Produit scalaire

Copyright ® meilleurenmaths.com. Tous droits réservés

1. Introduction

Le plan est orienté, une unité de longueur est fixée, l'unité de mesure des angles est le radian. $(O;\vec{i},\vec{j})$ est un repère orthonormal direct du plan c'est à dire si $\vec{i}=\overrightarrow{OI}$; $\vec{j}=\overrightarrow{OJ}$ alors $OI=OJ=1$ et $(\overrightarrow{OI};\overrightarrow{OJ})=\frac{\pi}{2}(2\pi)$.

1.1 Norme d'un vecteur

Soit $\vec{u}=\overrightarrow{AB}$.

La norme du vecteur $\vec{u}$ est la longueur AB. On note $\|\vec{u}\|=AB$.

Si $\vec{u}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ alors $\|\vec{u}\|^2=x^2+y^2$

1.2 Norme de la somme de vecteurs

a) $\vec{u}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ $\quad \vec{u'}\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}$ $\quad \vec{u}+\vec{u'}\begin{pmatrix}x+x'\\y+y'\end{pmatrix}$

$\|\vec{u}\|^2=x^2+y^2$

$\|\vec{u'}\|^2=x'^2+y'^2$

$\|\vec{u}+\vec{u'}\|^2=(x+x')^2+(y+y')^2$

$\|\vec{u}+\vec{u'}\|^2=x^2+x'^2+2xx'+y^2+y'^2+2yy'$

$\|\vec{u}+\vec{u'}\|^2=x^2+y^2+x'^2+y'^2+2(xx'+yy')$

$\|\vec{u}+\vec{u'}\|^2=\|\vec{u}\|^2+\|\vec{u'}\|^2+2(xx'+yy')$

b) Interprétation géométrique :

On pose $\vec{u}=\overrightarrow{AB}$ et $\vec{u'}=\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{BD}$ si le triangle ABC est direct c'est à dire si une mesure de l'angle $(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC})$ appartient à $[0;\pi]$.

Sinon, on pose $\vec{u'}=\overrightarrow{AB}$ et $\vec{u}=\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{BD}$. On aura alors le triangle ABC direct.

On a : $\vec{u}+\vec{u'}=\overrightarrow{AD}$

$\|\vec{u}+\vec{u'}\|^2=\|\vec{u}\|^2+\|\vec{u'}\|^2+2(xx'+yy')$

Donc, $AD^2=AB^2+AC^2+2(xx'+yy')$

c) Questions :

Le nombre 2(xx'+yy') ne dépend pas du repère orthonormal choisi.

- Peut-on choisir un autre repère orthonormal direct pour « exprimer plus simplement » l'expression 2(xx'+yy') ?
- Peut-on exprimer le nombre 2(xx'+yy') en fonction des longueurs ou des angles du triangle ABC ? (dans ce cas on pourrait dire que l'on obtient une généralisation du théorème de Pythagore)

Copyright ® meilleurenmaths.com. Tous droits réservés

1.3 Premier cas L'angle $\widehat{BAC}$ est aigu c'est à dire une mesure de l'angle $(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC})$ appartient à $\left]0;\frac{\pi}{2}\right[$

On choisit A pour origine et (AB) pour axe des abscisses et orienté de A vers B.

$\vec{i}'=\frac{1}{AB}.\overrightarrow{AB}$ $\qquad \|\vec{i}'\|=1$ $\qquad \vec{i}'=\overrightarrow{AI'}$

