Polynômes-Equation du second degré

1. Fonction polynôme.

1.1. Définition.

Définition: Dire qu'une fonction P, définie sur $\mathbb{R}$ est une fonction polynôme signifie qu'il existe des réels $a_0, a_1, \dots a_n$, $n \in \mathbb{R}$ tels que pour tout réel x,
$P(x)=a_n x^n+a_{n-1}x^{n-1}+\dots+a_1 x+a_0$

Exemples:
a. La fonction P, définie sur $\mathbb{R}$ par $P(x)=-5x^4+x+0{,}7$,est une fonction polynôme,avec $a_4=-5, a_3=a_2=0, a_1=1$ et $a_0=0{,}7$.
b. Si $a_0=a_1=\dots=a_n=0,$ on obtient la fonction qui vérifie, pour tout $x \in \mathbb{R}$ $P(x)=0$: c'est le polynôme nul.
c. Toute fonction constante $x \mapsto k$, k réel, est une fonction polynôme.

1.2. Degré d'un polynôme.

On admettra la propriété suivante:
Propriété-définition:
Toute fonction polynôme, différente du polynôme nul, s'écrit de manière unique sous forme réduite: $a_n x^n+a_{n-1}x^{n-1}+\dots a_1 x+a_0$, avec $a_n \neq 0$ et $n \in \mathbb{N}$
Les réels $a_0, a_1, \dots, a_n$ sont les coefficients du polynôme et l'entier n est le degré.
Exemples:
a. $P(x)=3x^2-5x+1$ est un polynôme de degré 2 ou trinôme du second degré.
b. $Q(x)=(x+1)(x+3)(4-2x)$ est un polynôme du troisième degré.
En effet, $Q(x)=(x+1)[4x-2x^2+12-6x]=(x+1)[-2x^2-2x+12]$
$=-2x^3-2x^2+12x-2x^2-2x+12=-2x^3-4x^2-2x+24$
c. Les fonctions affines $x \mapsto ax+b$, avec $a \neq 0$, sont les polynômes du premier degré.

1.3. Racine.

Définition:
On appelle racine d'un polynôme P tout nombre réel α tel que $P(\alpha)=0$.
Autrement dit, une racine de P est une solution de l'équation $P(x)=0$.
Exemples :

- -1 est racine du polynôme $3x^2-2x-5$.
- Le polynôme $(x+1)(3x-10)(4-2x)$ a pour racines: -1, $\frac{10}{3}$ et 2, et ce sont les seules.
- Le polynôme x^2+3 n'a pas de racine.

1.4. Égalité de deux polynômes.

On admettra la propriété suivante:
Propriété:
Deux polynômes non nuls sont égaux si et seulement si ces polynômes ont le même degré et les coefficients de même degré sont deux à deux égaux.

Exemple:
Pour tout réel x, $ax^4+bx^3+cx^2+dx+e=-5x^4+7x^3-2x$ si et seulement si $a=-5$, $b=7$, $c=0$, $d=-2$ et $e=0$.

2. Équation du second degré.

2.1. Définition.

Une équation du second degré, à une inconnue x, est une équation qui peut s'écrire sous la forme $ax^2+bx+c=0$, où a, b et c sont trois réels donnés, $a \neq 0$.

2.2. Forme canonique.

Pour tout réel x, $ax^2+bx+c = a\left(x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}\right)$

Or, $\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 = x^2+\frac{b}{a}x+\frac{b^2}{4a^2}$,

donc $x^2+\frac{b}{a}x = \left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2}{4a^2}$.

Par suite $ax^2+bx+c = a\left(\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2}{4a^2}+\frac{c}{a}\right) = a\left(\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2-4ac}{4a^2}\right)$

On pose $\Delta = b^2-4ac$.

Donc $ax^2+bx+c = a\left(\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{\Delta}{4a^2}\right)$.

Définitions:

- Le réel b^2-4ac, noté Δ, est le discriminant du trinôme ax^2+bx+c.
- $a\left(\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{\Delta}{4a^2}\right)$ est la forme canonique du trinôme ax^2+bx+c.

Exemples: voici les formes canoniques des trinômes suivants.

- $-x^2+6x+1 = -(x^2-6x-1) = -(x^2-6x+9-9-1) = -((x-3)^2-9-1) = -((x-3)^2-10)$
- $3x^2-2x+1 = 3\left(x^2-\frac{2x}{3}+1\right) = 3\left(\left(x-\frac{1}{3}\right)^2-\frac{1}{9}+1\right) = 3\left(\left(x-\frac{1}{3}\right)^2+\frac{8}{9}\right)$.

2.3. Résolution de l'équation

(E) $ax^2+bx+c = 0$, avec $a \neq 0$.

– 1er cas: $\Delta>0$.

