Loi binomiale

1. Coefficients binomiaux

1.1. Remarque

x est un nombre réel et n est un entier naturel non nul. On veut étudier le développement de $(1+x)^n$.

a) pour $n=1$

$\boxed{(1+x)^1=1+x}$

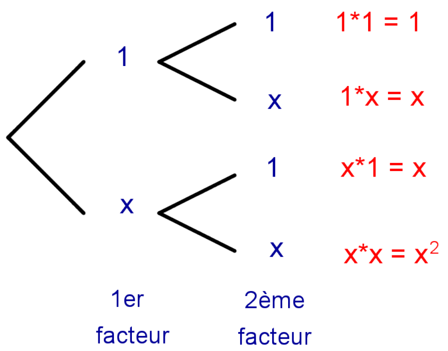
b) pour $n=2$

$(1+x)^2=(1+x)(1+x)$

$(1+x)^2=1+x+x+x^2$

$\boxed{(1+x)^2=1+2x+x^2}$

On peut aussi trouver le développement en construisant l'arbre suivant :



Cet arbre admet 4 chemins : $4=2\times 2=2^2$.

Pour chaque chemin, on calcule le produit des nombres apparaissant dans ce chemin.

Pour le premier chemin, on obtient 1.

Pour les deux chemins suivants, on obtient x .

Pour le dernier chemin, on obtient x^2 .

D'où, $\boxed{(1+x)^2=1+2x+x^2}$

c) pour $n=3$

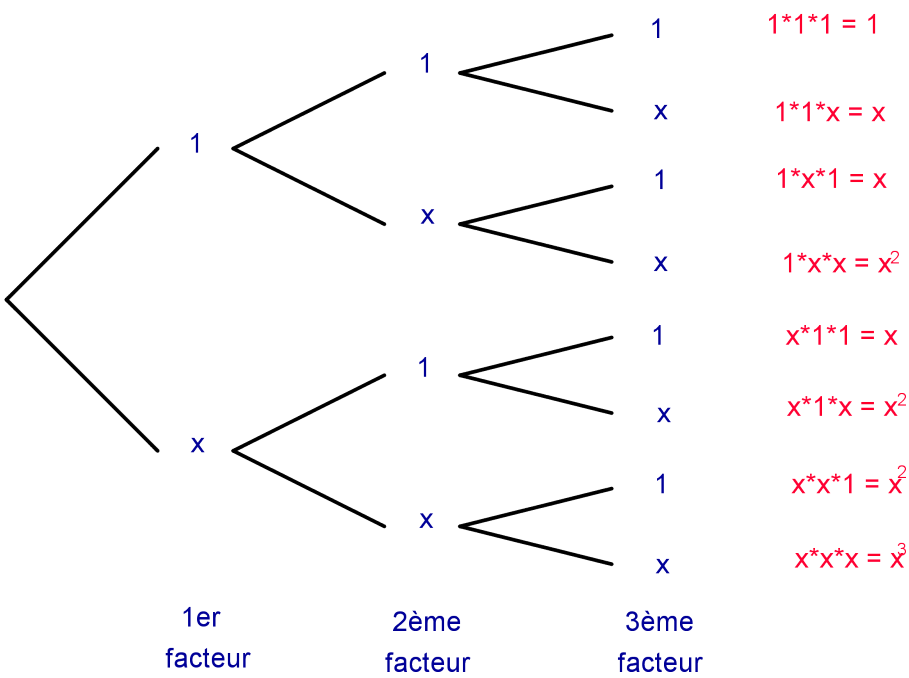
$(1+x)^3=(1+x)(1+x)(1+x)$

$(1+x)^3=(1+x)(1+x+x+x^2)$

$(1+x)^3=1+x+x+x^2+x+x^2+x^2+x^3$

$\boxed{(1+x)^3=1+3x+3x^2+x^3}$

On peut aussi trouver le développement en construisant l'arbre suivant :



Cet arbre admet 8 chemins : $8=2\times 2\times 2=2^3$.

