Exercices Fiche 1

Exercice 1

Soit ABC un triangle tel que AB=5, AC =3 et $\widehat{BAC} = \frac{3\pi}{4}$.

Déterminer $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$.

Exercice 2

Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs tels que $\|\vec{u}\|$ =2, $\vec{u} \cdot \vec{v}$ =-7 et $(\vec{u}, \vec{v}) = \frac{\pi}{6}$.

Déterminer $\|\vec{v}\|$.

Exercice 3

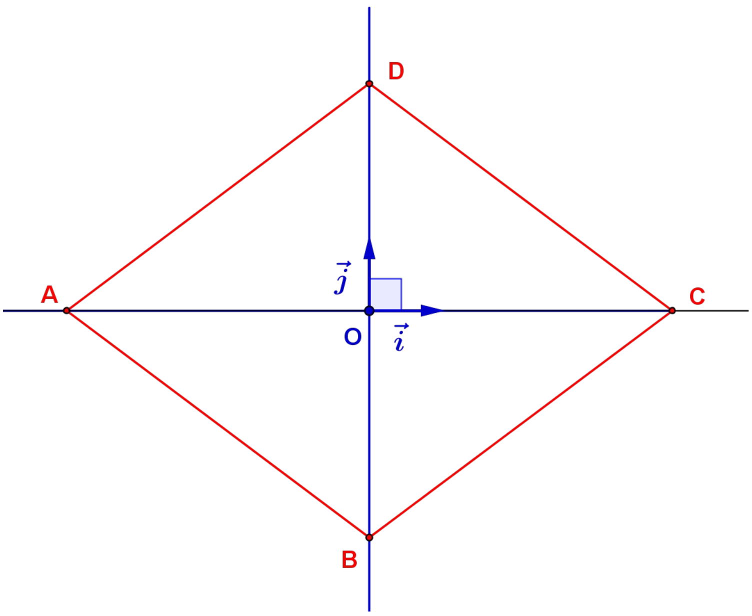
Soit M(1;3), N(4; -2) et P(2; -1) trois points dans un repère (O, $\vec{i}$, $\vec{j}$).
1. Déterminer $\overrightarrow{MN} \cdot \overrightarrow{MP}$.
2. En déduire une valeur approchée de $\widehat{NMP}$ en degrés à 0,1 prés.

Exercice 4

Soit A(-2;-3), B(1;1), C(-3;-1), D(-4;2), E(-1;-3) et F(2;-1) dans un repère orthonormé.
Les triangles ABC et EDF sont-ils rectangles en C et E respectivement?

Exercice 5

ABCD est un losange de centre O tel que OA=4 et OD = 3.



1.Calculer les produits scalaires suivants:
a. $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AD}$ b. $\overrightarrow{BO} \cdot \overrightarrow{BC}$ c. $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{DC}$ d. $\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{BD}$.

2. En utilisant les coordonnées des points dans le repère orthonormal (O; $\vec{i}$, $\vec{j}$), calculer:
a. $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD}$ b. $\overrightarrow{OC} \cdot \overrightarrow{BA}$ c. $\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{DC}$.

Exercice 6

Le vecteur $\vec{u}$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ et $\vec{v}$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}$.

Calculer:

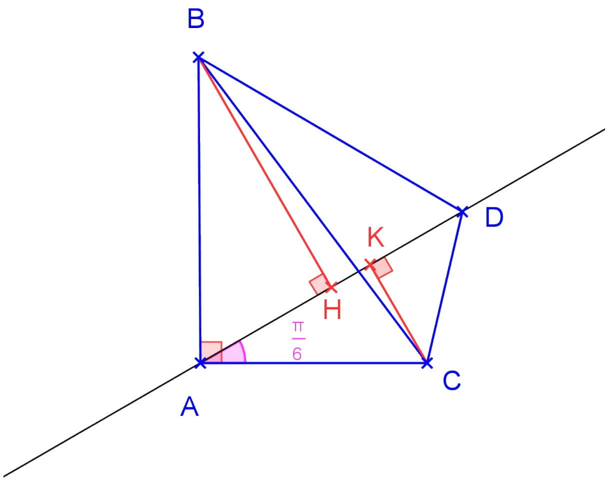
a. $\vec{u}\cdot\vec{v}$ b. $\vec{u}^{\,2}$ c. $(4\vec{u}+\vec{v})\cdot(\vec{u}-\vec{v})$ d. $(\vec{u}+2\vec{v})\cdot(2\vec{u}-\vec{v})$.