$\frac{\Delta}{4a^2} = \left(\frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right)^2$ donc $ax^2+bx+c = \mathrm{a}\left[\left(x+\frac{\mathrm{b}}{2\mathrm{a}}\right)^2-\left(\frac{\sqrt{\Delta}}{2\mathrm{a}}\right)^2\right]$

$= a\left(x+\frac{b}{2a}+\frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right)\left(x+\frac{b}{2a}-\frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right)$.

Donc, $ax^2+bx+c = 0 \Leftrightarrow a\left(x+\frac{b}{2a}+\frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right)\left(x+\frac{b}{2a}-\frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right) = 0$

L'équation (E) admet alors deux solutions distinctes: $x_1=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ et $x_2=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$.

- 2ième cas: $\Delta = 0$.

  On a alors $ax^2+bx+c = a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2$

  Donc $ax^2+bx+c = 0 \Leftrightarrow a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 = 0$

  L'équation (E) admet une unique solution: $x_0 = -\frac{b}{2a}$.

- 3ième cas: $\Delta < 0$.

  $\frac{\Delta}{4a^2} < 0$ donc $-\frac{\Delta}{4a^2} > 0$.

  Par suite, $\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2} \geqslant -\frac{\Delta}{4a^2} > 0$

  L'équation (E) n'a pas de solution réelle.

Bilan:

On considère l'équation $ax^2+bx+c = 0$, $a \neq 0$ et $\Delta = b^2-4ac$.

- Si $\Delta < 0$, l'équation n'a pas de solution réelle.
- Si $\Delta = 0$, l'équation a une unique solution: $x_0 = -\frac{b}{2a}$.
- Si $\Delta > 0$, l'équation a deux solutions: $x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ et $x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$.

Exemples:

Résoudre les équations suivantes:

a) $-x^2+2x-10 = 0$

$\Delta = 2^2-4\times(-1)\times(-10) = -36$.

L'équation n'a pas de solution.

b) $2x^2-3x-5 = 0$

$\Delta = (-3)^2-4\times 2\times(-5) = 49$.

D'où l'équation admet deux solutions:

$x_1 = \frac{3+\sqrt{49}}{2\times 2} = \frac{3+7}{4} = \frac{10}{4} = 2{,}5$

$x_2 = \frac{3-\sqrt{49}}{2\times 2} = \frac{3-7}{4} = \frac{-4}{4} = -1$

c) $9x^2+6x+1 = 0$

$\Delta = 6^2-4\times 9\times 1 = 0$.

D'où l'équation admet une unique solution:

$x_0 = -\frac{6}{2\times 9} = -\frac{1}{3}$.

3. Signe du trinôme

3,1. Factorisation.

On a vu lors de la démonstration faite au II.3 que le trinôme ax^2+bx+c pouvait se factoriser si Δ était supérieur ou égal à 0. Nous admettrons qu'il est impossible de trouver une factorisation si Δ est négatif.

Propriété:

Soit ax^2+bx+c avec $a\neq 0$ et Δ son discriminant.

- Si $\Delta>0$, $ax^2+bx+c = a(x-x_1)(x-x_2)$ où x_1 et x_2 sont les racines du trinôme.
- Si $\Delta=0$, $ax^2+bx+c = a(x-x_0)^2$ où x_0 est l'unique racine du trinôme.
- Si $\Delta<0$, il n'existe pas de factorisation de ax^2+bx+c par un polynôme de degré 1.

Exemples:

Reprenons les trois trinômes étudiés au II. 3. et factorisons les.

a) $-x^2+2x-10$ ne peut pas être factorisé par un polynôme de degré 1 car son discriminant est négatif.

b) $2x^2-3x-5 = 2(x-2{,}5)(x-(-1)) = 2(x-2{,}5)(x+1)$ car son discriminant est strictement positif et que les racines de l'équation $2x^2-3x-5=0$ sont $x_1=2{,}5$ et $x_2=-1$.

c) $9x^2+6x+1 = 9\left(x-\frac{1}{3}\right)^2$ car son discriminant est nul et l'unique racine de l'équation $9x^2+6x+1=0$ est $x_0=\frac{1}{3}$.

3.2. Signe du trinôme.

Étudions le signe du trinôme ax^2+bx+c, $a\neq 0$.

Pour cela, distinguons les trois cas vus précédemment.