Soit J' l'image de I' par la rotation de centre A et d'angle $\frac{\pi}{2}$

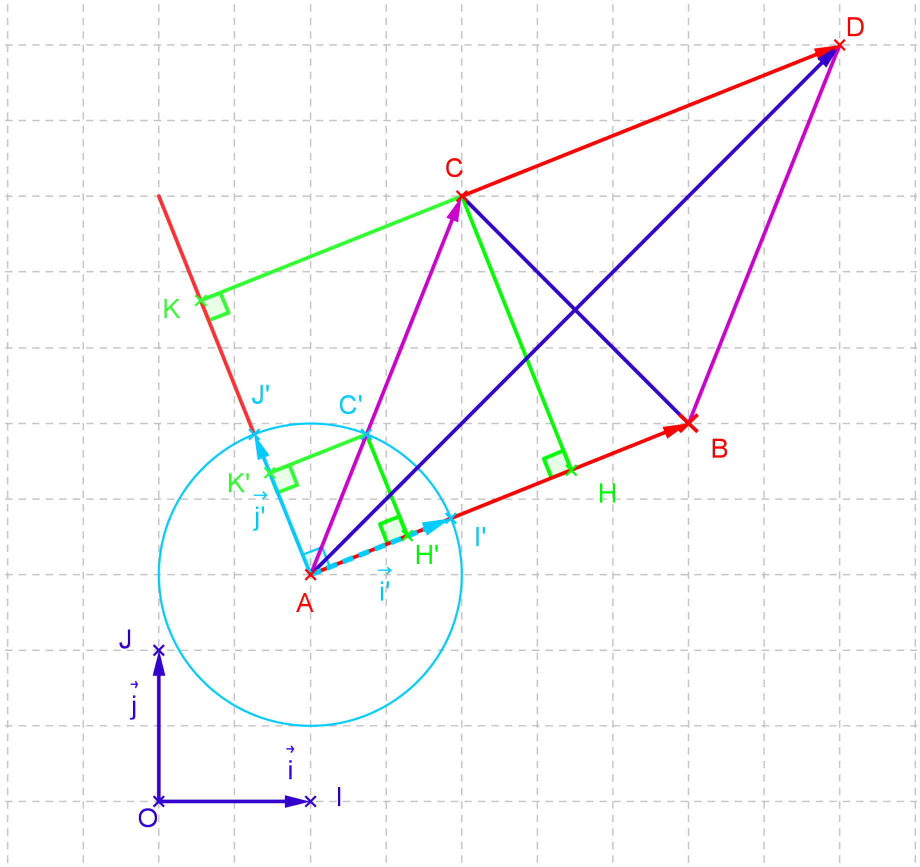
$\vec{j}'=\overrightarrow{AJ'}$ $\qquad \|\vec{i}'\|=AJ'=1$ $\qquad (\overrightarrow{AI'};\overrightarrow{AJ'})=\frac{\pi}{2}(2\pi)$

Le repère $(A;\vec{i}',\vec{j}')$ est orthonormal direct.

$\overrightarrow{AB}=AB.\vec{i}'$ $\qquad B(AB;0)$

Soit C' le point d'intersection du cercle de centre A et de rayon 1 et $[AC)$.

On note θ la mesure de l'angle $(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC})$ appartenant à $\left]0;\frac{\pi}{2}\right[$.



$C'(\cos\theta;\sin\theta)$

$\cos\theta=AH'$ et $\sin\theta=AK'$

$AH=AC\cos\theta \quad AK=AC\sin\theta$

$\vec{u}=\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}AB\\0\end{pmatrix}$ et $\vec{u}'=\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}AC\cos\theta\\AC\sin\theta\end{pmatrix}$

Donc, $2(xx'+yy')=2(AB\times AC\cos\theta+0\times AC\sin\theta)=2AB\times AC\cos\theta=2AB\times AH$

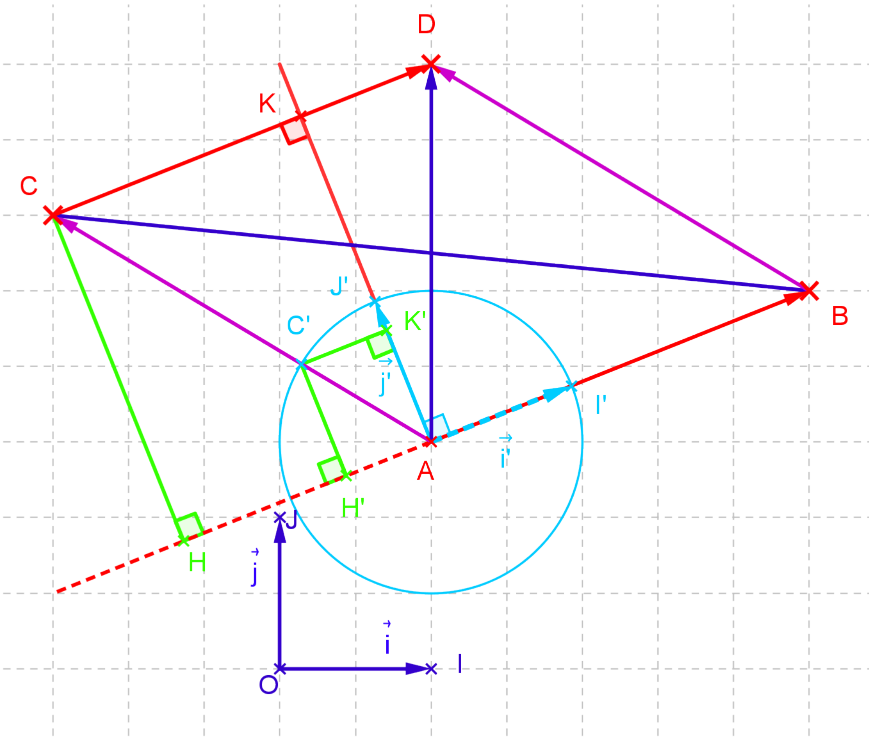
Copyright ® meilleurenmaths.com. Tous droits réservés

On obtient donc $AD^2 = AB^2 + AC^2 + 2\,AB \times AH$

1.4 Deuxième cas

L'angle $\widehat{BAC}$ est obtus c'est à dire une mesure de l'angle $(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC})$ appartient à $\left]\frac{\pi}{2};\pi\right[$.

