Exercices Fiche 1

Exercice 1:

Déterminer les limites éventuelles de $f(x)$ quand x tend vers +∞ et quand x tend vers -∞.

1. $f(x)=5x$
2. $f(x)=3+x$
3. $f(x)=-x$
4. $f(x)=5-x$

Exercice 2:

Déterminer les limites éventuelles de $f(x)$ quand x tend vers +∞ et quand x tend vers -∞.

1. $f(x)=2x^2$
2. $f(x)=\dfrac{4}{x}$
3. $f(x)=-5\sqrt{x}$

Exercice 3:

Déterminer les limites éventuelles de $f(x)$ quand x tend vers +∞ et quand x tend vers -∞.

1. $f(x)=(2x-1)(3-5x)$
2. $f(x)=\left(2+\dfrac{2}{x}\right)(2x-5)$
3. $f(x)=\left(3-\dfrac{1}{x^2}\right)\left(5+\dfrac{2}{x}\right)$

Exercice 4:

Déterminer les limites éventuelles de $f(x)$ quand x tend vers +∞ et quand x tend vers -∞.

1. $f(x)=5x^4+7x^2+1$
2. $f(x)=4x^3-5x^2+3x$
3. $f(x)=\dfrac{3x^2-5}{x^2+2}$
4. $f(x)=\dfrac{2-3x^2}{4x+1}$.

Exercice 5:

Soit f la fonction définie pour $x\neq 5$ par $f(x)=\dfrac{2x+4}{x-5}$.

Montrer que la courbe représentant f admet une asymptote horizontale en +∞ et -∞.

Exercice 6:

Soit f la fonction définie pour $x\neq 2$ par $f(x)=2x-3+\dfrac{3}{x-2}$.

1. Déterminer la limite de f en +∞ et en -∞.
2. Justifier que la courbe représentative de f admet une asymptote que vous déterminerez en +∞ et en -∞.

Exercice 7:

Déterminer les limites suivantes:

1. $\lim\limits_{x\to 1, x>1} \dfrac{1}{x-1}$
2. $\lim\limits_{x\to 2, x<2} \dfrac{-3x}{2x-4}$

3. $\lim_{x \to 2} \dfrac{3x-1}{(x-2)^2}$.

Exercice 8:

Étudier les limites éventuelles de $f(x)$ quand x tend vers a.

1. $f(x)=\dfrac{4x^2-5}{5x+15}$, $a=-3$.
2. $f(x)=\dfrac{3x}{(x+2)(3-x)}$, $a=-2$.
3. $f(x)=\dfrac{2}{x^2-1}$, $a=1$.

Exercice 9:

Soit $f(x) = \dfrac{2x^2-x+1}{x-1}$ pour $x \neq 1$ et C sa courbe représentative.

1. Déterminer trois réels a, b et c tels que pour tout x différent de 1, $f(x) = ax + b + \dfrac{c}{x-1}$.

2. a. Déterminer les limites de f en $-\infty$ et en $+\infty$.
b. Montrer que C admet une asymptote Δ en $-\infty$ et en $+\infty$ et étudier la position de C par rapport à Δ.

3. a. Étudier le comportement de $f(x)$ quand x tend vers 1.
b. Interpréter graphiquement.

4. Déterminer les variations de la fonction f.

5. Tracer C et Δ.

CORRECTION

Exercice 1:

Déterminer les limites éventuelles de $f(x)$ quand x tend vers +∞ et quand x tend vers -∞.

1. $f(x)=5x$

$\lim_{x\to+\infty} 5x=+\infty$

$\lim_{x\to-\infty} 5x=-\infty$

2. $f(x)=3+x$

$\lim_{x\to+\infty} 3+x=+\infty$

$\lim_{x\to-\infty} 3+x=-\infty$

3. $f(x)=-x$

$\lim_{x\to+\infty} -x=-\infty$

$\lim_{x\to-\infty} -x=+\infty$

4. $f(x)=5-x$

$\lim_{x\to+\infty} 5-x=-\infty$

$\lim_{x\to-\infty} 5-x=+\infty$

Exercice 2:

Déterminer les limites éventuelles de $f(x)$ quand x tend vers +∞ et quand x tend vers -∞.

1. $f(x)=2x^2$

$\lim_{x\to+\infty} 2x^2=+\infty$

$\lim_{x\to-\infty} 2x^2=+\infty$

2. $f(x)=\frac{4}{x}$

$\lim_{x\to+\infty} \frac{4}{x}=0$

$\lim_{x\to-\infty} \frac{4}{x}=0$

3. $f(x)=-5\sqrt{x}$

$\lim_{x\to+\infty} -5\sqrt{x}=-\infty$

Exercice 3:

Déterminer les limites éventuelles de $f(x)$ quand x tend vers +∞ et quand x tend vers -∞.

