Opérations sur les fonctions

Dans ce chapitre, nous considérerons une fonction u définie sur un intervalle I.

1. Somme d'une fonction et d'une constante.

Soit un réel k.
On note $u+k$ la fonction définie sur I qui à tout réel x de I associe le réel $u(x)+k$.

Nous souhaitons étudier les variations de la fonction $u+k$.

Soit x et y deux réels appartenant à I tels que $x<y$.
$(u+k)(x)-(u+k)(y) = u(x)+k-u(y)-k = u(x)-u(y)$.
Par conséquent, si u est croissante sur I, alors $u+k$ est croissante sur I, et si u est décroissante sur I, alors $u+k$ est décroissante sur I.

Nous pouvons donc en déduire que u et $u+k$ ont les mêmes variations sur I.

Propriété:

Les fonctions u et $u+k$ ont les mêmes variations sur I.

Exemple:

La fonction $x \mapsto x^2$ est croissante sur [0;+∞[, donc la fonction $x \mapsto x^2-5$ est croissante sur [0;+∞[.

Remarque:
On ne peut pas toujours donner les variations de la fonction $u+v$ si l'on connait les variations des fonctions u et v.

2. Multiplication d'une fonction par une constante.

Soit λ un réel non nul.
On note λu la fonction définie sur I qui à tout réel x de I associe le réel $\lambda u(x)$.

Nous souhaitons étudier les variations de la fonction λu.

Soit x et y deux réels appartenant à I tels que $x<y$.
$(\lambda u)(x)-(\lambda u)(y)=\lambda u(x)-\lambda u(y)=\lambda(u(x)-u(y))$.
Les variations de λu dépendent donc de λ et de u.
Si λ>0, alors $u(x)-u(y)$ et $(\lambda u(x)-\lambda u(y))$ sont de même signe et donc u et λu ont le même sens de variation.

Si λ<0, alors $u(x)-u(y)$ et $(\lambda u(x)-\lambda u(y))$ sont de signe opposé et donc u et λu ont des sens de variation opposés.

Propriété:

Si λ>0, les fonctions u et λu ont les mêmes variations sur I.
Si λ<0, les fonctions u et λu ont des variations opposées sur I.

Exemples:
La fonction $x \mapsto \sqrt{x}$ est croissante sur [0;+∞[, donc la fonction $x \mapsto 3\sqrt{x}$ est croissante sur [0;+∞[.
La fonction $x \mapsto x^2$ est croissante sur [0;+∞[, donc la fonction $x \mapsto -3x^2$ est décroissante sur [0;+∞[.

3. Racine carrée d'une fonction.

Dans ce paragraphe, on suppose que la fonction est positive sur I.

On note $\sqrt{u}$ la fonction définie sur I qui à tout réel x de I associe le réel $\sqrt{u(x)}$.

Nous souhaitons étudier les variations de la fonction $\sqrt{u}$.

Soit x et y deux réels appartenant à I tels que $x<y$.

➔ supposons que u soit croissante sur I

On a alors $u(x)\leq u(y)$.
De plus, la fonction racine carrée est croissante sur [0;+∞[, on a donc $\sqrt{u(x)}\leq\sqrt{u(y)}$.
Donc la fonction $\sqrt{u}$ est croissante sur I.

➔ supposons que u soit décroissante sur I
On a alors $u(x)\geq u(y)$.
De plus, la fonction racine carrée est croissante sur [0;+∞[, on a donc $\sqrt{u(x)}\geq\sqrt{u(y)}$.
Donc la fonction $\sqrt{u}$ est décroissante sur I.

On peut donc en déduire que les fonctions u et $\sqrt{u}$ ont les mêmes variations sur I.

Propriété:
Les fonctions u et $\sqrt{u}$ ont les mêmes variations sur I.

Exemple:

La fonction $u:\ x\mapsto x^2-1$ est définie sur ℝ, est décroissante sur]-∞; 0] et est croissante sur [0; +∞[.
Pour déterminer le domaine de définition de la fonction $\sqrt{u}$, il faut déterminer les intervalles sur lesquels u est positive.
Or, $u(x)\geqslant 0$ si et seulement si x appartient à]-∞;1]∪[1; +∞[.
La fonction $\sqrt{u}$ est donc décroissante sur]-∞; 1] et est croissante sur [1; +∞[.

4. Inverse d'une fonction.

Dans tout ce paragraphe, on suppose que la fonction u ne s'annule pas sur I.

On note $\frac{1}{u}$ la fonction définie sur I qui à tout x de I associe le réel $\frac{1}{u(x)}$.

Nous souhaitons étudier les variations de la fonction $\frac{1}{u(x)}$.

Soit x et y deux réels appartenant à I tels que $x<y$.
Nous allons nous restreindre au cas où u est strictement croissante sur I et $u(x)>0$ pour tout x de I, les autres cas s'étudiant de même.
On a alors $0<u(x)<u(y)$.

Or la fonction inverse est strictement décroissante sur [0; +∞[, donc $\frac{1}{u(x)} > \frac{1}{u(y)}$.

On peut donc en déduire que la fonction $\frac{1}{u}$ est décroissante sur I.

Propriété:

Les fonctions u et $\frac{1}{u}$ ont des variations opposées sur I.

Exemple:

La fonction u : $x \mapsto x^2 - 1$ est définie sur ℝ, est décroissante sur]-∞; 0] et est croissante sur [0; +∞[.
Pour déterminer le domaine de définition de la fonction $\frac{1}{u}$, il faut déterminer les intervalles sur lesquels u ne s'annule pas.
Or, $u(x) \neq 0$ si et seulement si x appartient à ℝ{-1; 1}.
La fonction $\frac{1}{u}$ est donc croissante sur]-∞; -1[∪]-1;0] et est décroissante sur [0;1[∪]1; +∞[.