- Si $\Delta>0$, ax^2+bx+c peut se factoriser sous la forme suivante: $a(x-x_1)(x-x_2)$, où x_1 et x_2 sont les racines du trinôme.
  Afin d'étudier le signe du trinôme, nous allons faire un tableau de signe.
  Supposons que $x_1<x_2$.

x	$-\infty$	x_1		x_2		$+\infty$
a	Signe de a		Signe de a		Signe de a	
$x-x_1$	-	0	+		+	
$x-x_2$	-		-	0	+	
ax^2+bx+c	Signe de a	0	Signe opposé à celui de a	0	Signe de a	

- Si $\Delta=0$, ax^2+bx+c peut se factoriser sous la forme suivante: $a(x-x_0)^2$ où x_0 est l'unique racine du trinôme.
  On sait que pour toute valeur de x, $(x-x_0)^2$ est positif et s'annule en x_0.
  Donc ax^2+bx+c est du signe de a et s'annule en x_0 pour tout réel x.

- Si $\Delta<0$, ax^2+bx+c ne peut pas se factoriser, on utilise donc la forme canonique:
  $a\left(\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{\Delta}{4a^2}\right)$.
  Comme Δ est négatif, on en déduit que $-\frac{\Delta}{4a^2}$ est positif, d'où $\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{\Delta}{4a^2}$ est la somme de deux nombres positifs donc est positif d'où ax^2+bx+c est du signe de a pour tout réel x.

Bilan:

Soit le trinôme ax^2+bx+c avec $a\neq 0$.

- Si $\Delta>0$, le trinôme s'annule en deux réels distincts x_1 et x_2. Si $x_1<x_2$, son tableau de signe est le suivant:

x	$-\infty$		x_1		x_2		$+\infty$
ax^2+bx+c		Signe de a	0	Signe opposé à celui de a	0	Signe de a	

- Si $\Delta = 0$, le trinôme a le même signe que a pour tout x, mais s'annule en $-\dfrac{b}{2a}$.
- Si $\Delta < 0$, le trinôme a le même signe que a pour tout réel x.

On dit encore que: le trinôme ax^2+bx+c ($a \neq 0$) est du signe de a sauf entre ses racines s'il en a.

Exemples:

Résoudre les inéquations suivantes:

a) $-x^2+6x-5 > 0$

$\Delta = 6^2-4\times(-1)\times(-5)=16$

d'où $x_1=\dfrac{-6-4}{-2}=5$ et $x_2=\dfrac{-6+4}{-2}=1$.

Nous obtenons donc le tableau de signe suivant:

x	$-\infty$		1		5		$+\infty$
$-x^2+6x-5$		$-$	0	$+$	0	$-$	

D'où les solutions de cette inéquation est l'intervalle $]1;5[$. $\mathbb{S}=]1;5[$

b) $x^2-2x+10 \leq 0$.

$\Delta=(-2)^2-4\times1\times10=4-40=-36$.

D'où pour tout réel x, $x^2-2x+10$ est strictement positif d'où cette inéquation n'admet pas de solution. $\mathbb{S}=\emptyset$.

c) $\dfrac{1}{4}x^2-x+1\leqslant 0$

$\Delta=(-1)^2-4\times\dfrac{1}{4}\times1=0$.

D'où pour tout réel x, $\dfrac{1}{4}x^2-x+1$ est positif et s'annule en $-\dfrac{b}{2a}=-\dfrac{-1}{\frac{2}{4}}=2$ donc $\mathbb{S}=\{2\}$.

4. Bilan.

Souvenons nous d'une propriété vue en seconde:

Propriété:

Dans un repère, la courbe représentative de la fonction $x \mapsto ax^2+bx+c$ (avec $a \neq 0$) est une parabole dont le sommet S a pour abscisse $-\dfrac{b}{2a}$.

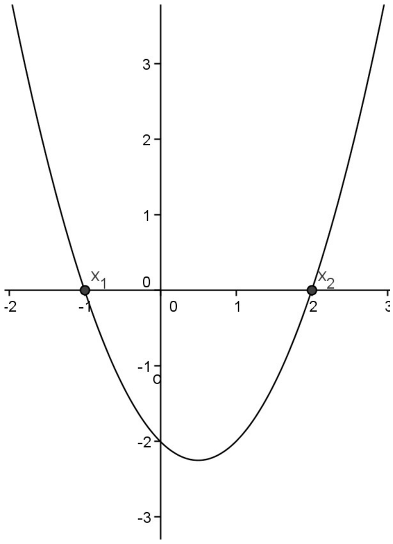
Distinguons les trois cas.

- $\Delta > 0$

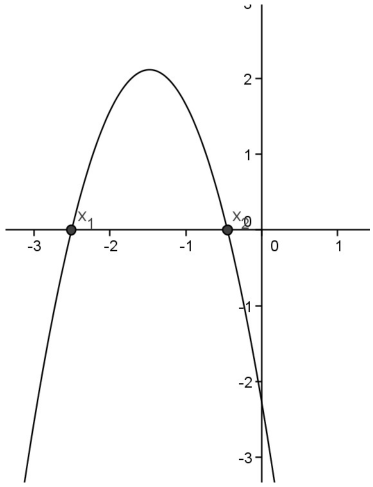
  L'équation $ax^2+bx+c=0$ a deux solutions: $x_1=\dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ et $x_2=\dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$.