Exercice 7

ABC est un triangle rectangle en A tel que AC=5 et AB=4 et $(\overrightarrow{AC};\overrightarrow{AB})=\frac{\pi}{2}(2\pi)$.

Soit D le point du plan vérifiant AD=4 et $(\overrightarrow{AC};\overrightarrow{AD})=\frac{\pi}{6}(2\pi)$.

H est le pied de la hauteur du triangle ABD issue de B. K est le pied de la hauteur du triangle ACD issue de C.



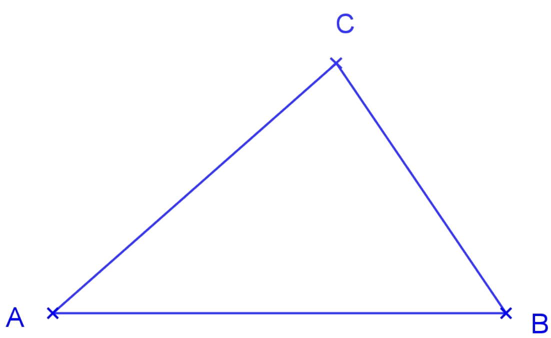
Calculer les produits scalaires suivants :

a) $\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BC}$ b) $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AH}$ c) $\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{AK}$ d) $\overrightarrow{AB}.(\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{AH})$

e) $\overrightarrow{AC}.(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AK})$ f) $\overrightarrow{KB}.\overrightarrow{HC}$

Exercice 8

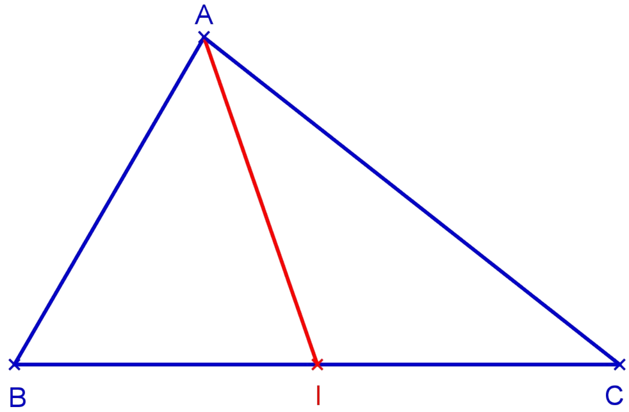
ABC est un triangle tel que AB=6 ; BC=4 et AC=5.



Déterminer une mesure en degré à 10^{-1} près de l'angle $\widehat{BAC}$.

Exercice 9

ABC est un triangle tel que AB=5 ; BC=8 et AC=7. I est le milieu de [BC].



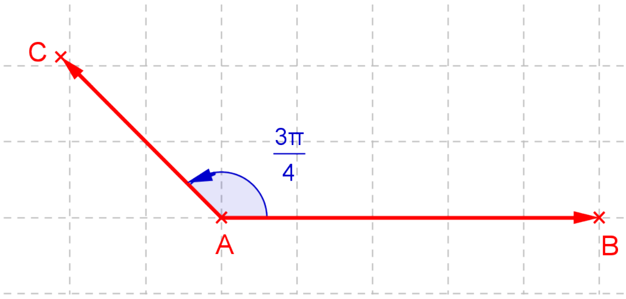
Calculer la longueur AI.

CORRECTION

Exercice 1

Soit ABC un triangle tel que AB=5, AC =3 et $\widehat{BAC}=\frac{3\pi}{4}$.

Déterminer $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$.



$$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=AB\times AC\times\cos\frac{3\pi}{4}$$

Or, $\cos\frac{3\pi}{4}=\cos\left(\pi-\frac{\pi}{4}\right)-\cos\frac{\pi}{4}=-\frac{\sqrt{2}}{2}$

Donc, $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=5\times3\times\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=-\frac{15\sqrt{2}}{2}$

Exercice 2

Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs tels que $\|\vec{u}\|$ =2, $\vec{u}\cdot\vec{v}$ =-7 et $(\vec{u},\vec{v})=\frac{\pi}{6}$.

