Probabilités

1. Vocabulaire de base

1.1. Expérience aléatoire

a)

On appelle **expérience aléatoire** une expérience dont le résultat est soumis au hasard.

Exemple :

Lancer un dé cubique et relever le numéro sorti est une expérience aléatoire.

b)

On appelle **univers** l'ensemble des résultats possibles d'une expérience aléatoire. On le note Ω .

Exemple :

Pour l'expérience aléatoire précédente, l'univers Ω est constitué de 6 résultats possibles, appelées **issues**. On a $\Omega=\{1;2;3;4;5;6\}$

1.2. Simulation d'une expérience aléatoire

On veut simuler un lancer de dé, pour un très grand nombre de lancers, on utilise l'outil informatique.

a) Avec un tableur

- Dans la cellule A1, saisir la formule =ALEA.ENTRE.BORNES(1;6) qui génère un nombre entier au hasard, compris entre 1 et 6. Avec la poignée de recopie, étirer cette formule jusqu'en A1000. On génère ainsi 1000 lancers aléatoires de dé.
- Dans le cellules A1001, B1001 et C1001 respectivement, saisir « Issue », « Nombre d'apparitions » et « Fréquence ».
  Dans les cellules A1002 à A1007, saisir respectivement 1, 2, …, 6.
- Dans la cellule B1002, saisir la formule =NB.SI(A$1:A$1000;A1002) qui compte le nombre d'apparitions de 1 au cours des 1000 lancers. Étirer cette formule jusqu'en B1007.
- Dans la cellule C1002, saisir la formule =B1002/1000 qui calcule la fréquence d'apparition du 1. Étirer cette formule jusqu'en C1007.
- Changer la simulation des lancers de dé en appuyant sur la touche F9.

On obtient le tableau suivant, pour une simulation de 1000 lancers effectuée.

Issue	Nombre d'apparitions	Fréquence
1	152	0,152
2	167	0,167
3	177	0,177
4	169	0,169
5	161	0,161
6	174	0,174

b) Avec le logiciel ALGOBOX

Recopier l'algorithme suivant :

```
Code de l'algorithme
VARIABLES
  issue EST_DU_TYPE LISTE
  i EST_DU_TYPE NOMBRE
  freq EST_DU_TYPE NOMBRE
  lancer EST_DU_TYPE NOMBRE
  n EST_DU_TYPE NOMBRE
DEBUT_ALGORITHME
  AFFICHER "Nombre de lancers?"
  LIRE n
  POUR i ALLANT_DE 1 A 6
    DEBUT_POUR
    issue[i] PREND_LA_VALEUR 0
    FIN_POUR
  POUR i ALLANT_DE 1 A n
    DEBUT_POUR
    lancer PREND_LA_VALEUR floor(6*random()+1)
    issue[lancer] PREND_LA_VALEUR issue[lancer]+1
    FIN_POUR
  POUR i ALLANT_DE 1 A 6
    DEBUT_POUR
    freq PREND_LA_VALEUR issue[i]/n
    AFFICHER "Face:"
    AFFICHER i
    AFFICHER "->Fréquence:"
    AFFICHER freq
    FIN_POUR
FIN_ALGORITHME
```

Tester ensuite cet algorithme, pour $n=100$, $n=1000$, $n=10000$.

Pour $n=100$:

Issue	1	2	3	4	5	6
Fréquence	0,12	0,26	0,15	0,17	0,15	0,15

Pour $n=1000$:

Issue	1	2	3	4	5	6
Fréquence	0,156	0,158	0,174	0,172	0,164	0,176

Pour $n=10000$:

Issue	1	2	3	4	5	6
Fréquence	0,1663	0,163	0,1663	0,1701	0,1665	0,1678

On observe que, lorsque le nombre de simulations augmente, les fréquences se stabilisent autour de 0,17 environ.

On admet le résultat suivant :

Pour une expérience aléatoire donnée, répétée n fois, les fréquences d'apparition des issues tendent vers la loi de probabilité de l'expérience, lorsque n devient grand.

Remarque :

Pour un dé équilibré, chaque face a une chance sur six d'apparaître. Une valeur approchée de $\frac{1}{6}$ est 0,17.

1.3. Loi de probabilité

a) **Définition**

Donner la loi d'une expérience aléatoire, c'est attribuer à chaque issue un nombre réel compris entre 0 et 1, mesurant la chance qu'a l'issue de se produire, et de sorte que la somme de ces réels soit égale à 1.

b) **Exemple**

Pour le lancer d'un dé équilibré, la loi de probabilité est :

Issue x_i	1	2	3	4	5	6
Probabilité p_i	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

$$p_1+p_2+\ldots+p_6=\frac{1}{6}+\frac{1}{6}+\ldots+\frac{1}{6}=\frac{6}{6}=1$$

1.4. Application

a) Donner la loi de probabilité relative à un jeu de pile ou face, avec une pièce équilibrée.

