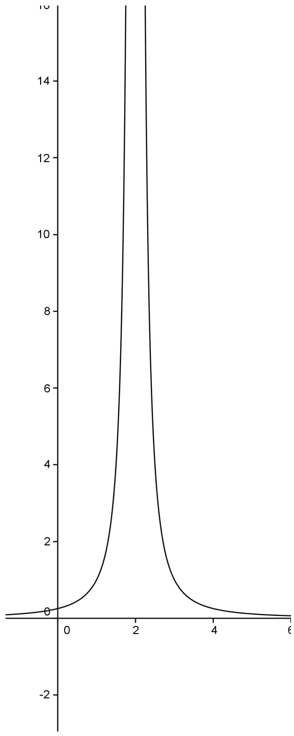
Les réels $f(x)$ dépassent n'importe quel réel A aussi grand que l'on veut pourvu que x soit positif et assez proche de 0.

On dit que f a pour limite $+\infty$ à droite en 0 et on note $\lim_{x\to 0, x>0} \frac{1}{x} = +\infty$.

De même, $\lim_{x\to 0, x<0} \frac{1}{x} = -\infty$.

3.2. Définition.

Si f est définie sur $]a-\alpha; a[$ ou sur $]a; a+\alpha[$, ou sur leur réunion, on dit que $f(x)$ tend vers $+\infty$ quand x tend vers a si $f(x)$ peut-être rendu aussi grand que l'on veut à condition de prendre x suffisamment proche de a .



On définit de façon analogue le fait que $f(x)$ tende vers -∞ quand x tend vers a.

3.3. Propriété.

On admettra la propriété suivante.

Propriété:

- Si $\lim_{x \to a} g(x) = 0^+$, alors $\lim_{x \to a} \frac{1}{g(x)} = +\infty$.
- Si $\lim_{x \to a} g(x) = 0^-$, alors $\lim_{x \to a} \frac{1}{g(x)} = -\infty$.

Exemples:

1) $\lim_{x \to 2} (x-2)^2 = 0^+$ d'où $\lim_{x \to 2} \frac{1}{(x-2)^2} = +\infty$.

2) $\lim_{x \to 3, x>3} x-3 = 0^+$ d'où $\lim_{x \to 3, x>3} \frac{1}{x-3} = +\infty$,