1. $f(x)=(2x-1)(3-5x)$

$\lim\limits_{x\to+\infty} 2x-1=+\infty$ *et* $\lim\limits_{x\to+\infty} 3-5x=-\infty$, donc:
$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=-\infty$

$\lim\limits_{x\to-\infty} 2x-1=-\infty$ *et* $\lim\limits_{x\to-\infty} 3-5x=+\infty$, donc:
$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$

2. $f(x)=\left(2+\dfrac{2}{x}\right)(2x-5)$

$\lim\limits_{x\to+\infty} 2+\dfrac{2}{x}=2$ *et* $\lim\limits_{x\to+\infty} 2x-5=+\infty$, donc:
$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$

$\lim\limits_{x\to-\infty} 2+\dfrac{2}{x}=2$ *et* $\lim\limits_{x\to-\infty} 2x-5=-\infty$, donc:
$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$

3. $f(x)=\left(3-\dfrac{1}{x^2}\right)\left(5+\dfrac{2}{x}\right)$

$\lim\limits_{x\to+\infty} 3-\dfrac{1}{x^2}=3$ *et* $\lim\limits_{x\to+\infty} 5+\dfrac{2}{x}=5$, donc:
$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=15$

$\lim\limits_{x\to-\infty} 3-\dfrac{1}{x^2}=3$ *et* $\lim\limits_{x\to-\infty} 5+\dfrac{2}{x}=5$, donc:
$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=15$

Exercice 4:

Déterminer les limites éventuelles de $f(x)$ quand x tend vers +∞ et quand x tend vers -∞.

1. $f(x)=5x^4+7x^2+1$

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty} 5x^4=+\infty$
$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty} 5x^4=+\infty$

2. $f(x)=4x^3-5x^2+3x$

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty} 4x^3=+\infty$
$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty} 4x^3=-\infty$

3. $f(x)=\dfrac{3x^2-5}{x^2+2}$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{3x^2}{x^2}=\lim_{x\to+\infty} 3=3$$
$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty}\frac{3x^2}{x^2}=\lim_{x\to-\infty} 3=3$$

4. $f(x)=\dfrac{2-3x^2}{4x+1}$.

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{-3x^2}{4x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{-3x}{4}=-\infty$$
$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty}\frac{-3x^2}{4x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{-3x}{4}=+\infty$$

Exercice 5:

Soit f la fonction définie pour $x\neq 5$ par $f(x)=\dfrac{2x+4}{x-5}$.

Montrer que la courbe représentant f admet une asymptote horizontale en +∞ et -∞.

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{2x}{x}=\lim_{x\to+\infty} 2=2$$
$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty}\frac{2x}{x}=\lim_{x\to-\infty} 2=2$$

Donc, la droite d'équation $y=2$ est asymptote à la courbe en +∞ et -∞.

Exercice 6:

Soit f la fonction définie pour $x\neq 2$ par $f(x)=2x-3+\dfrac{3}{x-2}$.

1. Déterminer la limite de f en +∞ et en -∞.
2. Justifier que la courbe représentative de f admet une asymptote que vous déterminerez en +∞ et en -∞.

1. $\lim_{x\to+\infty} 2x-3=\lim_{x\to+\infty} 2x=+\infty$ et $\lim_{x\to+\infty}\dfrac{3}{x-2}=0$, donc:

$\lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$

$\lim_{x\to-\infty} 2x-3=\lim_{x\to-\infty} 2x=-\infty$ et $\lim_{x\to-\infty}\dfrac{3}{x-2}=0$, donc:

$\lim_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$

2. On appelle (d) la droite d'équation $y=2x-3$

$$f(x)-(2x-3)=\frac{3}{x-2}$$

et, $\lim_{x\to+\infty}\dfrac{3}{x-2}=0$ et $\lim_{x\to-\infty}\dfrac{3}{x-2}=0$

Donc, la courbe représentative de f admet comme asymptote oblique en +∞ et en -∞ la droite (d) d'équation $y=2x-3$.

Exercice 7:

Déterminer les limites suivantes:

1. $\lim\limits_{x\to 1, x>1} \dfrac{1}{x-1}$

$x-1=0$
$\Leftrightarrow x=1$

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$x-1$		$-$	0	$+$	

$\lim\limits_{x\to 1, x>1} \dfrac{1}{x-1}=+\infty$

2. $\lim\limits_{x\to 2, x<2} \dfrac{-3x}{2x-4}$

$2x-4=0$
$\Leftrightarrow x=2$

x	$-\infty$		2		$+\infty$
$2x-4$		$-$	0	$+$	

$-3\times 2=-6<0$

$\lim\limits_{x\to 2, x<2} \dfrac{-3x}{2x-4}=+\infty$

3. $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{3x-1}{(x-2)^2}$

$(x-2)^2=0$
$\Leftrightarrow x=2$

$(x-2)^2\geqslant 0$

$3\times 2-1=5>0$

$\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{3x-1}{(x-2)^2}=+\infty$

Exercice 8:

Étudier les limites éventuelles de $f(x)$ quand x tend vers a.