Issue	Pile	Face
Probabilité	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$

b) Un groupe de 100 femmes comporte 60 blondes et 40 brunes. On choisit une personne au hasard et on note la couleur de ses cheveux ; Donner la loi de probabilité de l'expérience réalisée.

Issue	Blonde	Brune
Probabilité	0,6	0,4

c) Un groupe de 100 personnes 45 hommes dont 20% de blonds et les autres bruns, et 55 femmes dont 30% de blondes et les autres brunes.
On choisit une personne au hasard et on note la couleur de ses cheveux. Donner la loi de probabilité de l'expérience réalisée.

La part de personnes blondes est $0{,}2\times 45+0{,}3\times 55=25{,}5\,\%$.
La part de personnes brunes est $100-25{,}5=74{,}5\%$.
D'où la loi de probabilité :

Issue	Personne blonde	Personne brune
Probabilité	0,255	0,745

2. Calcul des probabilités

2.1. Probabilité d'un événement

a) Définitions

On appelle événement toute partie A d'un univers Ω , cet événement étant le plus souvent défini par une phrase.
Si l'événement A est constitué de 0 éventualité, on l'appelle événement impossible et on le note $\varnothing$.
Si l'événement A est constitué d'une éventualité, on l'appelle événement élémentaire.
Si l'événement A est constitué de toutes les éventualités de Ω , on l'appelle événement certain et on le note Ω .

La probabilité d'un événement A est égale à la somme des probabilités des issues (ou événements élémentaires) qui le constituent. On note le résultat P(A).

b) Exemples

- Une urne contient 10 jetons numérotés de 1 à 10, indiscernables au toucher ; On tire un jeton de l'urne et on note le numéro.
  La loi de probabilité de l'expérience est appelée loi équirépartie, tous les jetons ont la même probabilité d'être tirés, soit $\frac{1}{10}$ pour chacun d'eux.
  Si l'événement A est « le jeton tiré porte un multiple de 3 », alors sa probabilité est $P(A)=3\times\frac{1}{10}$ puisque A comporte 3 issues qui sont 3,6 et 9.

- On donne le tableau de répartition des effectifs d'une entreprise :

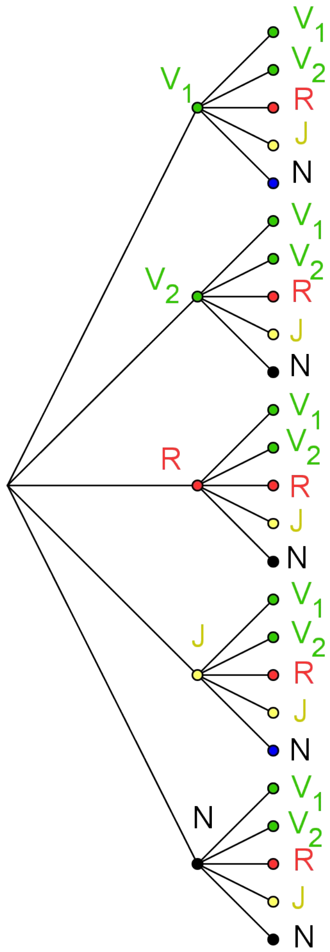
	Sportifs	Non sportifs	Total
Fumeurs	30	120	150
Non fumeurs	70	80	150
Total	100	200	300

On choisit un employé au hasard. Tous les employés ayant la même probabilité d'être choisis, on a affaire à une loi équirépartie.

Si l'événement A est »L'employé est non fumeur », alors $P(A)=\frac{150}{300}=\frac{1}{2}$.

Si l'événement B est « L »employé est sportif et fumeur », alors $P(B)=\frac{30}{300}=\frac{1}{10}$.

- Une urne contient deux jetons verts, un rouge, un noir et un jaune, indiscernables au toucher. On tire successivement et avec remise deux jetons de l'urne.
  Le nombre de tirages possibles peut être comptabilisé à l'aide d'un arbre.