Pour chaque chemin, on calcule le produit des nombres apparaissant dans ce chemin.

Pour 1 chemin, on obtient 1.

Pour 3 chemins, on obtient x .

Pour 3 chemins suivants, on obtient x^2 .

Pour 1 chemin, on obtient x^3 .

D'où, $\boxed{(1+x)^3=1+3x+3x^2+x^3}$

1.2. Conjecture

Pour n entier naturel non nul, le développement de $(1+x)^n$ est :

$(1+x)^n=1+C_1x+C_2x^2+C_3x^3+\ldots+C_kx^k+\ldots+C_nx^n$

On peut obtenir ce développement en construisant un arbre ayant 2^n chemins.

C_2 est le nombre de chemins contenant deux et deux fois seulement x parmi les n facteurs. On note ce chemin $\binom{n}{2}$ et on le nomme **«2 parmi n»** .

k est un nombre naturel non nul inférieur à n .

C_k est le nombre de chemins contenant k fois et k fois seulement x parmi les n facteurs. On note ce chemin $\binom{n}{k}$ et on le nomme **«k parmi n»** .

Conséquence :

$$(1+x)^n=1+\binom{n}{1}x+\binom{n}{2}x^2+\ldots+\binom{n}{k}x^k+\ldots\ldots+\binom{n}{n}x^n$$

1.3. Exemples

En utilisant le développement de $(1+x)^3$, on obtient :

$\binom{3}{1}=3$; $\binom{3}{2}=3$; $\binom{3}{3}=1$.

On convient que : $\binom{n}{0}=1$

1.4. Définition

Pour les entiers naturels k et n vérifiant : $0\leqslant k\leqslant n$.

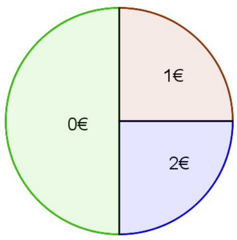
Le nombre **«k parmi n»** $\binom{n}{k}$ est **un coefficient binomial.**

Ce nombre peut être obtenu en utilisant la calculatrice.

2. Répétition d'expériences identiques et indépendantes

2.1. Exemple

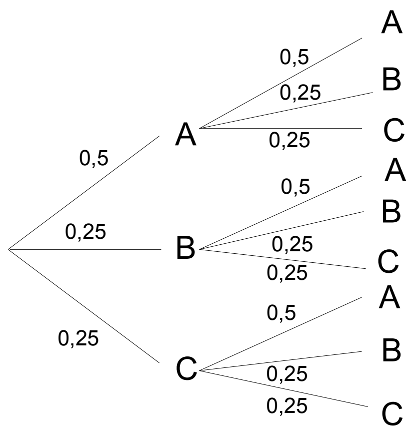
Dans une fête foraine, une roue a une chance sur deux de s'arrêter sur 0€ et une chance sur quatre de s'arrêter sur 1 ou 2€.



On note:
A l'événement « la roue s'arrête sur 0€ ».
B l'événement « la roue s'arrête sur 1€ ».
C l'événement « la roue s'arrête sur 2€ ».

$p(A)=\frac{1}{2}=0{,}5$ $\quad p(B)=\frac{1}{4}=0{,}25$ $\quad p(C)=\frac{1}{4}=0{,}25$

Michaël fait tourner la roue successivement 2fois. L'arbre pondéré est alors:



Calculons la probabilité que Michaël ne gagne rien en tournant 2 fois la roue.
$P_1 = P(A;A) = 0{,}5 \times 0{,}5 = 0{,}25$

Calculons la probabilité que Michaël obtienne (B;A).
$P_2 = P(B;A) = 0{,}25 \times 0{,}5 = 0{,}125$

2.2. Définition

Effectuer **successivement** une même expérience aléatoire, dans les mêmes conditions,c'est réaliser une **succession d'expériences identiques et aléatoires**.