1. $f(x)=\dfrac{4x^2-5}{5x+15}$, $a=-3$.

x	$-\infty$		-3		$+\infty$
$5x+15$		$-$		$+$	

$4\times(-3)^2-5=31>0$

$\lim_{x \to -3, x<-3} f(x) = -\infty$ et $\lim_{x \to -3, x>-3} f(x) = +\infty$

2. $f(x) = \dfrac{3x}{(x+2)(3-x)}$, $a = -2$.

x	$-\infty$		-2		3		$+\infty$
$x+2$		$-$	0	$+$		$+$	
$3-x$		$+$		$+$	0	$-$	
$(x+2)(3-x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

$3 \times (-2) = -6 < 0$

$\lim_{x \to -2, x<-2} f(x) = +\infty$ et $\lim_{x \to -2, x>-2} f(x) = -\infty$

3. $f(x) = \dfrac{2}{x^2 - 1}$, $a = 1$

$x^2 - 1 = 0$
$\Leftrightarrow x = 1$ ou $x = -1$

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
x^2-1		$+$	0	$-$	0	$+$	

$2 > 0$

$\lim_{x \to 1, x<1} f(x) = -\infty$ et $\lim_{x \to 1, x>1} f(x) = +\infty$

Exercice 9:

Soit $f(x) = \dfrac{2x^2 - x + 1}{x - 1}$ pour $x \neq 1$ et C sa courbe représentative.

1. Déterminer trois réels a , b et c tels que pour tout x différent de 1, $f(x) = ax + b + \dfrac{c}{x-1}$.
2. a. Déterminer les limites de f en - ∞ et en +∞.
   b. Montrer que C admet une asymptote Δ en - ∞ et en +∞ et étudier la position de C par rapport à Δ.
3. a. Étudier le comportement de $f(x)$ quand x tend vers 1.
   b. Interpréter graphiquement.
4. Déterminer les variations de la fonction f.
5. Tracer C et Δ.

1. $f(x) = ax + b + \dfrac{c}{x-1}$

$f(x) = \dfrac{(ax+b)(x-1)+c}{x-1}$

$f(x) = \dfrac{ax^2 - ax + bx - b + c}{x-1}$

$f(x) = \dfrac{ax^2 + (b-a)x + c - b}{x-1} = \dfrac{2x^2 - x + 1}{x-1}$

Donc
a=2

$b-a=-1$
$\Leftrightarrow b-2=-1$
$\Leftrightarrow b=2-1=1$
$c-b=1$
$c-1=1$
$c=2$

Donc, pour tout x différent de 1:
$f(x)=\frac{2x^2-x+1}{x-1}=2x+1+\frac{2}{x-1}$

2. a) $\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{2x^2}{x}=\lim_{x\to+\infty}2x=+\infty$

$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty}\frac{2x^2}{x}=\lim_{x\to-\infty}2x=-\infty$

b) On appelle Δ la droite d'équation $y=2x+1$

$f(x)-(2x+1)=\frac{2}{x-1}$

avec

$\lim_{x\to+\infty}\frac{2}{x-1}=0$ et $\lim_{x\to-\infty}\frac{2}{x-1}=0$

Donc, la courbe représentative de la fonction f admet comme asymptote oblique en $+\infty$ et en $-\infty$ la droite Δ d'équation $y=2x+1$

$f(x)-(2x+1)=\frac{2}{x-1}$

$x-1=0$
$\Leftrightarrow x=1$

x	$-\infty$		1		$+\infty$
x-1		$-$	0	$+$	

2>0

Donc, la courbe représentative de la fonction f est au-dessus de Δ sur $]1;+\infty[$ et la courbe représentative de la fonction f est en-dessous de Δ sur $]-\infty;1[$.

3) a) $f(x)=\frac{2x^2-x+1}{x-1}$

x	$-\infty$		1		$+\infty$
x-1		$-$	0	$+$	

$2\times1^2-1+1=2>0$

$\lim_{x\to1,x<1} f(x)=-\infty$ et $\lim_{x\to1,x>1} f(x)=+\infty$

b) D'après la question 3)a) la droite d'équation $x=1$ est asymptote verticale à la courbe représentative de la fonction f .