Déterminer $\|\vec{v}\|$.

$$\vec{u}.\vec{v}=\|\vec{u}\|\times\|\vec{v}\|\times\cos(\vec{u};\vec{v})$$

$$-7=2\times\|\vec{v}\|\times\cos\frac{\pi}{6}$$

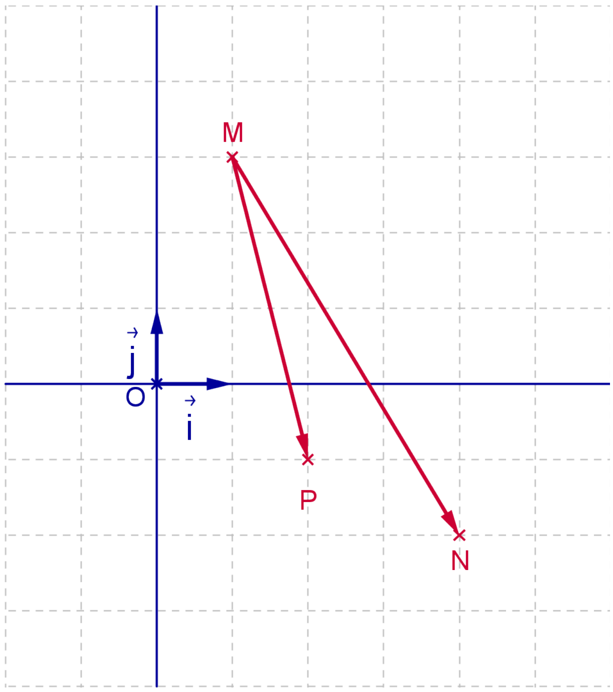
Or, $\cos\frac{\pi}{6}=\frac{\sqrt{3}}{2}$

Donc, $-7=\sqrt{3}\|\vec{v}\|$ $\|\vec{v}\|=\frac{-1}{\sqrt{3}}=\frac{-7\sqrt{3}}{3}$

Exercice 3

Soit M(1;3), N(4; -2) et P(2; -1) trois points dans un repère (O, $\vec{i}$, $\vec{j}$).

1. Déterminer $\overrightarrow{MN}\cdot\overrightarrow{MP}$.
2. En déduire une valeur approchée de $\widehat{NMP}$ en degrés à 0,1 prés.



1. $\overrightarrow{MN}\begin{pmatrix} 4-1 \\ -2-3 \end{pmatrix}$ $\overrightarrow{MP}\begin{pmatrix} 2-1 \\ -1-3 \end{pmatrix}$

$\overrightarrow{MN}\begin{pmatrix} 3 \\ -5 \end{pmatrix}$ $\overrightarrow{MP}\begin{pmatrix} 1 \\ -4 \end{pmatrix}$