  La fonction $x \mapsto ax^2+bx+c$ a pour représentation graphique:

  - $a > 0$



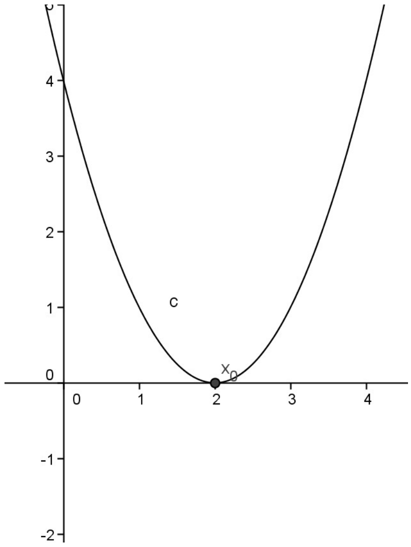
- $a < 0$



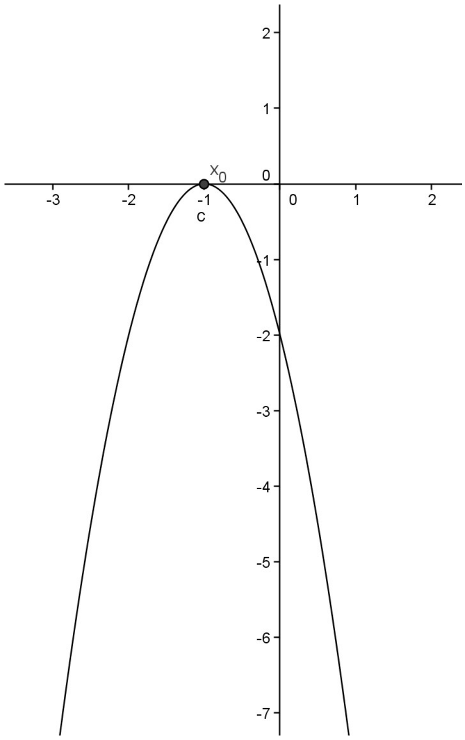
- Si $\Delta = 0$, l'équation $ax^2+bx+c = 0$ a une unique solution: $x_0 = -\frac{b}{2a}$.

  La fonction $x \mapsto ax^2+bx+c$ a pour représentation graphique:

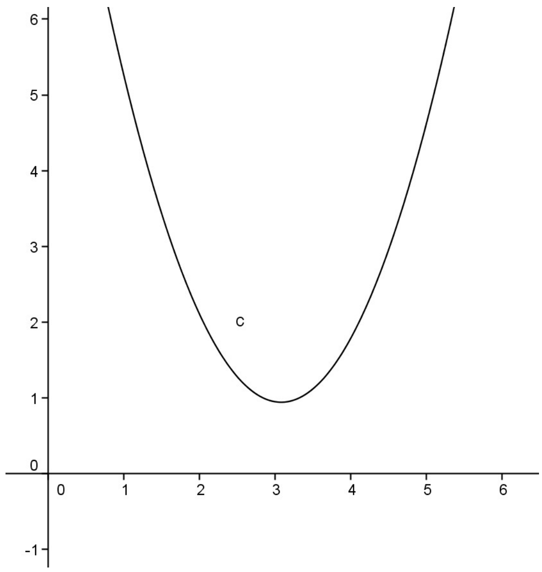
  - $a > 0$



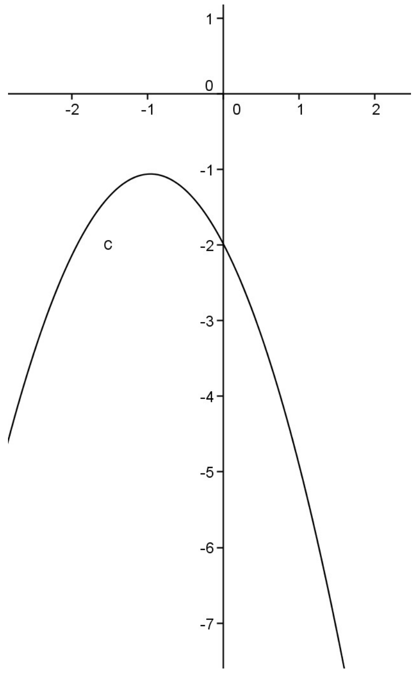
  - $a < 0$



- Si $\Delta < 0$, l'équation $ax^2+bx+c = 0$ n'a pas de solution réelle.
  La fonction $x \mapsto ax^2+bx+c$ a pour représentation graphique:
  - $a > 0$



  - $a < 0$


1
0
-2
-1
0
1
2
-1
c
-2
-3
-4
-5
-6
-7