Exercices Fiche 2

Exercice 1 — Loi de probabilité et espérance.

Lors d'une loterie, un joueur mise 1€. S'il gagne la partie, il reçoit 5€; s'il perd la partie, il ne reçoit rien. La probabilité que le joueur gagne la partie est $\frac{7}{30}$.

On note X la variable aléatoire égale au gain algébrique du joueur à l'issue d'une partie.

1. Déterminer la loi de probabilité de X et son espérance E(X).
2. On dit que le jeu est favorable au joueur si E(X)>0. Est-ce le cas pour ce jeu?

Exercice 2 — Loi de probabilité et espérance.

Une entreprise s'intéresse à la durée de vie des machines qu'elle construit. Elle possède un par ce 1000 machines. Une étude sur 100 machines mises en services au premier janvier 2006 donne le nombre de machines encore en service à la date indiquée dans le tableau ci-dessous. Si la machine s'arrête de fonctionner durant l'année 2006, on dira que sa durée de vie a été de 1 an.

Janvier 2006	100
Janvier 2007	96
Janvier 2008	44
Janvier 2009	40
Janvier 2010	20
Janvier 2011	0

1. Soit X la variable aléatoire égale à la durée de vie des machines. Déterminer l'ensemble des valeurs prises par X.
2. On admet que la part des machines tombées en panne chaque année, dans la centaine étudiée, fournit un modèle satisfaisant pour la loi de probabilité de X. Dresser le tableau de la loi de probabilité de X.
3. Calculer:

a) $P(X<3)$ b) $P(X\geqslant 1)$ c) $P(3\leqslant X<5)$

4. Calculer la durée de vie moyenne des machines que l'on peut espérer obtenir.

Exercice 3 — Loi binomiale.

Pour être agréable à Lucie, mais sans se concerter, ses trois amies lui achètent une viennoiserie. Elles savent que Lucie n'aime que les pains au chocolat et les croissants. On admet que les achats de l'une ou l'autre de ces viennoiseries sont équiprobables. On note X la variable aléatoire égale au nombre de pains au chocolat apportés à Lucie.

1. a) Reconnaître la loi de probabilité suivie par X et donner ses paramètres.

b) Donner l'ensemble des valeurs prises par X.

c) Écrire une phrase traduisant l'événement (X=2), puis l'événement (X≥1)

d) Donner, sous la forme d'un coefficient binomial, le nombre d'issues de l'événement (X=2)

2. a) Construire l'arbre pondéré représentant la situation.

b) Calculer la probabilité que Lucie ait deux pains au chocolat et un croissant.

c) Calculer la probabilité que Lucie puisse manger au moins un croissant.

Exercice 4 Loi binomiale.

Suivant qu'un conducteur a ou non des accidents pendant une année, sa compagnie d'assurance augmente ou diminue le montant de son assurance annuelle.

Si un assuré n'a pas d'accident pendant une année, il obtient l'année suivante un bonus de 5%, c'est à dire que le montant de son assurance baisse de 5%.

S'il n'a pas d'accident pendant 2 ans de suite, le montant de son assurance baisse une nouvelle fois de 5% et ainsi de suite jusqu'à une réduction maximum de 50%.

En revanche, si l'assuré a un accident, le montant de son assurance augmente de 25% et ne peut baisser que s'il reste deux ans sans avoir d'accident. Son malus retombe alors à 0%.

On admet qu'un assuré a, au maximum, un seul accident par an.

On suppose que la probabilité qu'un assuré ait un accident au cours d'une année est 0,26 quelle que soit l'année et s'il a eu ou non un accident l'année précédente. On admet aussi que le montant de son assurance n'est modifié que par les bonus et malus obtenus.

Partie A

Soit X la variable aléatoire égale au nombre d'accidents au bout de trois années.

1. a) Quelles sont les valeurs prises par X? Déterminer la loi de probabilité suivie par X.

b) Construire l'arbre pondéré correspondant à l'expérience.

2. Calculer les probabilités:

a) de ne pas avoir d'accident pendant ces 3 années.

b) d'avoir exactement un accident pendant ces 3 années.

c) d'avoir au moins un accident pendant ces 3 années.

Donner les valeurs arrondies à 10^{-4} près.

