Exercices Fiche 2

Exercice 1

Soit ABC un triangle tel que AB = 2, BC = 3 et $\widehat{ABC} = \frac{\pi}{3}$.

Soit K le milieu de [BC] et H le projeté orthogonal de A sur [BC].
Calculer $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{AH} \cdot \overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{CK}$.

Exercice 2

Dans un repère orthonormé, on considère les points A(-4;2), B(-1; 3) et C(1; -3).
Démontrer, en utilisant le produit scalaire , que le triangle ABC est rectangle.

Exercice 3

On donne $\|\vec{u}\| = 2$, $\|\vec{v}\| = 3$ et $\vec{u} \cdot \vec{v} = -2$.
1. Calculer $\|\vec{u} - \vec{v}\|^2$.
2. Si $\overrightarrow{AB} = \vec{u}$ et $\overrightarrow{AC} = \vec{v}$, calculer BC.

Exercice 4

Soit ABC un triangle tel que AB = 3, AC = 5, BC = 7.
1. Calculer $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$
2. En déduire la mesure en degré de l'angle $\widehat{BAC}$.

Exercice 5

ABC est un triangle équilatéral de côté 3. Soit H le milieu de [BC].
Calculer $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AH}$.

Exercice 6

ABC est un triangle vérifiant : AB=AC=2 et $(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC}) = \frac{\pi}{4} (2\pi)$. K est le milieu de [BC].

1. Construire le point D tel que ABDC soit un losange.
2. Déterminer la mesure en radians des angles du triangle ABD.
3. Calculer AD.
4. Calculer $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AK}$
5. En déduire la valeur exacte de $\cos \frac{\pi}{8}$.

Exercice 7

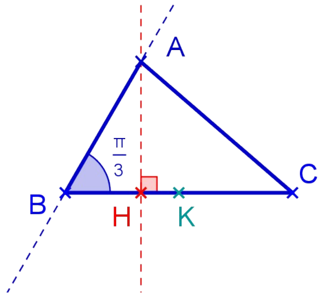
ABC est un triangle du plan tel que AB=6 ; AC=7 et BC=8 ; I est le milieu de [BC].
1. Faire une figure.
2. Calculer AI.
3. En déduire une valeur approchée de la mesure en degré à 10^{-1} près de l'angle $\widehat{BAI}$.

CORRECTION

Exercice 1

Soit ABC un triangle tel que AB = 2, BC = 3 et $\widehat{ABC} = \frac{\pi}{3}$.

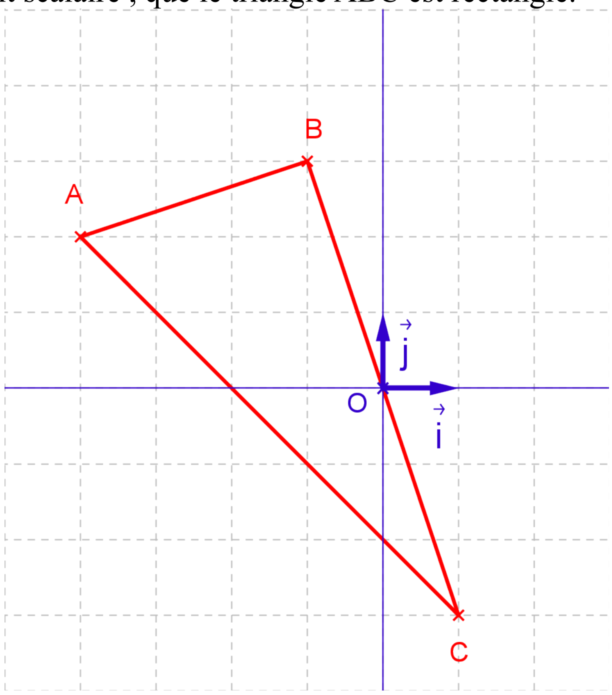
Soit K le milieu de [BC] et H le projeté orthogonal de A sur [BC].
Calculer $\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{AH}.\overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{BC}.\overrightarrow{CK}$.



- $\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BC} = BA \times BC \times \cos\widehat{ABC} = 2\times 3\times\frac{1}{2} = 3$
- Les vecteurs $\overrightarrow{AH}$ et $\overrightarrow{BC}$ sont orthogonaux donc $\overrightarrow{AH}.\overrightarrow{BC} = 0$
- $\overrightarrow{BC}.\overrightarrow{CK} = -\overrightarrow{CB}.\overrightarrow{CK} = -CB\times CK\times\cos\widehat{BCK} = -3\times\frac{3}{2}\times 1 = \frac{-9}{2}$

Exercice 2

Dans un repère orthonormé, on considère les points A(-4;2), B(-1; 3) et C(1; -3).
Démontrer, en utilisant le produit scalaire , que le triangle ABC est rectangle.