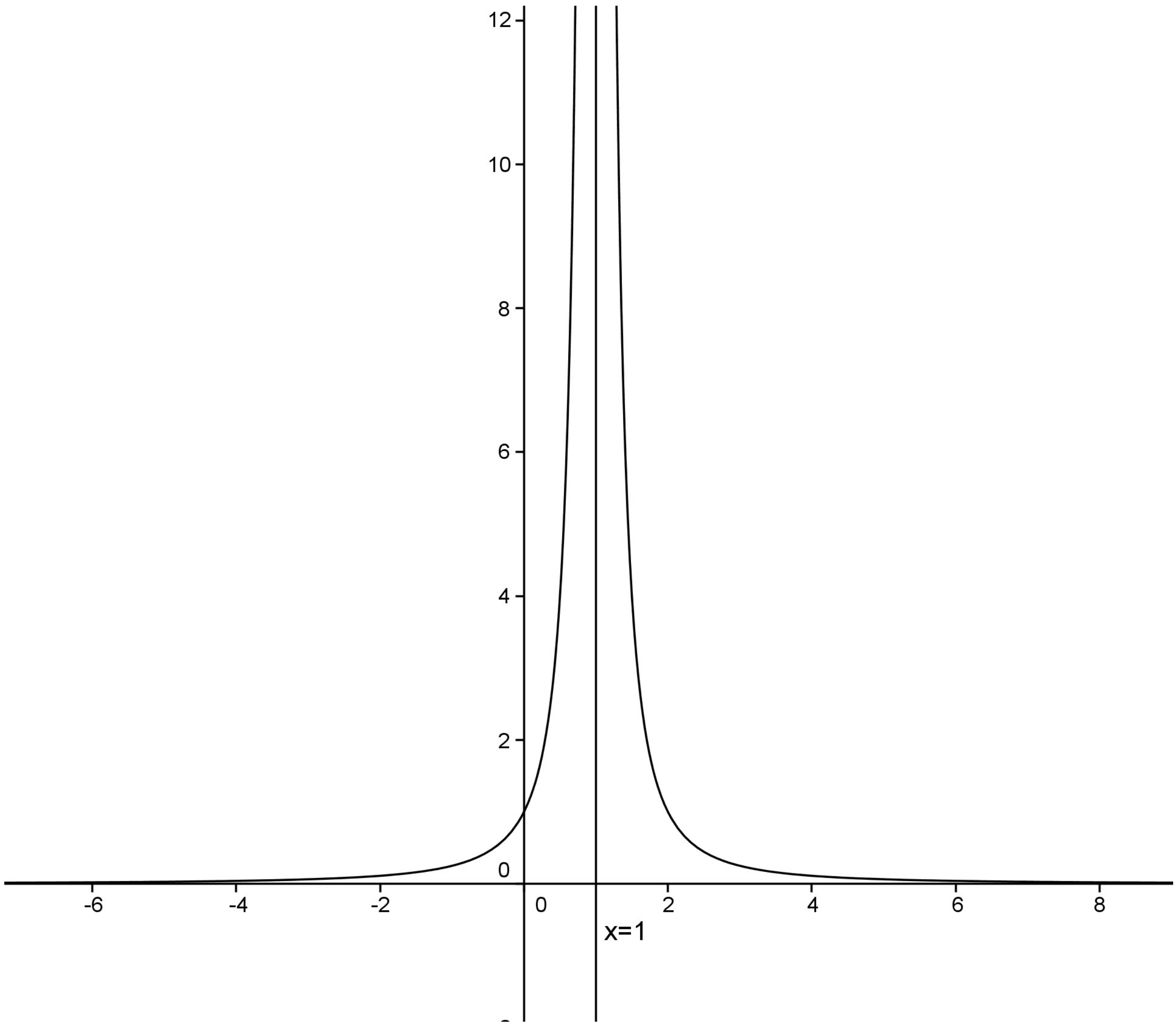
$\lim_{x \to 3, x<3} x-3 = 0^-$ d'où $\lim_{x \to 3, x<3} \frac{1}{x-3} = -\infty$

d'où $\lim_{x \to 3} \frac{1}{x-3}$ n'existe pas.

3.4. Asymptote verticale.

Définition:

Soit f une fonction, $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative et a un réel.
Lorsque la limite (ou la limite à droite, ou à gauche) de f en a est $+\infty$ ou $-\infty$, on dit que la droite d'équation $x=a$ est asymptote verticale à la courbe $\mathscr{C}_f$.



La courbe représentative de la fonction f définie sur $\mathbb{R}\{1\}$ par $f(x)=\frac{1}{(x-1)^2}$ admet pour asymptote la droite d'équation $x=1$.

4. Limites et Opérations

Soit f et g deux fonctions, l et l' deux réels,
a désigne indifféremment un nombre réel, $+\infty$ ou $-\infty$.

4.1. Somme.

$\lim\limits_{x\to a} f(x)$	l	l	l	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$
$\lim\limits_{x\to a} g(x)$	l'	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$\lim\limits_{x\to a} (f+g)(x)$	$l+l'$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	Forme indéterminée

Exemples:

$$\lim_{x\to+\infty} x^2+3x=\lim_{x\to+\infty} x^2+\lim_{x\to+\infty} 3x=+\infty+\infty=+\infty$$

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{2}{x}-5x=\lim_{x\to-\infty} \frac{2}{x}+\lim_{x\to-\infty} -5x=0+\infty=+\infty$$