$\overrightarrow{MN}.\overrightarrow{MP}=3\times1+(-5)\times(-4)=23$

2. $\overrightarrow{MN}.\overrightarrow{MP}=MN\times MP\times\cos\widehat{NMP}$

Or,

MN²=3²+(-5)²=9+25=34, donc $MN=\sqrt{34}$

MP²=1²+(-4)²=1+16=17, donc $MP=\sqrt{17}$

Donc,

$23=\sqrt{34}\times\sqrt{17}\times\cos\widehat{NMP}$

$23=\sqrt{34\times17}\times\cos\widehat{NMP}$

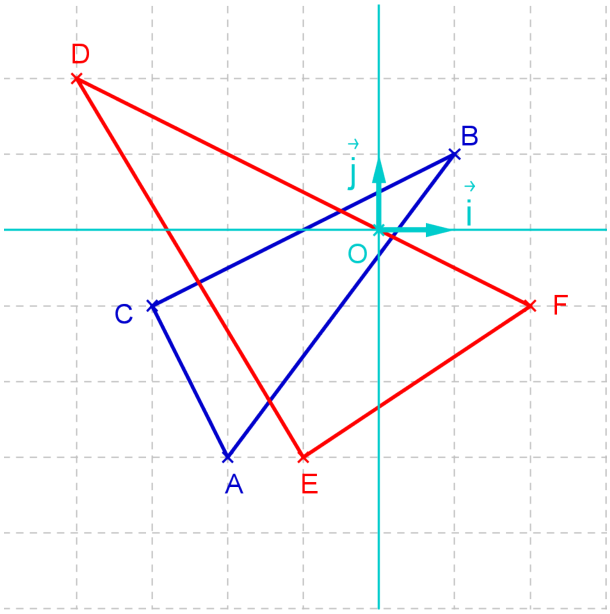
$23=17\sqrt{2}\times\cos\widehat{NMP}$

$\cos\widehat{NMP}=\dfrac{23}{17\sqrt{2}}$

On choisit comme unité de mesure des angles le degré et on utilise la calculatrice pour avoir une valeur approchée à 0,1 prés. On obtient $\widehat{NMP}\approx16{,}9^\circ$

Exercice 4

Soit A(-2;-3), B(1;1), C(-3;-1), D(-4;2), E(-1;-3) et F(2;-1) dans un repère orthonormé.
Les triangles ABC et EDF sont-ils rectangles en C et E respectivement?



Le triangle ABC est rectangle en C si et seulement si les vecteurs $\vec{CA}$ et $\vec{CB}$ sont orthogonaux, c'est à dire si et seulement si $\vec{CA}.\vec{CB}=0$.

$\vec{CA}\begin{pmatrix}-2+3\\-3+1\end{pmatrix}$ $\vec{CB}\begin{pmatrix}1+3\\1+1\end{pmatrix}$

$\vec{CA}\begin{pmatrix}1\\-2\end{pmatrix}$ $\vec{CB}\begin{pmatrix}4\\2\end{pmatrix}$

$\vec{CA}.\vec{CB}=1\times4+(-2)\times2=4-4=0$

Donc le triangle ABC est rectangle en C.

$\vec{ED}\begin{pmatrix}-4+1\\2+3\end{pmatrix}$ $\vec{EF}\begin{pmatrix}2+1\\-1+3\end{pmatrix}$

$\vec{ED}\begin{pmatrix}-3\\5\end{pmatrix}$ $\vec{EF}\begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix}$

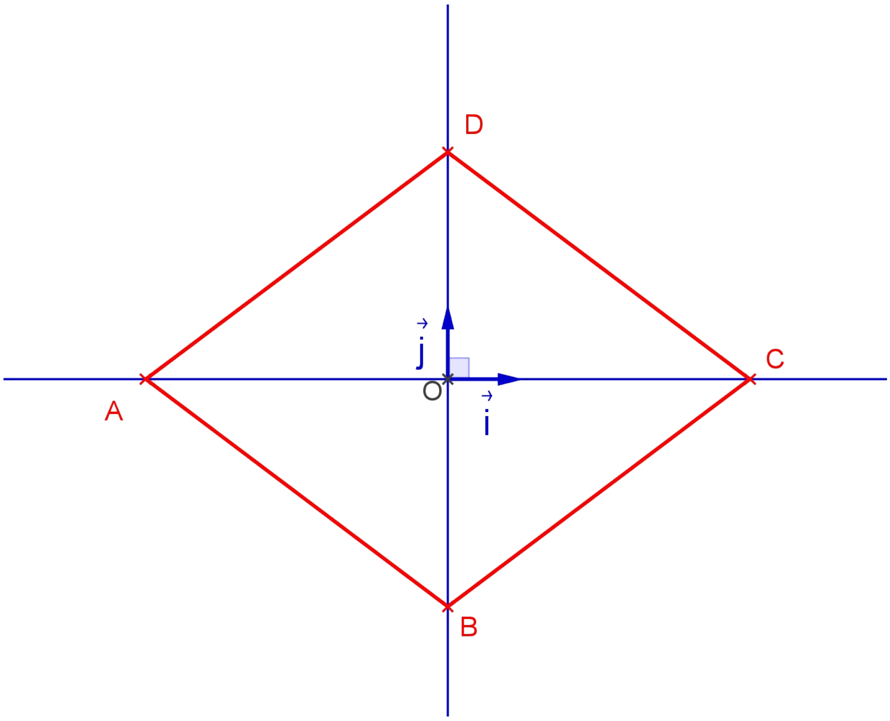
$\vec{ED}.\vec{EF}=-3\times3+5\times2=1\neq0$

Donc le triangle EDF n'est pas rectangle en E.