On détermine le même repère $(A;\vec{i}\,',\vec{j}\,')$.



On note θ la mesure de l'angle $(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC})$ appartenant à $\left]\frac{\pi}{2};\pi\right[$.

$B(AB;0)$ $\qquad C'(\cos\theta;\sin\theta)$

$\cos\theta = -AH'$ et $\sin\theta = AK'$

$C(AC\cos\theta;AC\sin\theta)$

$AC\cos\theta = -AH$

Donc, $2(xx' + yy') = 2(AB \times AC\cos\theta + 0 \times AC\sin\theta) = 2\,AB \times AC\cos\theta$

Remarque :

_ $\cos\theta = -AH' < 0$

$(\overrightarrow{AC};-\overrightarrow{AB}) = \pi - \theta\,(2\pi)$

$\cos(\pi - \theta) = -\cos(\theta)$

Donc $AH = -AC\cos\theta$

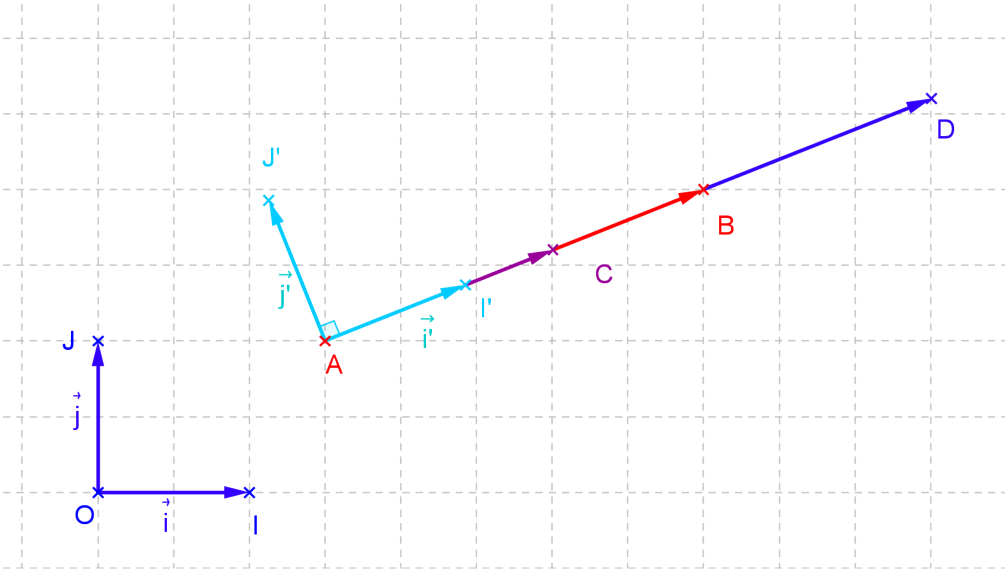
Donc, $2(xx' + yy') = 2\,AB \times AC\cos\theta = -2\,AB \times AH$

On obtient donc $AD^2 = AB^2 + AC^2 - 2\,AB \times AH$

1.5 Cas particuliers

a) $\theta = 0$ $\qquad (\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}) = 0\,(2\pi)$

Copyright ® meilleurenmaths.com. Tous droits réservés



Dans ce cas, $C = H$

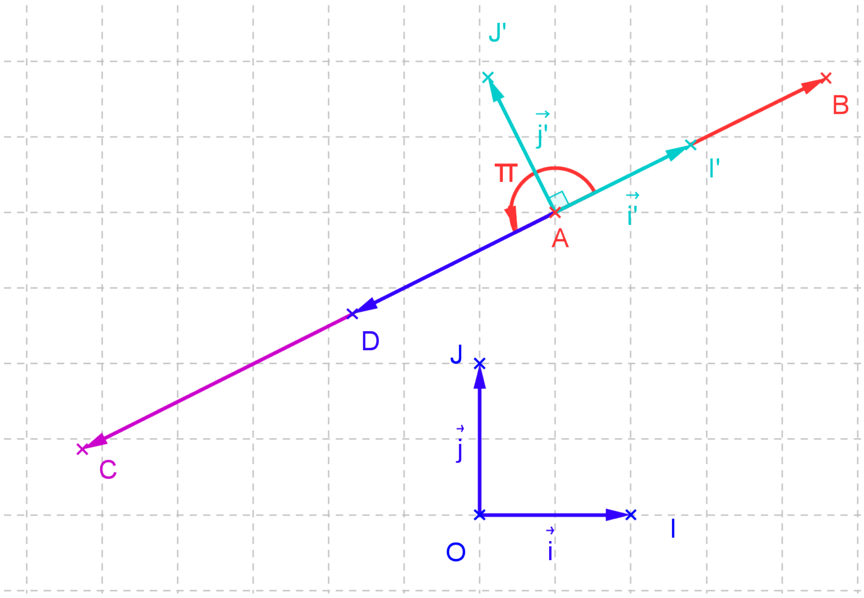
Dans le repère $(A; \vec{i}', \vec{j}')$: $C(AC; 0)$ et $B(AB; 0)$

