## Exercices Fiche 1

**Exercice 1:**
Déterminer le domaine de définition ainsi que le sens de variation de la fonction $f$ définie par:
a. $f(x)=\sqrt{x}+4$ b. $f(x)=x^2-5$ c. $f(x)=-3|x|$ d. $f(x)=-3\sqrt{x}+5$

**Exercice 2:**
Déterminer le domaine de définition ainsi que le sens de variation de la fonction $f$ définie par:
a. $f(x)=\sqrt{x+3}$ b. $f(x)=\sqrt{x^2+1}$ c. $f(x)=\sqrt{\frac{1}{x}}$.

**Exercice 3:**
On considère tous les triangles ABC rectangles en A tels que AB+AC=8.
1. Soit $x$ la longueur d'un des côtés de l'angle droit.
a. Dans quel intervalle varie $x$ ?
b. Exprimer le périmètre $p(x)$ du triangle ABC en fonction de $x$.
2. Étudier le sens de variation de la fonction $p$.
3. Quel triangle ABC a le plus petit périmètre ?

**Exercice 4:**
Déterminer le domaine de définition ainsi que le sens de variation de la fonction $f$ définie par:
a. $f(x)=\frac{1}{x-5}$ b. $f(x)=\frac{1}{\sqrt{x}}$ c. $f(x)=2-\frac{1}{\sqrt{x}+1}$.

**Exercice 5:**
On désigne par $\mathscr{C}$ la courbe représentative de la fonction racine carrée dans un repère orthonormal.
Soit A le point de coordonnées (2;0).
a. Tracer la courbe $\mathscr{C}$ puis, mesurer 0,1 cm près, la distance entre A et un point de $\mathscr{C}$ d'abscisse $x$ avec $x$ variant de 0 à 4 par pas de 0,5.
b. Démontrer que la distance entre le point A et un point $M(x;\sqrt{x})$ de la courbe $\mathscr{C}$ (avec $x\geqslant 0$) est donnée par: $f(x)=\sqrt{\left(x-\frac{3}{2}\right)^2+\frac{7}{4}}$.
c. Déterminer les variations de la fonction de la fonction $x \mapsto \left(x-\frac{3}{2}\right)^2+\frac{7}{4}$ sur [0; +∞[ puis celles de la fonction $f$.
d. Déduire de ce qui précède quel est le point de la courbe $\mathscr{C}$ le plus proche de A.

**CORRECTION**

**Exercice 1:**
Déterminer le domaine de définition ainsi que le sens de variation de la fonction $f$ définie par:
a. $f(x)=\sqrt{x}+4$

$D_f=[0,+\infty[$
La fonction $x\mapsto\sqrt{x}$ est croissante sur [0;+∞[ donc la fonction $f(x)=\sqrt{x}+4$ est croissante sur [0;+∞[.

b. $f(x)=x^2-5$

$D_f=\mathbb{R}$
La fonction $x\mapsto x^2$ est croissante sur [0;+∞[ donc la fonction $f(x)=x^2-5$ est croissante sur [0;+∞[.
La fonction $x\mapsto x^2$ est décroissante sur ]-∞;0] donc la fonction $f(x)=x^2-5$ est décroissante sur ]-∞;0].

c. $f(x)=-3|x|$

$D_f=\mathbb{R}$
La fonction $x\mapsto|x|$ est croissante sur [0;+∞[ et -3<0 donc la fonction $f(x)=-3|x|$ est décroissante sur [0;+∞[.
La fonction $x\mapsto|x|$ est décroissante sur ]-∞;0] et -3<0 donc la fonction $f(x)=-3|x|$ est croissante sur ]-∞;0].

d. $f(x)=-3\sqrt{x}+5$

$D_f=[0,+\infty[$
La fonction $x\mapsto\sqrt{x}$ est croissante sur [0;+∞[ et -3<0 donc la fonction $x\mapsto-3\sqrt{x}$ est décroissante sur [0;+∞[ et donc la fonction $f(x)=-3\sqrt{x}+5$ est décroissante sur [0;+∞[.