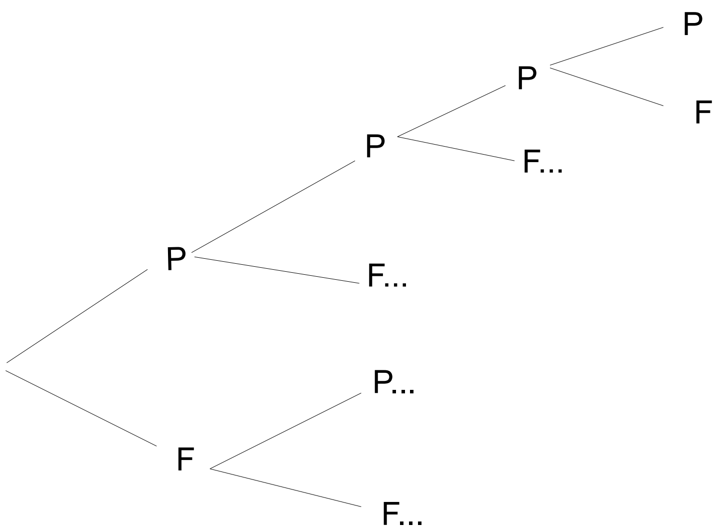
Il y a $5\times5=25$ tirages possibles. La loi est équiprobable puisque les boules sont indiscernables.
Si A est l'événement : « On obtient deux boules de même couleur », alors A contient 2+2+1+1+1=7 issues, d'où $P(A)=7\times\frac{1}{25}=\frac{7}{25}$.

2.1. Formulaire

a) **Événement contraire**

Définition : Soit A un événement. On appelle **événement contraire** de A et on note $\overline{A}$ l'événement constitué de toutes les éventualités n'appartenant pas à A.
De plus, $P(\overline{A})=1-P(A)$

Exemple :
On lance 4 fois de suite une pièce équilibrée. A l'aide d'un arbre, on compte $2\times2\times2\times2=2^4=16$ issues à cette expérience.



Soit A l'événement « on obtient au moins une fois pile au cours des 4 lancers. » L'événement $\overline{A}$ est : « on obtient jamais pile au cours des 4 lancers ». Il ne contient que l'issue F-F-F-F, d'où $P(\overline{A})=\frac{1}{16}$. On en déduit que $P(A)=1-P(\overline{A})=1-\frac{1}{16}=\frac{15}{16}$.

b) **Intersection et réunion de deux événements**

Définition : Soient A et B deux événements.
L'intersection de A et B notée $A\cap B$ est constituée des issues appartenant à A et à B.
La réunion de A et B notée $A\cup B$ est constituée des issues appartenant à A ou à B (le « ou » étant inclusif).
On a de plus $\boxed{P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)}$

Exemple :
Un sac contient 20 jetons numérotés de 1 à 20, indiscernables au toucher. On tire un jeton du sac et on note son numéro.
L'événement A : « Le numéro est un multiple de 5 » a pour probabilité $P(A)=\frac{4}{20}=\frac{1}{5}$ (A contient les issues 5,

10, 15 et 20).

L'événement B : « Le numéro est un multiple de 4 » a pour probabilité $P(B)=\frac{5}{20}=\frac{1}{4}$ (B contient les issues 4, 8, 12, 16 et 20).

L'événement $A\cap B$ est : « Le numéro est un multiple de 4 et de 5 », donc $P(A\cap B)=\frac{1}{20}$ (une seule issue favorable, le jeton 20).

L'événement $A\cup B$ est : « Le numéro est un multiple de 4 ou de 5 », donc :

$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)=\frac{4}{20}+\frac{5}{20}-\frac{1}{20}=\frac{8}{20}=\frac{2}{5}$.

c) **Espérance, variance et écart-type d'une loi de probabilité**

Définition : Soit une loi de probabilité associée à une expérience aléatoire dont les issues sont des nombres réels.

Issues x_i	x_1	...
Probabilités p_i	p_1	...

L'espérance de la loi de probabilité est le nombre noté μ, tel que $\boxed{\mu=\sum x_i\times p_i}$

L'espérance peut être interprétée comme une moyenne.

La variance de la loi de probabilité est le nombre noté V, tel que $\boxed{V=\sum (x_i-\mu)^2\times p_i}$

ou (on admet que les deux formules sont équivalentes : $\boxed{V=(\sum x_i^2\times p_i)-\mu^2}$

L'écart-type de la loi de probabilité est le nombre noté σ, tel $\boxed{\sigma=\sqrt{V}}$

Exemple :

Dans un jeu de tickets à gratter, on sait que la répartition des gains se fait selon le tableau suivant :

Gains en euros	0	5	20
Part des tickets	60%	35%	5%

Un ticket à gratter coûte 3€.

La loi de probabilité du gain algébrique (c'est à dire le gain auquel on a ôté le prix d'achat du ticket) pour un participant est :

Issue x_i	-3	2	17
Probabilité p_i	0,6	0,35	0,05

Son espérance est :

$\mu=-3\times 0{,}6+2\times 0{,}35+17\times 0{,}05=-0{,}25$

Le gain moyen pour un joueur est négatif, ce qui signifie que le jeu est favorable à l'organisateur.

La variance est :

$V=(\sum x_i^2\times p_i)-\mu^2=(-3)^2\times 0{,}6+2^2\times 0{,}35+17^2\times 0{,}05-(-0{,}25)^2=21{,}1875$

et l'écart-type est $\sigma=\sqrt{21{,}1875}\approx 4{,}6$.