$2(xx' + yy') = 2\,AB \times AC$

Or, $\cos\theta = \cos 0 = 1$

Donc, $2(xx' + yy') = 2\,AB \times AC \cos\theta = 2\,AB \times AH$

b) $\theta = \pi$ $\quad(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = \pi\,(2\pi)$



Dans ce cas, $C = H$

Dans le repère $(A; \vec{i}', \vec{j}')$: $C(-AC; 0)$ et $B(AB; 0)$

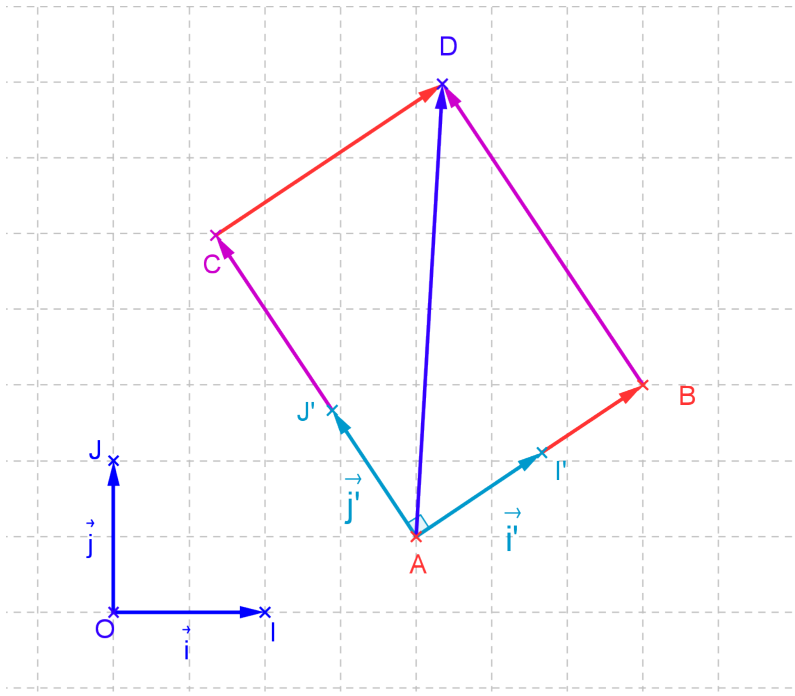
$2(xx' + yy') = -2\,AB \times AC$

Or, $\cos\theta = \cos\pi = -1$

Donc, $2(xx' + yy') = 2\,AB \times AC \cos\theta = -2\,AB \times AH$

c) $\theta = \frac{\pi}{2}$ $\quad(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = \frac{\pi}{2}(2\pi)$

Copyright ® meilleurenmaths.com. Tous droits réservés



Dans ce cas, $H = A$

Dans le repère $(A;\vec{i}', \vec{j}')$: $C(0;AC)$ et $B(AB;0)$

$2(xx'+yy') = 2(AB \times 0 + 0 \times AC) = 0$

Or, $\cos\theta = \cos\frac{\pi}{2} = 0$

Donc, $2(xx'+yy') = 2\,AB \times AC\cos\theta = 2\,AB \times AH$ (car $AH = 0$)

d)

- Si $A = B$ alors $\vec{u} = \vec{0}$ $\quad \vec{u}\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$

  Donc, $2(xx'+yy') = 2(0 \times x' + 0 \times y') = 0$

- Si $A = C$ alors $\vec{u}' = \vec{0}$ $\quad \vec{u}'\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$

  Donc, $2(xx'+yy') = 2(x \times 0 + y \times 0) = 0$

1.6 Conclusions

Si les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{u}'$ sont non nuls, $(\vec{u};\vec{u}') = \theta(2\pi)$ alors $2(xx'+yy') = 2\,AB \times AC\cos\theta$
Si $\cos\theta \geqslant 0$ alors $2(xx'+yy') = 2\,AB \times AH$
Si $\cos\theta < 0$ alors $2(xx'+yy') = -2\,AB \times AH$
On obtient aussi :
$AD^2 = AB^2 + AC^2 + 2\,AB \times AC\cos\theta$

Copyright ® meilleurenmaths.com. Tous droits réservés

2. Produit scalaire

2.1 Définition

Si $\vec{u}$ et $\vec{u'}$ sont deux vecteurs non nuls du plan. On nomme **produit scalaire** des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{u'}$ le nombre réel noté $\vec{u}.\vec{u'}$ défini par : $\vec{u}.\vec{u'}=\|\vec{u}\|\times\|\vec{u'}\|\times\cos(\vec{u};\vec{u'})$

Si $\vec{u}$ ou $\vec{u'}$ est le vecteur nul alors $\vec{u}.\vec{u'}=0$

2.2 Remarques

$\vec{u}$ et $\vec{u'}$ sont deux vecteurs non nuls du plan.

a) On pose $\vec{u}=\overrightarrow{AB}$ et $\vec{u'}=\overrightarrow{AC}$.