Remarque : pour résoudre cet exercice on peut aussi utiliser la réciproque et la contraposée du théorème de Pythagore.

Exercice 5

ABCD est un losange de centre O tel que OA=4 et OD = 3.



1.Calculer les produits scalaires suivants:

a. $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AD}$ b. $\overrightarrow{BO}\cdot\overrightarrow{BC}$ c. $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{DC}$ d. $\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{BD}$.

a. O est le pied de la hauteur du triangle ADC issue de D, donc :
$\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{AO}=AC\times AO\times\cos(\overrightarrow{AC};\overrightarrow{AO})=8\times4\times1=32$

b. O est le pied de la hauteur du triangle OBC issue de C, donc :
$\overrightarrow{BO}.\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{BO}.\overrightarrow{BO}=\overrightarrow{BO}^2=BO^2=3^2=9$

c. $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$ car ABCD est un losange, donc :
$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{DC}=\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AB}^2=AB^2$
Dans le triangle rectangle OAB, j'utilise le théorème de Pythagore :
$AB^2=OA^2+OB^2$
$AB^2=4^2+3^2$
$AB^2=16+9$
$AB^2=25$
$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{DC}=25$

d. O est le pied de la hauteur du triangle DBC issue de C, donc :
$\overrightarrow{BC}.\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{BD}.\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{BD}.\overrightarrow{BO}=BD\times BO\times\cos(\overrightarrow{BD};\overrightarrow{BO})=6\times3\times1=18$

2. En utilisant les coordonnées des points dans le repère orthonormal (O; $\vec{i}$, $\vec{j}$), calculer:

a. $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}$ b. $\overrightarrow{OC}\cdot\overrightarrow{BA}$ c. $\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{DC}$.

A(-4;0) B(0;-3) C(4;0) D(0;3)

a. $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}4\\-3\end{pmatrix}$ $\overrightarrow{AD}\begin{pmatrix}4\\3\end{pmatrix}$
$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AD}=4\times4+(-3)\times3=16-9=7$

b. $\overrightarrow{OC}\begin{pmatrix}4\\0\end{pmatrix}$ $\overrightarrow{BA}\begin{pmatrix}-4\\3\end{pmatrix}$

$\overrightarrow{OC}.\overrightarrow{BA}=4\times(-4)+0\times3=-16$

c. $\overrightarrow{AD}\begin{pmatrix}4\\3\end{pmatrix}$ $\overrightarrow{DC}\begin{pmatrix}4\\-3\end{pmatrix}$

$\overrightarrow{AD}.\overrightarrow{DC}=4\times4+3\times(-3)=16-9=7$

Exercice 6

Le vecteur $\vec{u}$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix}2\\-1\end{pmatrix}$ et $\vec{v}$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix}1\\4\end{pmatrix}$.

Calculer:

a. $\vec{u}\cdot\vec{v}$ b. $\vec{u}^{\,2}$ c. $(4\vec{u}+\vec{v})\cdot(\vec{u}-\vec{v})$ d. $(\vec{u}+2\vec{v})\cdot(2\vec{u}-\vec{v})$.

a. $\vec{u}.\vec{v}=2\times1+(-1)\times4=2-4=-2$

b. $\vec{u}^2=2^2+(-1)^2=4+1=5$

c. $4\vec{u}+\vec{v}\begin{pmatrix}4\times2+1\\4\times(-1)+4\end{pmatrix}$ $\vec{u}-\vec{v}\begin{pmatrix}2-1\\-1-4\end{pmatrix}$

$4\vec{u}+\vec{v}\begin{pmatrix}9\\0\end{pmatrix}$ $\vec{u}-\vec{v}\begin{pmatrix}1\\-5\end{pmatrix}$