4. La fonction f est définie et dérivable sur $\mathbb{R}\setminus\{1\}$.

$$f(x)=\frac{2x^2-x+1}{x-1}$$

On pose $u(x)=2x^2-x+1$ $\quad u'(x)=4x-1$

$v(x)=x-1$ $\quad v'(x)=1$

$$f'(x)=\frac{(4x-1)(x-1)-1(2x^2-x+1)}{(x-1)^2}$$

$$f'(x)=\frac{4x^2-4x-x+1-2x^2+x-1}{(x-1)^2}$$

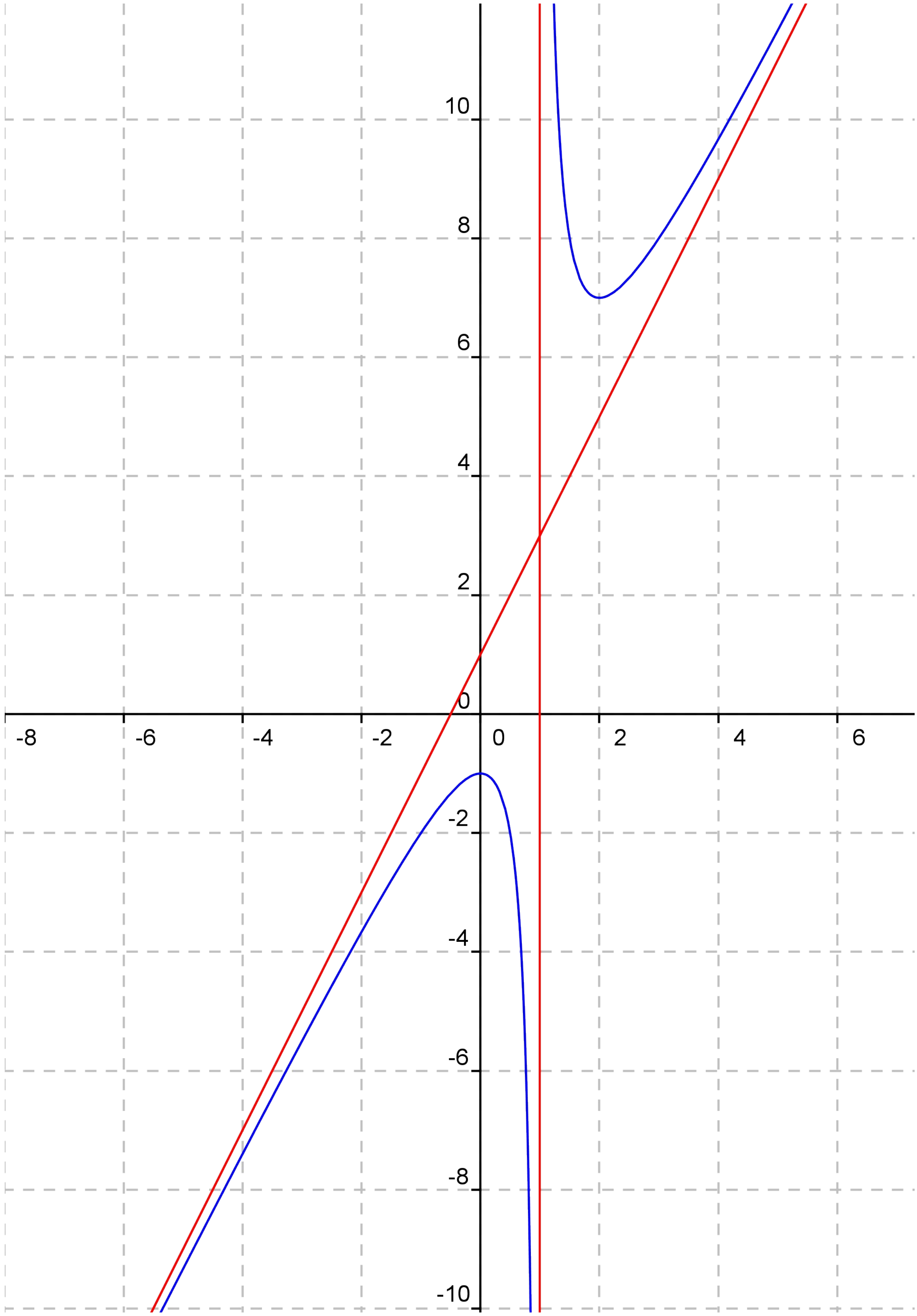
$$f'(x)=\frac{2x^2-4x}{(x-1)^2} \qquad f'(x)=\frac{2x(x-2)}{(x-1)^2}$$

$2x(x-2)=0$

$\Leftrightarrow x=0$ ou $x=2$

x	$-\infty$		0		1		2		$+\infty$
$f'(x)$		+	0	–	‖	–	0	+	
$f(x)$	$-\infty$	↗	-1	↘	$-\infty$ ‖ $+\infty$	↘	7	↗	$+\infty$

5.


10
8
6
4
2
0
-8
-6
-4
-2
0
2
4
6
-2
-4
-6
-8
-10