Si ABC est un triangle direct alors la mesure principale de l'angle $(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC})$ appartient à $[0;\pi]$ et $\cos\widehat{BAC}=\cos(\vec{u};\vec{u'})$.

Si ABC n'est pas un triangle direct alors la mesure principale de l'angle $(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC})$ appartient à $]-\pi;0[$ et $\cos\widehat{BAC}=\cos[-(\vec{u};\vec{u'})]=\cos(\vec{u};\vec{u'})$.

Conséquence

$\vec{u}.\vec{u'}=\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=AB\times AC\times\cos\widehat{BAC}$

b) Cas particuliers

- $\widehat{BAC}=0$ $\cos\widehat{BAC}=\cos 0=1$

  Donc, $\vec{u}.\vec{u'}=\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=AB\times AC$

  Conséquence : carré scalaire

  Si $\vec{u}=\vec{u'}$ alors $\vec{u}.\vec{u}=\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AB}=AB\times AB=AB^2=\|\vec{u}\|^2$

On nomme **carré scalaire** de $\vec{u}$ et on note $\vec{u}^2$ le produit scalaire : $\vec{u}.\vec{u}$. On a donc :

$\vec{u}^2=\vec{u}.\vec{u}=\|\vec{u}\|^2$

- $\widehat{BAC}=\pi$ $\cos\widehat{BAC}=\cos\pi=-1$

  Donc, $\vec{u}.\vec{u'}=\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=-AB\times AC$

- $\widehat{BAC}=\frac{\pi}{2}$ $\cos\widehat{BAC}=\cos\frac{\pi}{2}=0$

  Donc, $\vec{u}.\vec{u'}=\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=0$

c) Si H est le pied de la hauteur du triangle ABC issue de C.

- Si $\widehat{BAC}$ est un angle aigu alors $\cos\widehat{BAC}>0$ et $\vec{u}.\vec{u'}=\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=AB\times AH$
- Si $\widehat{BAC}$ est un angle obtus alors $\cos\widehat{BAC}<0$ et $\vec{u}.\vec{u'}=\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=-AB\times AH$
- Si $\widehat{BAC}$ est un angle droit alors $H=A$ et $\cos\widehat{BAC}=0$ et $\vec{u}.\vec{u'}=\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=0=AB\times AH$

Conséquence

Copyright ® meilleurenmaths.com. Tous droits réservés

$$\vec{u}.\vec{u'}=\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AH}$$

2.3 Expression analytique du produit scalaire dans un repère orthonormal

$(O;\vec{i},\vec{j})$ est un repère orthonormal.

Si $\vec{u}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ et $\vec{u'}\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}$ alors $\vec{u}.\vec{u'}=xx'+yy'$.

Démonstration :

- Si $\vec{u}=\vec{0}$ alors $\vec{u}.\vec{u'}=0$ et $0\times x'+0\times y'=0$ donc $\vec{u}.\vec{u'}=xx'+yy'$
- Si $\vec{u'}=\vec{0}$ alors $\vec{u}.\vec{u'}=0$ et $x\times 0+y\times 0=0$ donc $\vec{u}.\vec{u'}=xx'+yy'$
- Si $\vec{u}\neq\vec{0}$ et $\vec{u'}\neq\vec{0}$ alors $\vec{u}.\vec{u'}=\|\vec{u}\|\times\|\vec{u'}\|\times\cos(\vec{u};\vec{u'})$

  On pose : $\vec{u}=\overrightarrow{AB}$ et $\vec{u'}=\overrightarrow{AC}$

  $\vec{u}.\vec{u'}=\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=AB\times AC\times\cos\widehat{BAC}$

  Nous avons vu dans le premier paragraphe que $AB\times AC\times\cos\widehat{BAC}=xx'+yy'$

  Donc, $\vec{u}.\vec{u'}=xx'+yy'$

2.4 Produit scalaire et normes

$(O;\vec{i},\vec{j})$ est un repère orthonormal.

$\vec{u}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ et $\vec{u'}\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}$

Nous avons vu que :

$\|\vec{u}+\vec{u'}\|^2=\|\vec{u}\|^2+\|\vec{u'}\|^2+2(xx'+yy')$

$\|\vec{u}+\vec{u'}\|^2=\|\vec{u}\|^2+\|\vec{u'}\|^2+2(\vec{u}.\vec{u'})$

On a donc :

$$\vec{u}.\vec{u'}=\frac{1}{2}[\|\vec{u}+\vec{u}'\|^2-\|\vec{u}\|^2-\|\vec{u}'\|^2]$$

Remarque :