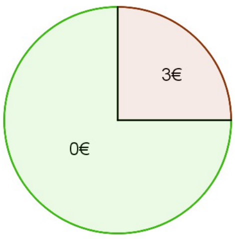
2.3. Propriété

On admet que la probabilité d'une liste de résultats est égale au produit des probabilités de chaque résultat.

3. Lois de Bernoulli

3.1. Exemple

Michaël joue à un nouveau jeu dans la fête foraine. La nouvelle roue a une chance sur quatre de s'arrêter sur 0€, et trois chances sur quatre de s'arrêter sur 3€.



Cette expérience a deux issues.
Le succès que l'on note S : « la roue s'arrête sur 3€ ».
L'échec que l'on note $\overline{S}$: « la roue s'arrête sur 0€ ».

$p(S)=\frac{1}{4}=0,25$ $\quad$ $p(\overline{S})=\frac{3}{4}=0,75$

On dit que cette expérience est **une épreuve de Bernoulli** de paramètre $p=0,25$.

3.2. Définition

On considère une épreuve aléatoire ayant deux issues, l'une des issues est nommée succès que l'on note S, l'autre se nomme échec que l'on note $\overline{S}$.

On note $p(S)=p$ et $p(\overline{S})=q$. Donc $p+q=1$ soit $q=1-p$.

issues	succès	échec
probabilités	p	q

p+q = 1

Une telle épreuve se nomme **épreuve de Bernoulli de paramètre** p .

3.3. Lois de Bernoulli

Au succès, on associe 1, à l'échec, on associe 0.

La loi de Bernoulli associée à cette expérience est la loi de probabilité discrète :

x_i	0	1
p_i	q	p

q=1-p

L'espérance mathématiques est p .

3.4. Simulation d'une loi de Bernoulli avec le classeur d' OpenOffice

a) Premier cas : $q=p=\frac{1}{2}$

Pour ce cas, la simulation dans le classeur d'OpenOffice est simple, dans la colonne A, on utilise la fonction :

ALEA.ENTRE.BORNE(0;1)

Ainsi, en A_1 , on écrit : =alea.entre.bornes(0;1) et on obtient 1 ou 0 avec une probabilité de $\frac{1}{2}$.

Si on veut 100 simulations, on étend la formule jusque A_{100}.

En C_1, on écrit : =somme(A_1:A_{100}). On obtient ainsi le nombre de succès en 100 simulations.

En C_3, on écrit : =C_1/100. On obtient ainsi la fréquence de succès pour les 100 simulations.

Attention, on n'obtient pas nécessairement la fréquence égale à 0,5.

b) Deuxième cas : $p=\frac{1}{5}$ et $q=\frac{4}{5}$.

Pour ce cas, la simulation dans le classeur d'OpenOffice nécessite l'utilisation de deux fonctions du classeur.

Dans la colonne A, on utilise la fonction : **ALEA.ENTRE.BORNE(1;5)**.

Ainsi, en A_1 , on écrit : =alea.entre.bornes(1;5).
Dans la colonne B, on utilise la fonction : **SI**.

Ainsi, en B_1 , on écrit : =si(A_1=1;1;0). On obtient 1 avec une probabilité $\frac{1}{5}$ et 0 avec une probabilité de $\frac{4}{5}$.

Si on veut 500 simulations, on étend les formules jusque A_{500} et B_{500}.

En D_1, on écrit : =somme(B_1:B_{500}). On obtient ainsi le nombre de succès en 500 simulations.

En D_3, on écrit : =D_1/500. On obtient ainsi la fréquence de succès pour les 500 simulations.

c) Troisième cas : $p=\frac{11}{23}$ et $q=\frac{12}{23}$.

Dans la colonne A, on utilise la fonction : **ALEA.ENTRE.BORNE(1;23)**.

Ainsi, en A_1 , on écrit : =alea.entre.bornes(1;23).
Dans la colonne B, on utilise la fonction : **SI**.