En regardant le dessin, on conjecture que si le triangle ABC est rectangle alors l'angle droit est en B.
On calcule donc le produit scalaire $\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BC}$.

$\overrightarrow{BA}\begin{pmatrix} -4+1 \\ 2-3 \end{pmatrix}$ $\quad\quad$ $\overrightarrow{BC}\begin{pmatrix} 1+1 \\ -3-3 \end{pmatrix}$

$\overrightarrow{BA}\begin{pmatrix}-3\\-1\end{pmatrix}$ $\overrightarrow{BC}\begin{pmatrix}2\\-6\end{pmatrix}$

$\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BC}=(-3)\times 2+(-1)\times(-6)=-6+6=0$

Les vecteurs $\overrightarrow{BA}$ et $\overrightarrow{BC}$ sont orthogonaux donc le triangle ABC est rectangle en B.

Exercice 3

On donne $\|\vec{u}\|=2$, $\|\vec{v}\|=3$ et $\vec{u}\cdot\vec{v}=-2$.

1. Calculer $\|\vec{u}-\vec{v}\|^2$.
2. Si $\overrightarrow{AB}=\vec{u}$ et $\overrightarrow{AC}=\vec{v}$, calculer BC.

1. $\|\vec{u}-\vec{v}\|^2=(\vec{u}-\vec{v})^2=\vec{u}^2-2\vec{u}.\vec{v}+\vec{v}^2$

$\|\vec{u}-\vec{v}\|^2=\|\vec{u}\|^2-2\vec{u}.\vec{v}+\|\vec{v}\|^2$

$\|\vec{u}-\vec{v}\|^2=4-2\times(-2)+9=17$

2. $\vec{u}-\vec{v}=\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CA}=\overrightarrow{CB}$

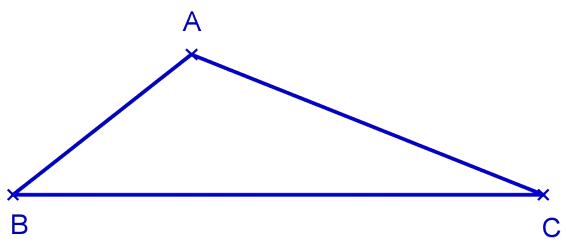
$\|\vec{u}-\vec{v}\|=CB$

Donc, $CB=\sqrt{17}$

Exercice 4

Soit ABC un triangle tel que AB=3, AC=5, BC=7.

1. Calculer $\overrightarrow{AB}\,.\,\overrightarrow{AC}$
2. En déduire la mesure en degré de l'angle $\widehat{BAC}$.



1. $BC^2=AB^2+AC^2-2\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$

$49=9+25-2\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$

$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=\frac{-15}{2}$

2. $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=AB\times AC\times\cos\widehat{BAC}$

$\frac{-15}{2}=3\times 5\times\cos\widehat{BAC}$

$\cos\widehat{BAC}=-\frac{1}{2}$

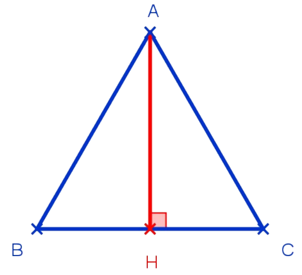
$\cos(180^\circ-\widehat{BAC})=\frac{1}{2}$

donc, $180-\widehat{BAC}=60^\circ$

$\widehat{BAC}=120^\circ$

Exercice 5

ABC est un triangle équilatéral de côté 3. Soit H le milieu de [BC].
Calculer $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AH}$.



H est le pied de la hauteur issue de B dans le triangle ABH rectangle en H.

$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AH}=\overrightarrow{AH}.\overrightarrow{AH}=AH^2$

ABC est un triangle équilatéral donc $\widehat{HBA}=\frac{\pi}{3}$.

$\sin\frac{\pi}{3}=\frac{AH}{AB}=\frac{\sqrt{3}}{2}$

Donc, $AH=\frac{\sqrt{3}}{2}\times AB=\frac{3\sqrt{3}}{2}$

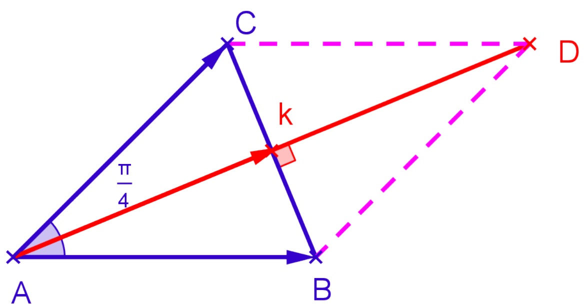
Donc, $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AH}=\frac{27}{4}$.