$\vec{u}-\vec{u'}\begin{pmatrix}x-x'\\y-y'\end{pmatrix}$

$\|\vec{u}-\vec{u}'\|^2=(x-x')^2+(y-y')^2$

$\|\vec{u}-\vec{u}'\|^2=x^2+x'^2-2xx'+y^2+y'^2-2yy'$

$\|\vec{u}-\vec{u}'\|^2=(x^2+y^2)+(x'^2+y'^2)-2(xx'+yy')$

$\|\vec{u}-\vec{u}'\|^2=\|\vec{u}\|^2+\|\vec{v}\|^2-2\vec{u}\cdot\vec{u}'$

On a donc aussi :

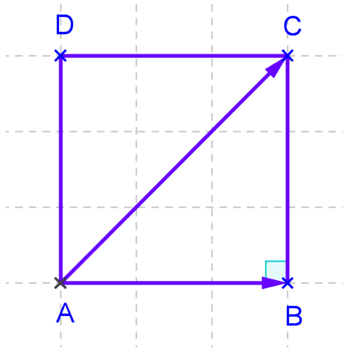
Copyright ® meilleurenmaths.com. Tous droits réservés

$$\vec{u}.\vec{u}'=\frac{1}{2}\left[\|\vec{u}\|^2+\|\vec{u}'\|^2-\|\vec{u}+\vec{u}'\|^2\right]$$

2.5 Exercices

a) ABCD est un carré direct. $AB=3$

Calculer $\vec{AB}.\vec{AC}$



$(\vec{AB};\vec{AC})=\frac{\pi}{4}(2\pi)$

$\vec{AB}.\vec{AC}=AB\times AC\times\cos\frac{\pi}{4}$

Or,

$AC^2=AB^2+BC^2=3^2+3^2=18$

$AC=\sqrt{18}=3\sqrt{2}$

$\cos\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}$

Donc, $\vec{AB}.\vec{AC}=3\times 3\sqrt{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2}=9$

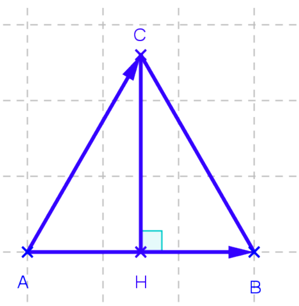
Autre méthode :

Le triangle ABC est rectangle en B donc H=B et :

$\vec{AB}.\vec{AC}=AB\times AH=AB\times AB=3\times 3=9$

b) ABC est un triangle équilatéral direct. AB=3.

Calculer $\vec{AB}.\vec{AC}$



$(\vec{AB};\vec{AC})=\frac{\pi}{3}(2\pi)$

Copyright ® meilleurenmaths.com. Tous droits réservés

$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=AB\times AC\times\cos\frac{\pi}{3}$

Or, $\cos\frac{\pi}{3}=\frac{1}{2}$

Donc, $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=3\times3\times\frac{1}{2}=\frac{9}{2}$

Autre méthode :

H le milieu de [AB]

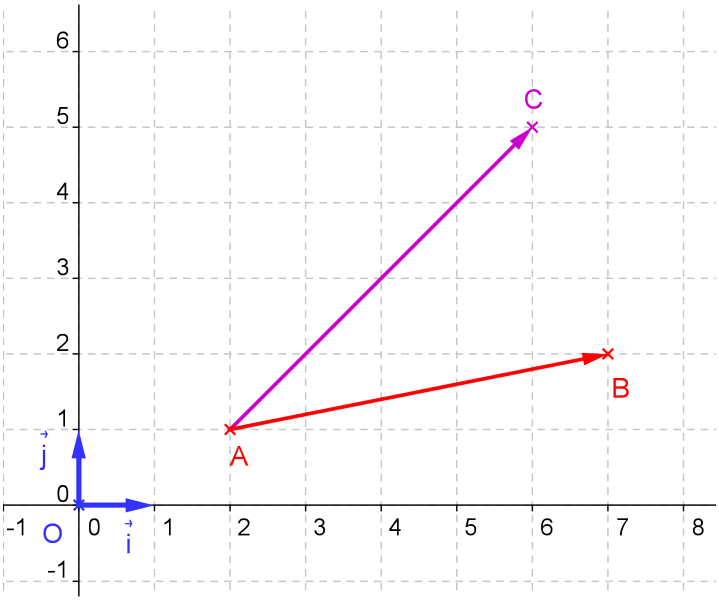
H est le pied de la hauteur du triangle ABC issue de C.