Partie B

On suppose que l'assuré n'a aucun accident pendant n années. Déterminer, à l'aide de la calculatrice, la valeur de n pour que son bonus atteigne 50%.

Partie C

Soit Y la variable aléatoire égale au pourcentage d'évolution de la prime d'assurance au bout de trois années. A l'aide de l'arbre précédent, déterminer la loi de probabilité de Y. On arrondira les valeurs à 1% près.

Calculer son espérance. En donner son interprétation du point de vue de l'assureur.

CORRECTION

Exercice 1 — Loi de probabilité et espérance.

Lors d'une loterie, un joueur mise 1€. S'il gagne la partie, il reçoit 5€; s'il perd la partie, il ne reçoit rien. La probabilité que le joueur gagne la partie est $\frac{7}{30}$.
On note X la variable aléatoire égale au gain algébrique du joueur à l'issue d'une partie.
1. Déterminer la loi de probabilité de X et son espérance E(X).
2. On dit que le jeu est favorable au joueur si E(X)>0. Est-ce le cas pour ce jeu?

Lors d'une loterie, un joueur mise 1€. S'il gagne la partie, il reçoit 5€; s'il perd la partie, il ne reçoit rien. La probabilité que le joueur gagne la partie est $\frac{7}{30}$.
On note X la variable aléatoire égale au gain algébrique du joueur à l'issue d'une partie.
1. Déterminer la loi de probabilité de X et son espérance E(X).
2. On dit que le jeu est favorable au joueur si E(X)>0. Est-ce le cas pour ce jeu?

1. La loi de probabilité de X est:

x_i	-1	4
$P(X=x_i)$	$\frac{23}{30}$	$\frac{7}{30}$

$$E(X)=\frac{23}{30}\times(-1)+\frac{7}{30}\times 4=\frac{5}{30}=\frac{1}{6}$$

2. $E(X)>0$ donc le jeu est favorable au joueur. Il peut espérer gagner $\frac{1}{6}$ euro en jouant un grand nombre de fois.

Exercice 2 — Loi de probabilité et espérance.

Une entreprise s'intéresse à la durée de vie des machines qu'elle construit. Elle possède un par ce 1000 machines. Une étude sur 100 machines mises en services au premier janvier 2006 donne le nombre de machines encore en service à la date indiquée dans le tableau ci-dessous. Si la machine s'arrête de fonctionner durant l'année 2006, on dira que sa durée de vie a été de 1 an.

Janvier 2006	100
Janvier 2007	96
Janvier 2008	44
Janvier 2009	40
Janvier 2010	20
Janvier 2011	0

1. Soit X la variable aléatoire égale à la durée de vie des machines. Déterminer l'ensemble des valeurs prises par X.
2. On admet que la part des machines tombées en panne chaque année, dans la centaine étudiée, fournit un modèle satisfaisant pour la loi de probabilité de X. Dresser le tableau de la loi de probabilité de X.
3. Calculer:
a) $P(X<3)$ b) $P(X\geqslant 1)$ c) $P(3\leqslant X<5)$

4. Calculer la durée de vie moyenne des machines que l'on peut espérer obtenir.
1. L'ensemble des valeurs prises par X est {1;2;3;4;5}
2.

x_i	1	2	3	4	5
$P(X=x_i)$	0,04	0,52	0,04	0,2	0,2

3.
a) $P(X<3)=0{,}04+0{,}52=0{,}56$
b) $P(X\geqslant 1)=1$
c) $P(3\leqslant X<5)=0{,}04+0{,}2=0{,}24$
4. $E(X)=1\times 0{,}04+2\times 0{,}52+3\times 0{,}04+4\times 0{,}2+5\times 02=3$
La durée de vie moyenne des machines que l'on peut espérer obtenir est 3ans.

Exercice 3 — Loi binomiale.

Pour être agréable à Lucie, mais sans se concerter, ses trois amies lui achètent une viennoiserie. Elles savent que Lucie n'aime que les pains au chocolat et les croissants. On admet que les achats de l'une ou l'autre de ces viennoiseries sont équiprobables. On note X la variable aléatoire égale au nombre de pains au chocolat apportés à Lucie.