$(4\vec{u}+\vec{v}).(\vec{u}-\vec{v})=9\times1+0\times(-5)=9$

d. $\vec{u}+2\vec{v}\begin{pmatrix}2+2\times1\\-1+2\times4\end{pmatrix}$ $2\vec{u}-\vec{v}\begin{pmatrix}2\times2-1\\2\times(-1)-4\end{pmatrix}$

$\vec{u}+2\vec{v}\begin{pmatrix}4\\7\end{pmatrix}$ $2\vec{u}-\vec{v}\begin{pmatrix}3\\-6\end{pmatrix}$

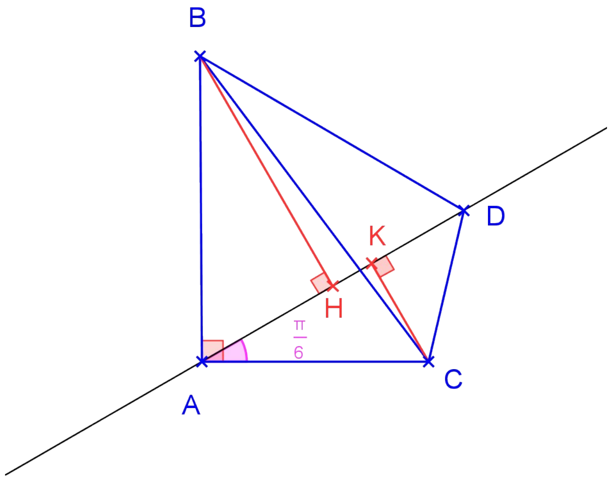
$(\vec{u}+2\vec{v}).(2\vec{u}-\vec{v})=4\times3+7\times(-6)=12-42=-30$

Exercice 7

ABC est un triangle rectangle en A tel que AC=5 et AB=4 et $(\overrightarrow{AC};\overrightarrow{AB})=\frac{\pi}{2}(2\pi)$.

Soit D le point du plan vérifiant AD=4 et $(\overrightarrow{AC};\overrightarrow{AD})=\frac{\pi}{6}(2\pi)$.

H est le pied de la hauteur du triangle ABD issue de B. K est le pied de la hauteur du triangle ACD issue de C.



Calculer les produits scalaires suivants :

a) $\vec{BA}.\vec{BC}$ b) $\vec{AB}.\vec{AH}$ c) $\vec{AC}.\vec{AK}$ d) $\vec{AB}.(\vec{CA}+\vec{AH})$

e) $\vec{AC}.(\vec{BA}+\vec{AK})$ f) $\vec{KB}.\vec{HC}$

a) Le triangle ABC est rectangle en A donc le pied de la hauteur du triangle ABC issue de C est A, donc :
$\vec{BA}.\vec{BC}=\vec{BA}.\vec{BA}=\vec{BA}^2=BA^2=4^2=16$

b) Le triangle ABH est rectangle en H donc le pied de la hauteur du triangle ABH issue de B est H, donc :
$\vec{AB}.\vec{AH}=\vec{AH}.\vec{AB}=\vec{AH}.\vec{AH}=\vec{AH}^2=AH^2$

Dans le triangle rectangle ABH :

$\widehat{BAH}=\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{3}$

$\cos\frac{\pi}{3}=\frac{AH}{AB}=\frac{1}{2}$

Donc, $AH=\frac{1}{2}AB=2$

$\vec{AB}.\vec{AH}=2^2=4$

c) Le triangle ACK est rectangle en K donc le pied de la hauteur du triangle ACK issue de C est K, donc :
$\vec{AC}.\vec{AK}=\vec{AK}.\vec{AC}=\vec{AK}.\vec{AK}=\vec{AK}^2=AK^2$

$\cos\frac{\pi}{6}=\frac{AK}{AC}=\frac{\sqrt{3}}{2}$

Donc, $AK=\frac{\sqrt{3}}{2}AC=\frac{5\sqrt{3}}{2}$

$\vec{AC}.\vec{AK}=\left(\frac{5\sqrt{3}}{2}\right)^2=\frac{75}{2}$

d) $\vec{AB}.(\vec{CA}+\vec{AH})=\vec{AB}.\vec{CA}+\vec{AB}.\vec{AH}$

Or, les vecteurs $\vec{AB}$ et $\vec{AC}$ sont orthogonaux donc $\vec{AB}.\vec{CA}=0$