$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=AB\times AB=3\times\frac{3}{2}=\frac{9}{2}$

c) $(O;\vec{i},\vec{j})$ est un repère orthonormal du plan ;

A(2;1) B(7;2) C(6;5)

Calculer $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$



$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}7-2\\2-1\end{pmatrix}$ $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}5\\1\end{pmatrix}$

$\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}6-2\\5-1\end{pmatrix}$ $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}4\\4\end{pmatrix}$

$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=5\times4+1\times4=20+4=24$

2.6 Propriétés algébriques du produit scalaire

a)

Pour tous vecteurs $\vec{u}$; $\vec{v}$ et $\vec{w}$ du plan et tout nombre réel k, on a :

- $\vec{u}.\vec{v}=\vec{v}.\vec{u}$
- $\vec{u}.(\vec{v}+\vec{w})=\vec{u}.\vec{v}+\vec{u}.\vec{w}$
- $\vec{u}.(k\vec{v})=(k\vec{u}).\vec{v}=k\times(\vec{u}.\vec{v})$

Copyright ® meilleurenmaths.com. Tous droits réservés

Démonstration :

$(O;\vec{i},\vec{j})$ est un repère orthonormal.

$\vec{u}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ $\vec{v}\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}$ $\vec{w}\begin{pmatrix}x''\\y''\end{pmatrix}$

- $\vec{u}.\vec{v}=xx'+yy'$

  $\vec{v}.\vec{u}=x'x+y'y$

  Donc, $\vec{u}.\vec{v}=\vec{v}.\vec{u}$

  On dit que le produit scalaire est symétrique.

- $\vec{v}+\vec{w}\begin{pmatrix}x'+x''\\y'+y''\end{pmatrix}$

  $\vec{u}.(\vec{v}+\vec{w})=x(x'+x'')+y(y'+y'')$

  $\vec{u}.(\vec{v}+\vec{w})=xx'+xx''+yy'+yy''$

  $\vec{u}.(\vec{v}+\vec{w})=xx'+yy'+xx''+yy''$

  Donc, $\vec{u}.(\vec{v}+\vec{w})=\vec{u}.\vec{v}+\vec{u}.\vec{w}$

- $k\vec{u}\begin{pmatrix}kx\\ky\end{pmatrix}$ $k\vec{v}\begin{pmatrix}kx'\\ky'\end{pmatrix}$

  $\vec{u}.(k\vec{v})=x(kx')+y(ky')$

  $\vec{u}.(k\vec{v})=kxx'+kyy'$

  $(k\vec{u}).\vec{v}=(kx)x'+(ky)y'$

  $(k\vec{u}).\vec{v}=kxx'+kyy'$

  $k\times(\vec{u}.\vec{v})=k(xx'+yy')$

  $k\times(\vec{u}.\vec{v})=kxx'+kyy'$

  Donc, $\vec{u}.(k\vec{v})=(k\vec{u}).\vec{v}=k\times(\vec{u}.\vec{v})$

Cas particulier : k=-1

$(-1)\vec{u}=-\vec{u}$

Donc, $(-\vec{u}).\vec{v}=\vec{u}.(-\vec{v})=-\vec{u}.\vec{v}$

b) **«Identités remarquables »**

Pour tous vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$

- $(\vec{u}+\vec{v})^2=\vec{u}^2+2\vec{u}.\vec{v}+\vec{v}^2$
- $(\vec{u}-\vec{v})^2=\vec{u}^2-2\vec{u}.\vec{v}+\vec{v}^2$
- $(\vec{u}+\vec{v}).(\vec{u}-\vec{v})=\vec{u}^2-\vec{v}^2$

Démonstration :

- $(\vec{u}+\vec{v})^2=\|\vec{u}+\vec{v}\|^2$

Copyright ® meilleurenmaths.com. Tous droits réservés

$\vec{u}^2=||\vec{u}||^2$

$\vec{v}^2=||\vec{v}||^2$

Nous avons démontré au 4. que : $||\vec{u}+\vec{v}||^2=||\vec{u}||^2+||\vec{v}||^2+2(\vec{u}.\vec{v})$

Donc : $(\vec{u}+\vec{v})^2=\vec{u}^2+2\vec{u}.\vec{v}+\vec{v}^2$

- même raisonnement pour $(\vec{u}-\vec{v})^2$
- $(\vec{u}+\vec{v}).(\vec{u}-\vec{v})=\vec{u}.(\vec{u}-\vec{v})+\vec{v}.(\vec{u}-\vec{v})$

  $(\vec{u}+\vec{v}).(\vec{u}-\vec{v})=\vec{u}.\vec{u}+\vec{u}.(-\vec{v})+\vec{v}.\vec{u}+\vec{v}.(-\vec{v})$

  $(\vec{u}+\vec{v}).(\vec{u}-\vec{v})=\vec{u}^2-\vec{u}.\vec{v}+\vec{v}.\vec{u}-\vec{v}^2$

  $(\vec{u}+\vec{v}).(\vec{u}-\vec{v})=\vec{u}^2-\vec{v}^2$

2.7 Orthogonalité de deux vecteurs

a) Définition :

On dit que les vecteurs $\vec{u}$ et $\overrightarrow{u'}$ sont **orthogonaux** lorsque $\vec{u}=\vec{0}$ ou $\overrightarrow{u'}=\vec{0}$ ou lorsque $\vec{u}\neq\vec{0}$ et $\overrightarrow{u'}\neq\vec{0}$ on a $(\vec{u};\overrightarrow{u'})=\frac{\pi}{2}(2\pi)$ ou $(\vec{u};\overrightarrow{u'})=-\frac{\pi}{2}(2\pi)$

b) Propriété :

