Exercices Fiche 2

Exercice 1:

Donner le sens de variation de chacune des fonctions suivantes:

a. $f(x)=3-5\sqrt{x}$ pour $x\geqslant 0$.

b. $f(x)=3+\frac{2}{x}$ pour $x\neq 0$.

c. $f(x)=\frac{2}{-5x+1}$ pour $x\neq\frac{1}{5}$.

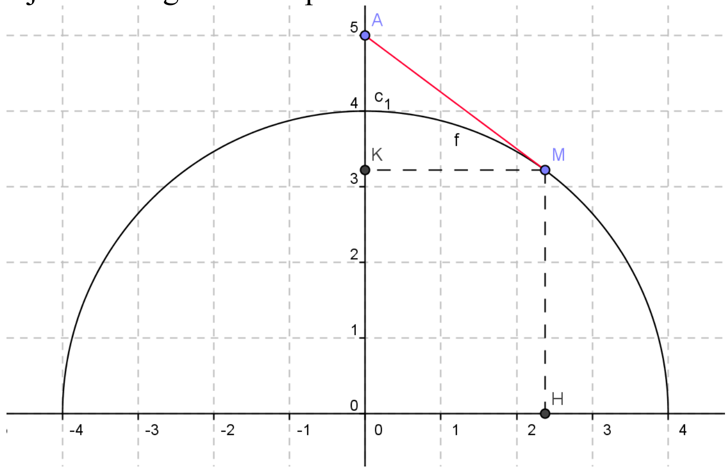
d. $f(x)=\sqrt{3-x}$ pour $x\leqslant 3$.

Exercice 2:

Dans le plan muni d'un repère orthonormé (O, $\vec{i}$, $\vec{j}$), on considère le demi-cercle $\mathcal{C}$ de centre O et de rayon 4 représenté ci-dessous.

On considère le point A(0;5) et le point M d'abscisse x sur le demi-cercle $\mathcal{C}$.

Les points H et K sont les projetés orthogonaux du point M sur l'axe des abscisses et l'axe des ordonnées.



Soit f la fonction définie par $f(x)=AM$ et u la fonction définie par $u(x)=AM^2$.

1. Déterminer le domaine de définition des fonctions f et u.
2. Conjecturer les variations de la fonction f.
3. Exprimer OK, puis AK en fonction de x.
4. Montrer que $u(x)=41-10\sqrt{16-x^2}$.
5. Établir les variations de la fonction u.
   En déduire les variations de la fonction f.

CORRECTION

Exercice 1:

Donner le sens de variation de chacune des fonctions suivantes:

a. $f(x)=3-5\sqrt{x}$ pour $x\geqslant 0$.

La fonction $x\mapsto\sqrt{x}$ est croissante sur [0;+∞[et -5<0 donc la fonction $x\mapsto -5\sqrt{x}$ est décroissante sur [0;+∞[.
Par suite, la fonction $f(x)=3-5\sqrt{x}$ est décroissante sur [0;+∞[.

b. $f(x)=3+\frac{2}{x}$ pour $x\neq 0$.

La fonction $x\mapsto\frac{1}{x}$ est définie sur]-∞;0[∪]0;+∞[, elle est décroissante sur]0;+∞[et elle est décroissante sur]-∞;0[.

2>0 donc la fonction $x\mapsto\frac{2}{x}$ est décroissante sur]0;+∞[et décroissante sur]-∞;0[.

Par suite, la fonction $f(x)=3+\frac{2}{x}$ est décroissante sur]0;+∞[et décroissante sur]-∞;0[.

c. $f(x)=\frac{2}{-5x+1}$ pour $x\neq\frac{1}{5}$.

La fonction $x\mapsto -5x+1$ est définie sur ℝ et est décroissante sur ℝ

$D_f=\left]-\infty;\frac{1}{5}\right[\cup\left]\frac{1}{5};+\infty\right[$

La fonction $x\mapsto\frac{1}{-5x+1}$ est croissante sur $\left]-\infty;\frac{1}{5}\right[$ et croissante sur $\left]\frac{1}{5};+\infty\right[$.

2>0, donc:

La fonction $f(x)=\frac{2}{-5x+1}$ est croissante sur $\left]-\infty;\frac{1}{5}\right[$ et croissante sur $\left]\frac{1}{5};+\infty\right[$.

d. $f(x)=\sqrt{3-x}$ pour $x\leqslant 3$.