$\vec{AB}.(\vec{CA}+\vec{AH})=4$

e) $\vec{AC}.(\vec{BA}+\vec{AK})=\vec{AC}.\vec{BA}+\vec{AC}.\vec{AK}$

Or, $\vec{AC}.\vec{BA}=0$ $\vec{AC}.(\vec{BA}+\vec{AK})=\frac{75}{2}$

f) $\vec{KB}.\vec{HC}=(\vec{KA}+\vec{AB}).(\vec{HA}+\vec{AC})$

$\vec{KB}.\vec{HC}=\vec{KA}.\vec{HA}+\vec{KA}.\vec{AC}+\vec{AB}.\vec{HA}+\vec{AB}.\vec{AC}$ Or, $\vec{AB}.\vec{AC}=0$

$$\overrightarrow{KA}.\overrightarrow{HA}=KA\times HA\times\cos(\overrightarrow{KA},\overrightarrow{HA})=\frac{5\sqrt{3}}{2}\times 2\times 1=5\sqrt{3}$$

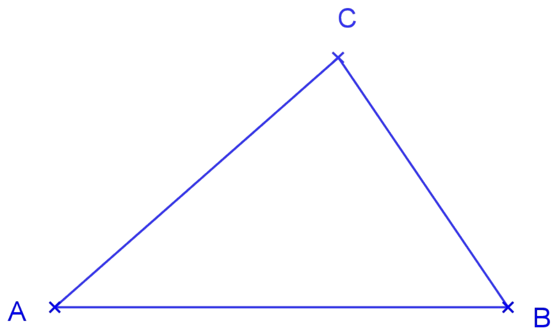
$$\overrightarrow{KA}.\overrightarrow{AC}=-\overrightarrow{AK}.\overrightarrow{AC}=\frac{-75}{2}$$

$$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{HA}=-\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AH}=-4$$

$$\overrightarrow{KB}.\overrightarrow{HC}=5\sqrt{3}-\frac{75}{2}-4=\frac{10\sqrt{3}-75-8}{2}=\frac{10\sqrt{3}-83}{2}$$

Exercice 8

ABC est un triangle tel que AB=6 ; BC=4 et AC=5.



Déterminer une mesure en degré à 10^{-1} près de l'angle $\widehat{BAC}$.

$a=BC=4$; $b=AC=5$; $c=AB=6$

$a^2=b^2+c^2-2bc\cos\widehat{A}$

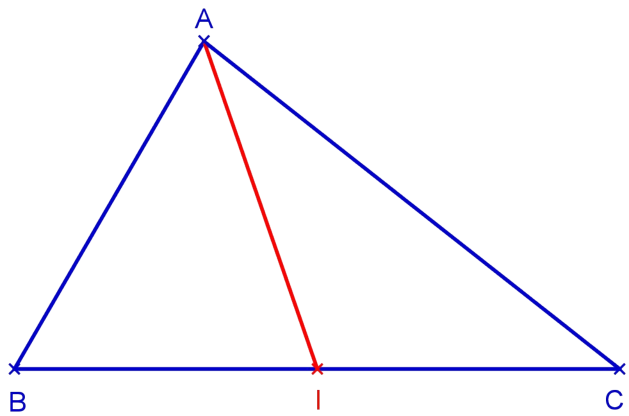
$16=25+36-2\times 5\times 6\times\cos\widehat{BAC}$

$-45=-60\cos\widehat{BAC}$

$\cos\widehat{BAC}=\frac{45}{60}=\frac{3}{4}$ $\widehat{BAC}\approx 41,4^\circ$

Exercice 9

ABC est un triangle tel que AB=5 ; BC=8 et AC=7. I est le milieu de [BC].



Calculer la longueur AI.

$AB^2+AC^2=2AI^2+2IC^2$

$25+49=2AI^2+32$

$AI^2=\frac{42}{2}=21$ $AI=\sqrt{21}$