**Exercice 2:**
Déterminer le domaine de définition ainsi que le sens de variation de la fonction $f$ définie par:
a. $f(x)=\sqrt{x+3}$

La fonction $x\mapsto x+3$ est définie sur $\mathbb{R}$ et est croissante sur $\mathbb{R}$
$D_f=[-3;+\infty[$
Donc, la fonction $f(x)=\sqrt{x+3}$ est croissante sur [-3;+∞[.

b. $f(x)=\sqrt{x^2+1}$

La fonction $x\mapsto x^2$ est définie sur $\mathbb{R}$ et est croissante sur [0;+∞[ et décroissante sur ]-∞;0], donc la fonction $x\mapsto x^2+1$ est définie sur $\mathbb{R}$ et est croissante sur [0;+∞[ et décroissante sur ]-∞;0]

Pour tout $x$ de $\mathbb{R}$, $x^2+1>0$ donc $D_f=\mathbb{R}$
Donc:
La fonction $f(x)=\sqrt{x^2+1}$ est croissante sur [0;+∞[ et décroissante sur ]-∞;0].

c. $f(x)=\sqrt{\dfrac{1}{x}}$

La fonction $x\mapsto\dfrac{1}{x}$ est définie sur ]-∞;0[∪]0;+∞[, elle est décroissante sur ]0;+∞[ et elle est décroissante sur ]-∞;0[.

Sur ]0;+∞[, $\frac{1}{x}>0$ donc, $D_f$=]0;+∞[

La fonction $x\mapsto\frac{1}{x}$ est décroissante sur ]0;+∞[.

## Exercice 3:

On considère tous les triangles ABC rectangles en A tels que AB+AC=8.
1. Soit $x$ la longueur d'un des côtés de l'angle droit.
a. Dans quel intervalle varie $x$ ?

$0<x<8$

b. Exprimer le périmètre $p(x)$ du triangle ABC en fonction de $x$.

On pose $AB=x$
$AC=8-x$
Dans le triangle rectangle ABC, j'utilise le théorème de Pythagore:
$BC^2=AB^2+AC^2$
$BC^2=x^2+(8-x)^2$
$BC^2=x^2+64-16x+x^2$
$BC^2=2x^2-16x+64$

$\Delta=(-16)^2-4\times2\times64=-256$
Donc, pour tout $x$ de $\mathbb{R}$, $2x^2-16x+64>0$

$BC=\sqrt{2x^2-16x+64}$
Par suite,
$p(x)=x+(8-x)+\sqrt{2x^2-16x+64}$
$p(x)=8+\sqrt{2x^2-16x+64}$

2. Étudier le sens de variation de la fonction $p$.

Dans un repère, la courbe représentative de la fonction $x\mapsto 2x^2-16x+64$ est une parabole dont le sommet S a pour abscisse $\frac{16}{4}=4$.
La fonction $x\mapsto 2x^2-16x+64$ est croissante sur [4;+∞[ et décroissante sur ]-∞;4].

De plus, pour tout $x$ de $\mathbb{R}$, $2x^2-16x+64>0$ donc $D_p=\mathbb{R}$
Et, la fonction $x\mapsto\sqrt{2x^2-16x+64}$ est croissante sur [4;+∞[ et décroissante sur ]-∞;4].
Par suite, la fonction $x\mapsto 8+\sqrt{2x^2-16x+64}$ est croissante sur [4;+∞[ et décroissante sur ]-∞;4].

3. Quel triangle ABC a le plus petit périmètre ?

Le triangle ABC qui a le plus petit périmètre est celui pour lequel $x=4$.
Dans ce cas:
$AB=4$
$AC=8-4=4$
$BC=\sqrt{2\times4^2-16\times4+64}=\sqrt{32}=4\sqrt{2}$

**Exercice 4:**

Déterminer le domaine de définition ainsi que le sens de variation de la fonction $f$ définie par:

a. $f(x)=\dfrac{1}{x-5}$

La fonction $x\mapsto x-5$ est définie sur ℝet est croissante sur ℝ

$x-5=0 \Leftrightarrow x=5$

Donc, $D_f$=]-∞;5[∪]5;+∞[.

La fonction $f(x)=\dfrac{1}{x-5}$ est décroissante ]-∞;5[ sur et décroissante sur ]5;+∞[.

b. $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{x}}$

La fonction $x\mapsto\sqrt{x}$ est définie sur [0;+∞[ et elle est croissante sur [0;+∞[.

$\sqrt{x}=0 \Leftrightarrow x=0$

Donc, $D_f$=]0;+∞[.

La fonction $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{x}}$ est décroissante sur ]0;+∞[.

c. $f(x)=2-\dfrac{1}{\sqrt{x}+1}$

La fonction $x\mapsto\sqrt{x}$ est définie sur [0;+∞[ et elle est croissante sur [0;+∞[, donc la fonction $x\mapsto\sqrt{x}+1$ est croissante sur [0;+∞[.

Pour tout $x$ de [0;+∞[, $\sqrt{x}+1\neq 0$.