Exercice 6

ABC est un triangle vérifiant : AB=AC=2 et $(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC})=\frac{\pi}{4}(2\pi)$. K est le milieu de [BC].

1. Construire le point D tel que ABDC soit un losange.
2. Déterminer la mesure en radians des angles du triangle ABD.
3. Calculer AD.
4. Calculer $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AK}$
5. En déduire la valeur exacte de $\cos\frac{\pi}{8}$.

1.



2. ABCD est un losange donc $\widehat{BAC}+\widehat{ABD}=\pi$

Donc, $\widehat{ABD}=\pi-\frac{\pi}{4}=\frac{3\pi}{4}$

Le triangle ABD est isocèle de sommet principal B donc :

$\widehat{BAD}=\widehat{BDA}=\frac{\pi-\widehat{ABD}}{2}=\frac{\pi}{8}$

3. Dans le triangle ABD,

$AD^2 = AB^2 + BD^2 - 2\, AB \times BD \times \cos \widehat{ABD}$

$AD^2 = 4 + 4 - 2 \times 2 \times 2 \times \cos \frac{3\pi}{4}$

$AD^2 = 8 - 8 \times \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

$AD^2 = 8 + 4\sqrt{2}$

$AD = \sqrt{8 + 4\sqrt{2}}$

4. Les diagonales d'un losange sont perpendiculaires donc K est le pied de la hauteur du triangle ABK issue de B.

$\overrightarrow{AB} . \overrightarrow{AK} = \overrightarrow{AK} . \overrightarrow{AK} = AK^2 = \left(\frac{AD}{2}\right)^2$

$\overrightarrow{AB} . \overrightarrow{AK} = \frac{8 + 4\sqrt{2}}{4} = 2 + \sqrt{2}$

5. $\overrightarrow{AB} . \overrightarrow{AK} = AB \times AK \times \cos \widehat{BAK}$

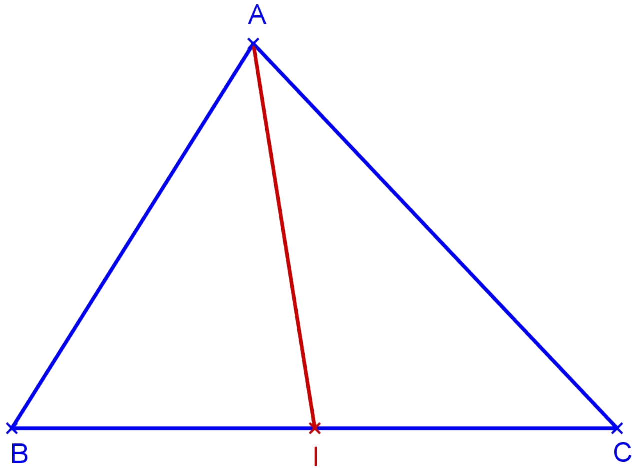
$2 + \sqrt{2} = 2 \times \frac{\sqrt{8 + 4\sqrt{2}}}{2} \times \cos \frac{\pi}{8}$

$\cos \frac{\pi}{8} = \frac{2 + \sqrt{2}}{\sqrt{8 + 4\sqrt{2}}} = \frac{2 + \sqrt{2}}{2\sqrt{2 + \sqrt{2}}} = \frac{\sqrt{2 + \sqrt{2}}}{2}$

Exercice 7

ABC est un triangle du plan tel que AB=6 ; AC=7 et BC=8 ; I est le milieu de [BC].
1. Faire une figure.
2. Calculer AI.
3. En déduire une valeur approchée de la mesure en degré à 10^{-1} près de l'angle $\widehat{BAI}$.

1.



2. $AB^2 + AC^2 = 2\, AI^2 + 2\, IC^2$

$36 + 49 = 2\, AI^2 + 32$

$AI^2 = \frac{53}{2}$

$AI=\sqrt{\frac{53}{2}}$

3. Dans le triangle BAI :

$BI^2=AB^2+AI^2-2\times AB\times AI\times\cos\widehat{BAI}$

$16=36+\frac{53}{2}-2\times6\times\sqrt{\frac{53}{2}}\times\cos\widehat{BAI}$

$12\times\sqrt{\frac{53}{2}}\times\cos\widehat{BAI}=\frac{93}{2}$

$\cos\widehat{BAI}=\frac{93}{2}\div\left(12\times\sqrt{\frac{53}{2}}\right)$

Avec la calculatrice, $\widehat{BAI}\approx41{,}2^\circ$

