## Exercices Fiche 2

### Exercice 1:

Déterminer les limites éventuelles des fonctions suivantes:

1. $f(x) = 4 - x$ en $+\infty$
2. g( $x$ ) = $5x^4 - 3x^2$ en $+\infty$
3. j( $x$ ) = $\dfrac{4x^2-3}{x+4}$ en $-\infty$
4. k( $x$ ) = $\dfrac{x+1}{(3-x)^2}$ en 3
5. l( $x$ ) = $\dfrac{2}{x^2-1}$ en 1.

### Exercice 2:

Soit la fonction $f$ définie par $f(x) = \dfrac{2x^2-7x+9}{x-2}$

1. Déterminer le domaine $D$ de définition de la fonction $f$.
2. Démontrer que pour tout $x \in D$, $f(x) = 2x - 3 + \dfrac{3}{x-2}$.
3. Déterminer la limite de $f$ en $+\infty$ et en $-\infty$.
4. Montrer que la courbe $C_f$ représentative de la fonction $f$ admet une asymptote $\Delta$ en $+\infty$ et en $-\infty$.
5. Donner la position relative de $C_f$ et de $\Delta$ en fonction des valeurs de $x$.
6. a. Déterminer la limite de f en 2.
   b. Interpréter géométriquement.
7. Dresser le tableau de variation de $f$.
8. Déterminer la tangente $T$ à la courbe $C_f$ au point d'abscisse $x = 1$.
9. Tracer $C_f$ ainsi que les asymptotes dans un repère orthonormé du plan.

**CORRECTION**

## Exercice 1:

Déterminer les limites éventuelles des fonctions suivantes:

1. $f(x)=4-x$ en $+\infty$

$$\lim_{x\to+\infty} 4-x=-\infty$$

2. $g(x)=5x^4-3x^2$ en $+\infty$

$$\lim_{x\to+\infty} 5x^4-3x^2=\lim_{x\to+\infty} 5x^4=+\infty$$

3. $j(x)=\frac{4x^2-3}{x+4}$ en $-\infty$

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{4x^2-3}{x+4}=\lim_{x\to-\infty} \frac{4x^2}{x}=\lim_{x\to-\infty} 4x=-\infty$$

4. $k(x)=\frac{x+1}{(3-x)^2}$ en 3

| $x$ | $-\infty$ | | 3 | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $(3-x)^2$ | | $+$ | 0 | $+$ | |

$3+1=4>0$

$$\lim_{x\to3,x>3} \frac{x+1}{(3-x)^2}=+\infty$$
$$\lim_{x\to3,x<3} \frac{x+1}{(3-x)^2}=+\infty$$

5. $l(x)=\frac{2}{x^2-1}$ en 1.

$x^2-1=0$
$\Leftrightarrow x=1$ ou $x=-1$

| $x$ | $-\infty$ | | $-1$ | | 1 | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x^2-1$ | | $+$ | 0 | $-$ | 0 | $+$ | |

$$\lim_{x\to1,x>1} \frac{2}{x^2-1}=+\infty$$
$$\lim_{x\to1,x<1} \frac{2}{x^2-1}=+\infty$$

## Exercice 2:

Soit la fonction $f$ définie par $f(x)=\frac{2x^2-7x+9}{x-2}$

1. Déterminer le domaine $D$ de définition de la fonction $f$.

$x-2=0$
$\Leftrightarrow x=2$
$D=\mathbb{R}\{2\}$

**2.** Démontrer que pour tout $x \in D$, $f(x)=2x-3+\frac{3}{x-2}$.

$$2x-3+\frac{3}{x-2}=\frac{(2x-3)(x-2)+3}{x-2}=\frac{2x^2-4x-3x+6+3}{x-2}=\frac{2x^2-7x+9}{x-2}=f(x)$$

Donc, pour tout $x \in D$, $f(x)=2x-3+\frac{3}{x-2}$.