$D_f$=[0;+∞[

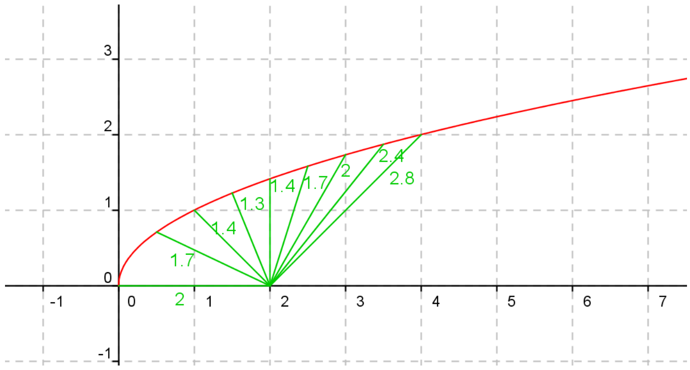
La fonction $x\mapsto\dfrac{1}{\sqrt{x}+1}$ est décroissante sur [0;+∞[ et -1<0 donc la fonction $x\mapsto-\dfrac{1}{\sqrt{x}+1}$ est croissante sur [0;+∞[.

Donc, la fonction $f(x)=2-\dfrac{1}{\sqrt{x}+1}$ est croissante sur [0;+∞[.

**Exercice 5:**

On désigne par $\mathscr{C}$ la courbe représentative de la fonction racine carrée dans un repère orthonormal.
Soit A le point de coordonnées (2;0).

a. Tracer la courbe $\mathscr{C}$ puis, mesurer 0,1 cm près, la distance entre A et un point de $\mathscr{C}$ d'abscisse $x$ avec $x$ variant de 0 à 4 par pas de 0,5.




| $x$ | 0 | 0,5 | 1 | 1,5 | 2 | 2,5 | 3 | 3,5 | 4 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| distance | 2 | 1,7 | 1,4 | 1,3 | 1,4 | 1,7 | 2 | 2,4 | 2,8 |

b. Démontrer que la distance entre le point A et un point $M(x;\sqrt{x})$ de la courbe $\mathscr{C}$ (avec $x\geqslant 0$) est donnée par: $f(x)=\sqrt{\left(x-\frac{3}{2}\right)^2+\frac{7}{4}}$.

$A(2;0)$
$M(x;\sqrt{x})$
$AM=\sqrt{(x-2)^2+(\sqrt{x})^2}$
$AM=\sqrt{x^2-4x+4+x}$
$AM=\sqrt{x^2-3x+4}$
$AM=\sqrt{(x-\frac{3}{2})^2-\frac{9}{4}+4}$
$AM=\sqrt{(x-\frac{3}{2})^2+\frac{7}{4}}$

Donc, la distance entre le point A et un point $M(x;\sqrt{x})$ de la courbe $\mathscr{C}$ (avec $x\geqslant 0$) est donnée par: $f(x)=\sqrt{\left(x-\frac{3}{2}\right)^2+\frac{7}{4}}$.

c. Déterminer les variations de la fonction de la fonction $x\mapsto\left(x-\frac{3}{2}\right)^2+\frac{7}{4}$ sur [0; +∞[ puis celles de la fonction $f$.

Dans un repère, la courbe représentative de la fonction $x\mapsto\left(x-\frac{3}{2}\right)^2+\frac{7}{4}$ est une parabole dont le sommet S a pour abscisse $\frac{3}{2}$.

La fonction $x\mapsto\left(x-\frac{3}{2}\right)^2+\frac{7}{4}$ est croissante sur $\left[\frac{3}{2};+\infty\right[$ et décroissante sur $\left]-\infty;\frac{3}{2}\right]$.

Pour tout $x$ de $\mathbb{R}$, $\left(x-\frac{3}{2}\right)^2+\frac{7}{4}>0$ donc la fonction $f(x)=\sqrt{\left(x-\frac{3}{2}\right)^2+\frac{7}{4}}$ est définie sur $\mathbb{R}$ et la fonction

$f(x)=\sqrt{\left(x-\frac{3}{2}\right)^2+\frac{7}{4}}$ est croissante sur $\left[\frac{3}{2};+\infty\right[$ et décroissante sur $\left]-\infty;\frac{3}{2}\right]$.

d. Déduire de ce qui précède quel est le point de la courbe $\mathscr{C}$ le plus proche de A.

**Le point de la courbe le plus proche de A est le point d'abscisse $\frac{3}{2}$ . Cette distance est égale à $\frac{\sqrt{7}}{2}$ .**