1. a) Reconnaître la loi de probabilité suivie par X et donner ses paramètres.

b) Donner l'ensemble des valeurs prises par X.

c) Écrire une phrase traduisant l'événement (X=2), puis l'événement (X≥1)

d) Donner, sous la forme d'un coefficient binomial, le nombre d'issues de l'événement (X=2)

2. a) Construire l'arbre pondéré représentant la situation.

b) Calculer la probabilité que Lucie ait deux pains au chocolat et un croissant.

c) Calculer la probabilité que Lucie puisse manger au moins un croissant.

1. a) Chaque choix d'une amie est une épreuve de Bernoulli de succès P: « choisir un pain au chocolat » de probabilité $p=\frac{1}{2}=0{,}5$

On a la répétition de 3 épreuves de Bernoulli, identiques et indépendantes. C'est la loi de binomiale:

$\mathcal{B}(3;\,0{,}5)$.

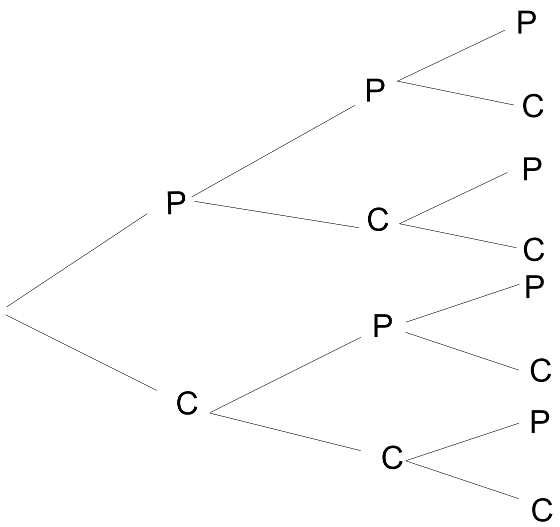
b) Les valeurs prises par X sont {0; 1; 2; 3}

c) (X=2): « Lucie a 2 pains au chocolat ».

(X≥1): « Lucie a au moins un pain au chocolat ».

d) Le nombre d'issues de l'événement (X=2) est $\binom{3}{2}$

2. a)



b) $P(X=2)=\binom{3}{2}(0{,}5)^2\times(0{,}5)=3\times(0{,}5)^3=0{,}375$

La probabilité que Lucie ait deux pains au chocolat et un croissant est 0,375.

c) L'événement Lucie puisse manger au moins un croissant est l'événement ($0\leq X<3$)

L'événement ($0\leq X<3$) est l'événement contraire de l'événement ($X=3$)

$P(X=3)=\binom{3}{3}(0{,}5)^3\times(0{,}5)^0=1\times(0{,}5)^3=0{,}125$

$P(0\leqslant X<3)=1-0{,}125=0{,}875$

La probabilité que Lucie puisse manger au moins un croissant est 0,875.

Exercice 4 — Loi binomiale.

Suivant qu'un conducteur a ou non des accidents pendant une année, sa compagnie d'assurance augmente ou diminue le montant de son assurance annuelle.

Si un assuré n'a pas d'accident pendant une année, il obtient l'année suivante un bonus de 5%, c'est à dire que le montant de son assurance baisse de 5%.

S'il n'a pas d'accident pendant 2 ans de suite, le montant de son assurance baisse une nouvelle fois de 5% et ainsi de suite jusqu'à une réduction maximum de 50%.

En revanche, si l'assuré a un accident, le montant de son assurance augmente de 25% et ne peut baisser que s'il reste deux ans sans avoir d'accident. Son malus retombe alors à 0%.

On admet qu'un assuré a, au maximum, un seul accident par an.

On suppose que la probabilité qu'un assuré ait un accident au cours d'une année est 0,26 quelle que soit l'année et s'il a eu ou non un accident l'année précédente. On admet aussi que le montant de son assurance n'est modifié que par les bonus et malus obtenus.

Partie A

Soit X la variable aléatoire égale au nombre d'accidents au bout de trois années.

1. a) Quelles sont les valeurs prises par X? Déterminer la loi de probabilité suivie par X.

b) Construire l'arbre pondéré correspondant à l'expérience.