Ainsi, en B_1 , on écrit : =si(A_1<12;1;0). On obtient 1 avec une probabilité $\frac{11}{23}$ et 0 avec une probabilité de $\frac{12}{23}$.

Si on veut 200 simulations, on étend les formules jusque A_{200} et B_{200}.

En D_1, on écrit : =somme(B_1:B_{200}). On obtient ainsi le nombre de succès en 200 simulations.

En D_3, on écrit : =D_1/200. On obtient ainsi la fréquence de succès pour les 200 simulations.

d) Quatrième cas : $p=0{,}14$ et $q=0{,}86$.

$0{,}14=\frac{14}{100}$ et $0{,}86=\frac{86}{100}$.

Dans la colonne A, on utilise la fonction : **ALEA.ENTRE.BORNE(1;100)**.

Ainsi, en A_1 , on écrit : =alea.entre.bornes(1;100).
Dans la colonne B, on utilise la fonction : **SI**.

Ainsi, en B_1 , on écrit : =si(A_1<15;1;0). On obtient 1 avec une probabilité $\frac{14}{100}=0{,}14$ et 0 avec une probabilité de $\frac{86}{100}=0{,}86$.

Si on veut 400 simulations, on étend les formules jusque A_{400} et B_{400}.

En D_1, on écrit : =somme(B_1:B_{400}). On obtient ainsi le nombre de succès en 400 simulations.

En D_3, on écrit : =D_1/400. On obtient ainsi la fréquence de succès pour les 400 simulations.

4. Lois binomiales

4.1. Schéma de Bernoulli

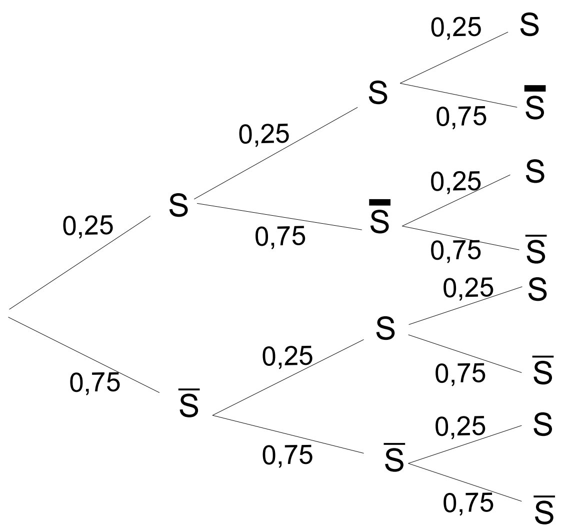
n est un entier naturel non nul. La répétition de n épreuves de Bernoulli identiques et indépendantes se nomme schéma de Bernoulli. On se propose de déterminer la loi de probabilité de la variable aléatoire égale au nombre de succès en n épreuves.

4.2. Exemples

a) <u>Exemple 1</u>

Michaël rejoue à la roue précédente. Il la tourne successivement 3 fois de suite.

On obtient l'arbre pondéré suivant:



On note X la variable aléatoire qui compte le nombre de succès lors des 3 jeux.

En s'aidant de l'arbre des probabilités, on peut déterminer la loi de probabilité de X.

$p(X=0)$
$=p(\overline{S}\ \overline{S}\ \overline{S})$
$=0{,}75\times0{,}75\times0{,}75=0{,}421875$

$p(X=1)$
$=p(S\ \overline{S}\ \overline{S})+p(\overline{S}\ S\ \overline{S})+p(\overline{S}\ \overline{S}\ S)$
$=0{,}25\times0{,}75\times0{,}75+0{,}75\times0{,}25\times0{,}75+0{,}75\times0{,}75\times0{,}25=0{,}421875$