4.2. Produit.

$\lim\limits_{x\to a} f(x)$	l	$l\neq 0$	$l\neq 0$	0	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$
$\lim\limits_{x\to a} g(x)$	l'	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$ ou $-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$\lim\limits_{x\to a} (fg)(x)$	ll'	$+\infty$ si $l>0$ $-\infty$ si $l<0$	$-\infty$ si $l>0$ $+\infty$ si $l<0$	Forme indéterminée	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$

Exemple: $\lim\limits_{x\to+\infty} x^2\left(-3+\dfrac{1}{x}\right)=\lim\limits_{x\to+\infty} x^2\times\lim\limits_{x\to+\infty} -3+\dfrac{1}{x}=+\infty\times(-3)=-\infty$

4.3. Inverse.

$\lim\limits_{x\to a} f(x)$	$l\neq 0$	$+\infty$	$-\infty$	0^+	0^-	0
$\lim\limits_{x\to a} \dfrac{1}{f(x)}$	$\dfrac{1}{l}$	0	0	$+\infty$	$-\infty$	Forme indéterminée

4.4. Quotient.

$\lim\limits_{x\to a} f(x)$	l	0	$l\neq 0$	$+\infty$ ou $-\infty$
$\lim\limits_{x\to a} g(x)$	$l'\neq 0$	0	$-\infty$ ou $+\infty$	$+\infty$ ou $-\infty$
$\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f}{g}(x)$	$\dfrac{l}{l'}$	Forme indéterminée	0	Forme indéterminée.

Exemple:

$\lim_{x\to+\infty} 2+\frac{1}{x}=2$ et $\lim_{x\to+\infty} x^2=+\infty$ d'où $\lim_{x\to+\infty}\frac{2+\frac{1}{x}}{x^2}=0$

4.5. Quelques règles.

On retiendra les règles suivantes, que l'on peut facilement démontrer grâce aux règles de calculs.

Règle 1:

En $+\infty$ et en $-\infty$, un polynôme a la même limite que son monôme de plus haut degré.

Justification:

Soit f la fonction polynôme définie sur ℝ par $f(x)=a_n x^n+a_{n-1}x^{n-1}+..+a_1 x+a_0$ avec $a_n\neq 0$.

Lorsque $x\neq 0$, $f(x)=a_n x^n\left(1+\frac{a_{n-1}}{a_n x}+..+\frac{a_1}{a_n x^{n-1}}+\frac{a_0}{a_n x^n}\right)$.

Or $\lim_{x\to+\infty}\frac{a_{n-1}}{a_n x}=0$, …, $\lim_{x\to+\infty}\frac{a_1}{a_n x^{n-1}}=0$, $\lim_{x\to+\infty}\frac{a_0}{a_n x^n}=0$.

Nous obtenons $\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{a_{n-1}}{a_n x}+..+\frac{a_1}{a_n x^{n-1}}+\frac{a_0}{a_n x^n}\right)=1$.

Par suite, $\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty} a_n x^n$.

Exemples:

$\lim_{x\to+\infty} 5x^2-6x+1=\lim_{x\to+\infty} 5x^2=+\infty$

$\lim_{x\to-\infty} 4x^3-2x^2+4=\lim_{x\to-\infty} 4x^3=-\infty$

Nous admettrons la règle suivante:

Règle 2:

En $+\infty$ et en $-\infty$, la limite de la fonction rationnelle définie par $f(x)=\frac{a_n x^n+..+a_0}{b_p x^p+..+b_0}$ $(a_n\neq 0, b_p\neq 0)$ est celle de $x\mapsto\frac{a_n x^n}{b_p x^p}$.

Exemples:

$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2-3x+2}{4x^2-5x+1}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2}{4x^2}=\frac{1}{4}$.

$\lim_{x\to-\infty}\frac{3x^3+2x^2-7x+1}{x^2-3x+2}=\lim_{x\to-\infty}\frac{3x^3}{x^2}=\lim_{x\to-\infty} 3x=-\infty$