2. Calculer les probabilités:

a) de ne pas avoir d'accident pendant ces 3 années.

b) d'avoir exactement un accident pendant ces 3 années.

c) d'avoir au moins un accident pendant ces 3 années.

Donner les valeurs arrondies à 10^{-4} près.

Partie B

On suppose que l'assuré n'a aucun accident pendant n années. Déterminer, à l'aide de la calculatrice, la valeur de n pour que son bonus atteigne 50%.

Partie C

Soit Y la variable aléatoire égale au pourcentage d'évolution de la prime d'assurance au bout de trois années. A l'aide de l'arbre précédent, déterminer la loi de probabilité de Y. On arrondira les valeurs à 1% près.

Calculer son espérance. En donner son interprétation du point de vue de l'assureur.

Partie A

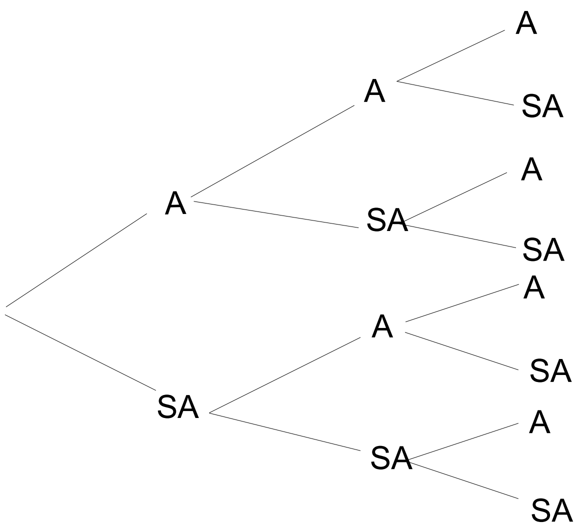
1. a) Les valeurs prises par X sont {0;1;2;3}

On a la répétition de 3 épreuves de Bernoulli, identiques et indépendantes. C'est la loi de binomiale:

b(3; 0,26).

b) On note A l'événement : « avoir un accident »

On note SA l'événement: « sans accident »



c)

x_i	0	1	2	3
$P(X=x_i)$	0,4052	0,4271	0,0500	0,0176

$$P(X=0)=\binom{3}{0}0{,}26^0\times0{,}74^3=0{,}4052$$

$$P(X=1)=\binom{3}{1}0{,}26^1\times0{,}74^2=0{,}4271$$

$P(X=2)=\binom{3}{2}0{,}26^2\times 0{,}74^1=0{,}0500$

$P(X=3)=\binom{3}{3}0{,}26^3\times 0{,}74^0=0{,}0176$

a) la probabilité de ne pas avoir d'accident pendant ces 3 années est P(X=0)=0,4052

b) la probabilité d'avoir exactement un accident pendant ces 3 années est P(X=1)=0,4271

c) la probabilité d'avoir au moins un accident pendant ces 3 années est l'évènement contraire de l'évènement ne pas avoir d'accident pendant ces 3 années donc cette probabilité est 1-0,4052=0,5948

Partie B

A chaque année le montant de son assurance baisse une nouvelle fois de 5%.

Le coefficient multiplicateur lié à une baisse de 5% est $1-\frac{5}{100}=0{,}95$

On veut que le bonus atteigne 50%.

En n années, le montant de l'assurance est multiplié par $(0{,}95)^n$.

Le bonus aura atteint 50% quand:

$(0{,}95)^n\leqslant 0{,}5$

Pour n=13, $(0{,}95)^{13}\approx 0{,}51$

Pour n=14, $(0{,}95)^{14}\approx 0{,}48$

En 14 ans sans accident, le bonus aura atteint 50%.

Partie C

y_i	95	56	25	48	19	13	-14
$P(Y=y_i)$	0,0176	0,100048	0,142376	0,050024	0,142376	0,6845	0,405224

$E(Y)=95\times 0{,}0176+56\times 0{,}100048+25\times 0{,}142376+48\times 0{,}050024+19\times 0{,}142376+13\times 0{,}6845-14\times 0{,}405224$

$E(Y)\approx 19\%$

L'assureur peut espérer appliquer une augmentation d'environ 19% en 3 ans sur les contrats.