**3.** Déterminer la limite de $f$ en $+\infty$ et en $-\infty$.

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+x}\frac{2x^2}{x}=\lim_{x\to+\infty}2x=+\infty$$
$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty}\frac{2x^2}{x}=\lim_{x\to-\infty}2x=-\infty$$

**4.** Montrer que la courbe $C_f$ représentative de la fonction $f$ admet une asymptote $\Delta$ en $+\infty$ et en $-\infty$.

Soit $\Delta$ la droite d'équation $y=2x-3$

$$f(x)-(2x-3)=\frac{3}{x-2}$$

et $\lim_{x\to+\infty}\frac{3}{x-2}=0$ et $\lim_{x\to-\infty}\frac{3}{x-2}=0$

Donc, la courbe $C_f$ représentative de la fonction $f$ admet la droite $\Delta$ d'équation $y=2x+3$ comme asymptote oblique en $+\infty$ et en $-\infty$.

**5.** Donner la position relative de $C_f$ et de $\Delta$ en fonction des valeurs de $x$.

$$f(x)-(2x-3)=\frac{3}{x-2}$$

| $x$ | $-\infty$ | | 2 | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $x-2$ | | $-$ | 0 | $+$ | |

Donc, $C_f$ est au-dessus de $\Delta$ sur $]2;+\infty[$ et $C_f$ est en-dessous de $\Delta$ sur $]-\infty;2[$

**6.** a. Déterminer la limite de $f$ en 2.

$$f(x)=2x-3+\frac{3}{x-2}$$

3>0

| $x$ | $-\infty$ | | 2 | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $x-2$ | | $-$ | 0 | $+$ | |

$$\lim_{x\to2,x>2}\frac{3}{x-2}=+\infty$$

$$\lim_{x\to 2, x<2} \frac{3}{x-2} = -\infty$$

$$2\times 2-3=1$$

Donc,

$$\lim_{x\to 2, x>2} f(x) = +\infty$$
$$\lim_{x\to 2, x<2} f(x) = -\infty$$

b. Interpréter géométriquement.

La droite d'équation $x=2$ est une asymptote verticale à la courbe.

**7.** Dresser le tableau de variation de $f$.

$$f(x) = \frac{2x^2-7x+9}{x-2}$$

$f$ est définie et dérivable sur $D$.

On pose:

$u(x)=2x^2-7x+9$ $\qquad u'(x)=4x-7$

$v(x)=x-2$ $\qquad v'(x)=1$

$$f'(x)=\frac{(4x-7)(x-2)-1(2x^2-7x+9)}{(x-2)^2}$$
$$f'(x)=\frac{4x^2-8x-7x+14-2x^2+7x-9}{(x-2)^2}$$
$$f'(x)=\frac{2x^2-8x+5}{(x-2)^2}$$

$2x^2-8x+5=0$

$\Delta=(-8)^2-4\times 2\times 5=24$

$$x_1=\frac{8-2\sqrt{6}}{4}=\frac{4-\sqrt{6}}{2} \text{ et } x_2=\frac{8+2\sqrt{6}}{4}=\frac{4+\sqrt{6}}{2}$$

| $x$ | $-\infty$ | | $x_1$ | | $2$ | | $x_2$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $+$ | $0$ | $-$ | $\Vert$ | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $f(x)$ | $-\infty$ | $\nearrow$ | | $\searrow$ | $-\infty \Vert +\infty$ | $\searrow$ | | $\nearrow$ | $+\infty$ |

**8.** Déterminer la tangente $T$ à la courbe $C_f$ au point d'abscisse $x=1$.

$T: y=f'(1)(x-1)+f(1)$

Or, $f(1)=\dfrac{2\times 1^2-7\times 1+9}{1-2}=-4$ et $f'(1)=\dfrac{2\times 1^2-8\times 1+5}{(1-2)^2}=-1$

$T: y = -1(x-1) - 4$
$T: y = -x - 3$

**9.** Tracer $C_f$ ainsi que les asymptotes dans un repère orthonormé du plan.