La fonction $x\mapsto 3-x$ est définie sur ℝ et est décroissante sur ℝ

$D_f=]-\infty;3]$

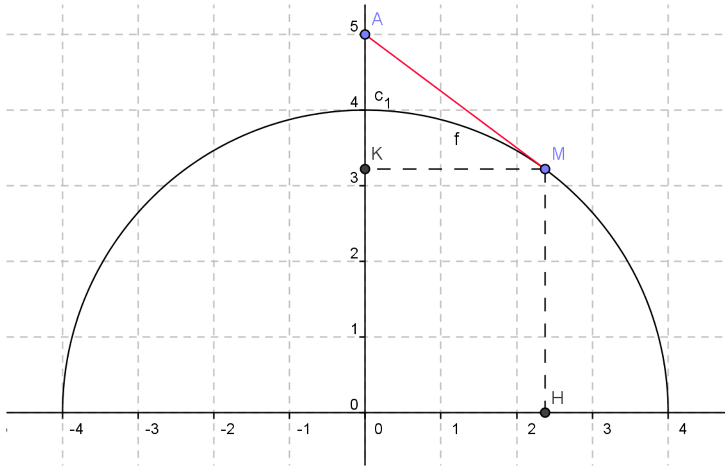
Donc, la fonction $f(x)=\sqrt{3-x}$ est décroissante sur $]+\infty;3]$.

Exercice 2:

Dans le plan muni d'un repère orthonormé (O, $\vec{i}$, $\vec{j}$), on considère le demi-cercle $\mathcal{C}$ de centre O et de rayon 4 représenté ci-dessous.

On considère le point A(0;5) et le point M d'abscisse x sur le demi-cercle $\mathcal{C}$.

Les points H et K sont les projetés orthogonaux du point M sur l'axe des abscisses et l'axe des ordonnées.



Soit f la fonction définie par $f(x)=AM$ et u la fonction définie par $u(x)=AM^2$.

1. Déterminer le domaine de définition des fonctions f et u.
2. Conjecturer les variations de la fonction f.
3. Exprimer OK, puis AK en fonction de x.
4. Montrer que $u(x)=41-10\sqrt{16-x^2}$.
5. Établir les variations de la fonction u.
   En déduire les variations de la fonction f.

1.
$D_f=[-4;4]$
$D_u=[-4;4]$

2. On peut conjecturer que la fonction f est croissante.

3.
Dans le triangle rectangle OMK, j'utilise le théorème de Pythagore:
$OM^2=OK^2+KM^2$
$4^2=OK^2+x^2$
$OK^2=4^2-x^2$
$OK=\sqrt{16-x^2}$

$AK=AO-OK$
$AK=5-\sqrt{16-x^2}$

4.
Dans le triangle rectangle AMK, j'utilise le théorème de Pythagore:
$AM^2=KM^2+KA^2$
$AM^2=x^2+(5-\sqrt{16-x^2})^2$
$AM^2=x^2+25-10\sqrt{16-x^2}+16-x^2$
$AM^2=41-10\sqrt{16-x^2}$
Donc, $u(x)=41-10\sqrt{16-x^2}$

5.
La fonction $x\mapsto x^2$ est croissante sur [0;+∞[et décroissante sur]-∞;0].
-1<0 donc la fonction $x\mapsto -x^2$ est décroissante sur [0;+∞[et croissante sur]-∞;0].
Par suite:

La fonction $x \mapsto 16 - x^2$ est décroissante sur [0;+∞[et croissante sur]-∞;0].

$16 - x^2 = 0 \Leftrightarrow x = 4$ ou $x = -4$

x	$-\infty$		-4		4		$+\infty$
$16-x^2$		$-$	0	$+$	0	$-$	

Sur [-4;4], $16 - x^2 \geqslant 0$
Donc, la fonction $x \mapsto \sqrt{16 - x^2}$ est décroissante sur [0;4] et croissante sur]-4;0].
-10<0, donc la fonction $x \mapsto -10\sqrt{16 - x^2}$ est croissante sur [0;4] et décroissante sur]-4;0].
Par suite, la fonction $u(x) = AM^2 = 41 - 10\sqrt{16 - x^2}$ est croissante sur [0;4] et décroissante sur]-4;0].

Et donc, la fonction $f(x) = AM$ est croissante sur [0;4] et décroissante sur]-4;0].