$p(X=2)$
$=p(S\ S\ \overline{S})+\text{p}(S\ \overline{S}\ S)+\text{p}(\overline{S}\ S\ S)$
$=0{,}25\times0{,}25\times0{,}75+0{,}25\times0{,}75\times0{,}25+0{,}75\times0{,}25\times0{,}25=0{,}140625$

$p(X=3)$
$=\text{p}(S\ S\ S)$
$=0{,}25\times0{,}25\times0{,}25=0{,}015625$

On peut aussi calculer l'espérance de X.
$E(X)=0\times 0{,}421875+1\times 0{,}421875+2\times 0{,}140625+3\times 0{,}015625=0{,}75$

On dit que la loi de probabilité de la variable aléatoire X est **la loi binomiale** de paramètre 3 (nombre d'épreuves) et 0,25 (probabilité du succès). On la note **$\mathscr{B}(3;0{,}25)$**.

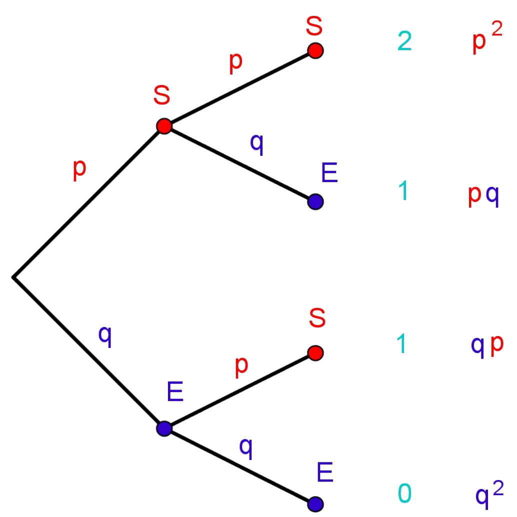
b) Exemple 2

S= succès. $p(S)=p$

$\overline{S}$ =E=échec. $p(\overline{S})=p(E)=q$.

$p+q=1$.

Cas de 2 épreuves identiques et indépendantes :



On détermine le nombre de succès sur chaque chemin et la probabilité pour chaque chemin qui est égale au produit des probabilités intervenant sur ce chemin.

X est la variable aléatoire égale au nombre de succès en 2 épreuves.

L'ensemble des valeurs de X est $\{0;1;2\}$.

$p(X=0)=q^2$

$p(X=1)=pq+qp=2pq$

$2=\binom{2}{1}$ qui est le nombre de chemins contenant exactement 1 succès.