Les vecteurs $\vec{u}$ et $\overrightarrow{u'}$ sont **orthogonaux** si et seulement si $\vec{u}.\overrightarrow{u'}=0$

2.8 Applications géométriques

a) **Théorème d'Al-Kashi**

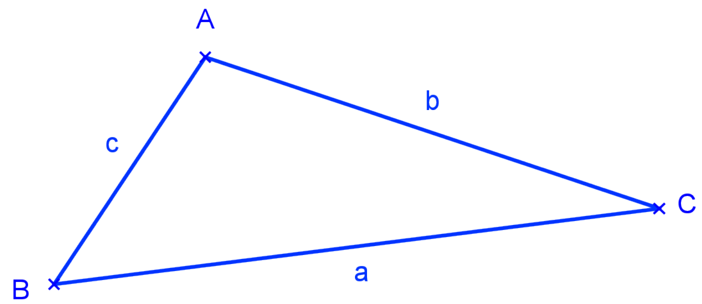
Soit ABC un triangle du plan. On note : $a=BC$; $b=AC$; $c=AB$. On a :

$a^2=b^2+c^2-2bc\cos\widehat{A}$

$b^2=a^2+c^2-2ac\cos\widehat{B}$

$c^2=a^2+b^2-2ab\cos\widehat{C}$

Démonstration :



$\overrightarrow{BC}^2=(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AC})^2=\overrightarrow{BA}$ ç $2+\overrightarrow{AC}^2+2\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{AC}$

$\overrightarrow{BC}^2=\overrightarrow{BA}^2+\overrightarrow{AC}^2-2\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$

$\overrightarrow{BC}^2=\overrightarrow{BA}^2+\overrightarrow{AC}^2-2\times AB\times AC\times\cos\widehat{BAC}$

Copyright ® meilleurenmaths.com. Tous droits réservés

D'où, $a^2=c^2+b^2+2cb\cos\widehat{A}$

Même démonstration pour les autres formules.

b) Remarques :

Ces formules permettent de déterminer une mesure des angles d'un triangle lorsque l'on connaît la longueur des trois côtés du triangle ou déterminer la longueur du 3ième côté d'un triangle connaissant la longueur des deux autres côtés et une mesure de l'angle compris entre ces deux côtés.

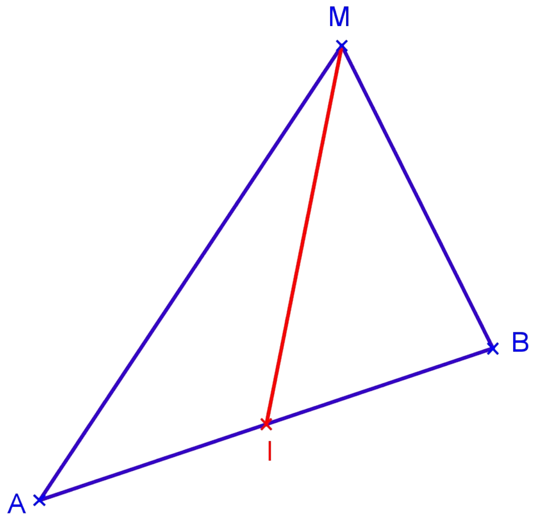
c) **Théorème de la médiane :**

A et B sont deux points du plan. I est le milieu de [AB].

Pour tout point M du plan, on a :

$MA^2+MB^2=2MI^2+2IA^2$

Démonstration :



$MA^2+MB^2=\overrightarrow{MA}^2+\overrightarrow{MB}^2$

$MA^2+MB^2=(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IA})^2+(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IB})^2$

$MA^2+MB^2=\overrightarrow{MI}^2+\overrightarrow{IA}^2+2\overrightarrow{MI}.\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{MI}^2+\overrightarrow{IB}^2+2\overrightarrow{MI}.\overrightarrow{IB}$

$MA^2+MB^2=2\overrightarrow{MI}^2+\overrightarrow{IA}^2+\overrightarrow{IB}^2+2\overrightarrow{MI}.(\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IB})$

Or, I est le milieu de [AB] donc $\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IB}=\vec{0}$ et $IA=IB$

Donc, $MA^2+MB^2=2MI^2+2IA^2$

d) Remarques :

- On peut aussi écrire :

  $MA^2+MB^2=2MI^2+\frac{AB^2}{2}$

  car $IA=IB=\frac{AB}{2}$ et $2IA^2=\frac{AB^2}{2}$

- **(MI) est la médiane du triangle ABM issue de M. Cette formule permet de calculer MI² connaissant la longueur des 3 côtés du triangle ABM.**

Copyright ® meilleurenmaths.com. Tous droits réservés