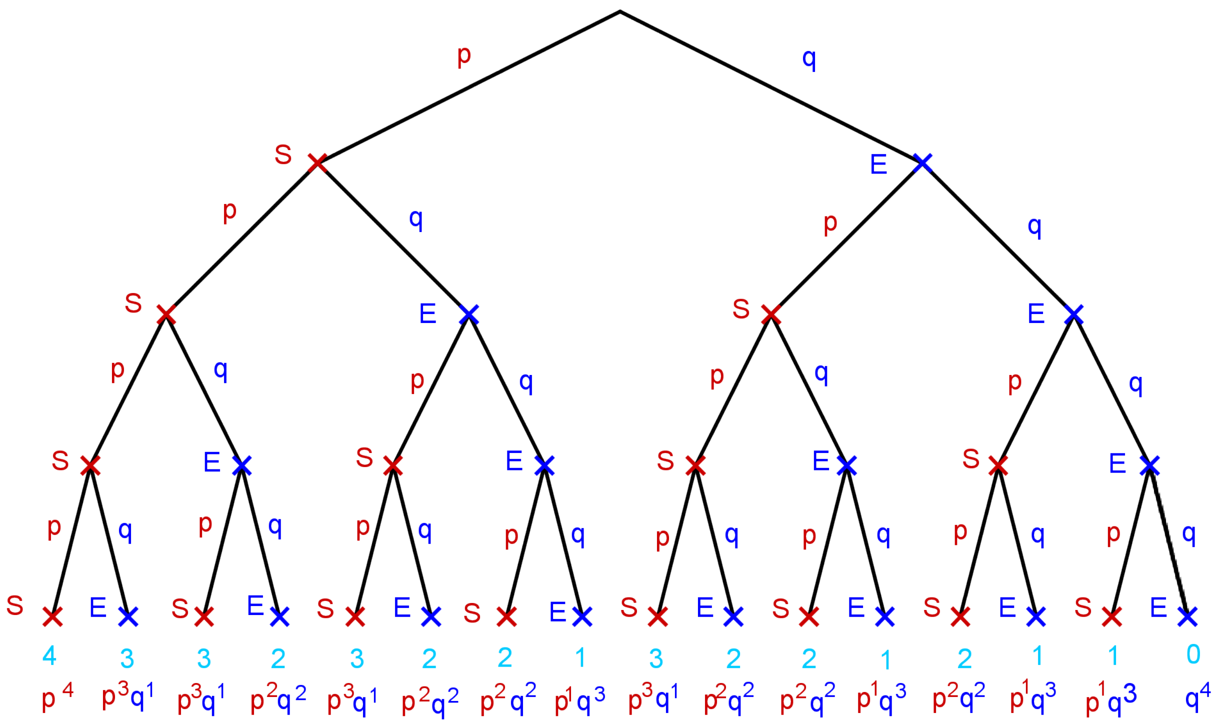
$p(X=2)=p^2$

x_i	0	1	2
p_i	q^2	$2pq$	p^2

Remarque : $q^2+2pq+p^2=(p+q)^2=1$

c) Exemple 3

Cas de 4 épreuves identiques et indépendantes.



$p(X=0)=q^4=\binom{4}{0}q^4$

$1=\binom{4}{0}$ qui est le nombre de chemins contenant aucun succès. « 0 parmi 4 ».

$p(X=1)=4\,p^1q^3=4\,pq^3=\binom{4}{1}pq^3$

$4=\binom{4}{1}$ qui est le nombre de chemins contenant exactement 1 succès. « 1 parmi 4 ».

$p(X=2)=6\,p^2q^2=\binom{4}{2}p^2q^2$

$6=\binom{4}{2}$ qui est le nombre de chemins contenant exactement 2 succès. « 2 parmi 4 ».

$p(X=3)=4\,p^3q^1=4\,p^3q=\binom{4}{3}p^3q$

$4=\binom{4}{3}$ qui est le nombre de chemins contenant exactement 3 succès. « 3 parmi 4 ».

$p(X=4)=p^4=\binom{4}{4}p^4$

$1=\binom{4}{4}$ qui est le nombre de chemins contenant exactement 4 succès. « 4 parmi 4 ».

4.3. Définitions

Lors de la répétition de n épreuves de Bernoulli identiques et indépendantes, on définit la variable aléatoire X égale au nombre de succès obtenus à la fin de n épreuves.

La loi de probabilité de X est appelée **loi binomiale** de paramètres n et p où p est la probabilité de succès de la loi de Bernoulli.

Pour tout entier naturel k vérifiant $0 \leqslant k \leqslant n$:

$$\boxed{p(X=k)=\binom{n}{k}p^k q^{n-k}=\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}}$$

4.4. Espérance mathématique (et variance) d'une loi binomiale

a) Pour les exemples :

exemple 1 : $E(X)=0{,}75$

exemple 2 : $E(X)=0\times q^2+1\times 2pq+2\times p^2=2p(p+q)=2p$

exemple 3 : $E(X)=0\times q^4+1\times 4pq^3+2\times 6p^2q^2+3\times 4p^3q+4p^4$

$E(X)=p[4q^3+12pq^2+12p^2q+4p^3]$

$E(X)=4p[q^3+3pq^2+3p^2q+p^3]$

$E(X)=4p(q+p)^3=4p$

b) On admet les résultats suivants :

L'espérance de la loi binomiale de paramètres n et p est égale à $n\times p$.

La variance de la loi binomiale de paramètres n et p est égale à $n\times p\times q$.

5. Propriétés des coefficients binomiaux

5.1. Symétrie

$n\in\mathbb{N}$ $k\in\mathbb{N}$ $0\leqslant k\leqslant n$ $\quad \boxed{\binom{n}{k}=\binom{n}{n-k}}$

Démonstration :

$\binom{n}{k}$ est le coefficient de x^k dans le développement de $(1+x)^n$

$\binom{n}{k}$ est le nombre de chemins contenant k fois x et k fois seulement donc $\binom{n}{k}$ est le nombre de chemins contenant (n-k) fois 1 et (n-k) fois seulement.

1 et x jouent des rôles semblables dans le développement de $(1+x)^n$ donc : $\binom{n}{k}=\binom{n}{n-k}$

5.2. Propriété de Pascal

$n\in\mathbb{N}^*$ $k\in\mathbb{N}$ $0\leqslant k\leqslant n-1$	$\binom{n}{k}+\binom{n}{k+1}=\binom{n+1}{k+1}$

Vérification sur un exemple :

Pour n=3

$(1+x)^3=1+3x+3x^2+x^3$

$(1+x)^3=\binom{3}{0}\times 1+\binom{3}{1}x+\binom{3}{2}x^2+\binom{3}{3}x^3$

$(1+x)^4=(1+x)^3(1+x)$

$(1+x)^4=\left[\binom{3}{0}\times 1+\binom{3}{1}x+\binom{3}{2}x^2+\binom{3}{3}x^3\right](1+x)$

$(1+x)^4=\binom{3}{0}\times 1+\binom{3}{1}x+\binom{3}{2}x^2+\binom{3}{3}x^3+\binom{3}{0}x+\binom{3}{1}x^2+\binom{3}{2}x^3+\binom{3}{3}x^4$

$(1+x)^4=\binom{3}{0}\times 1+\left[\binom{3}{0}+\binom{3}{1}\right]x+\left[\binom{3}{1}+\binom{3}{2}\right]x^2+\left[\binom{3}{2}+\binom{3}{3}\right]x^3+\binom{3}{3}x^4$

Or, $(1+x)^4=\binom{3}{0}\times 1+\binom{3}{0}x+\binom{3}{0}x^2+\binom{3}{0}x^3+\binom{3}{0}x^4$

On obtient :

$\binom{3}{0}=\binom{4}{0}=1$

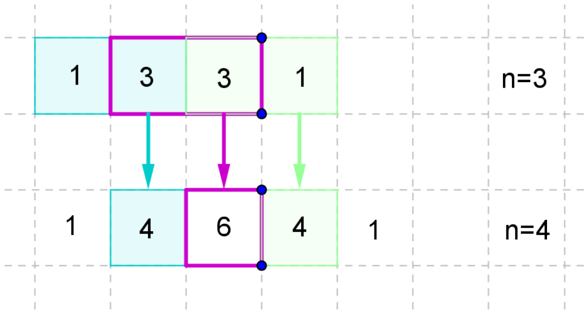
$\binom{3}{0}+\binom{3}{1}=\binom{4}{1}$

$\binom{3}{1}+\binom{3}{2}=\binom{4}{2}$

$\binom{3}{2}+\binom{3}{3}=\binom{4}{3}$

$\binom{3}{3}=\binom{4}{4}=1$

Donc,



5. Triangle de Pascal

On peut calculer les coefficients $\binom{n}{k}$ pour $n \leqslant 8$ en faisant un tableau à double entrée.

n \ k	0	1	2	3	4	5	6	7	8
0	1								
1	1	1							
2	1	2	1						
3	1	3	3	1					
4	1	4	6	4	1				
5	1	5	10	10	5	1			
6	1	6	15	20	15	6	1		
7	1	7	21	35	35	21	7	1	
8	1	8	28	56	70	56	28	8	1