Fonction Racine carrée

1. Racine carrée.

Définition:

Soit a un nombre réel positif ou nul, la racine carrée de a est le nombre réel positif ou nul b tel que $b^2=a$. On le note $\sqrt{a}$.
On a alors $b=\sqrt{a} \Leftrightarrow b \geqslant 0$ et $b^2=a$

Exemples:

5 est l'unique nombre réel positif dont le carré vaut 25. On a donc $\sqrt{25}$ =5.
$\sqrt{2}$ est l'unique nombre réel positif dont le carré vaut 2: $\left(\sqrt{2}\right)^2=2$.

2. La fonction racine carrée.

Définition:

La fonction racine carrée est définie sur [0; +∞[par: $x \mapsto \sqrt{x}$.

Étudions son sens de variation.

Soit a et b deux réels tels que $0 \leqslant a < b$.

Comparons $\sqrt{a}$ et $\sqrt{b}$ en étudiant le signe de leur différence.

$$\sqrt{b} - \sqrt{a} = \frac{(\sqrt{b}-\sqrt{a})(\sqrt{b}+\sqrt{a})}{\sqrt{b}+\sqrt{a}} = \frac{\sqrt{b}^2-\sqrt{a}^2}{\sqrt{b}+\sqrt{a}} = \frac{b-a}{\sqrt{b}+\sqrt{a}} .$$

Or $\sqrt{b}$ + $\sqrt{a}$ >0, car $a \geqslant 0$ et $b>0$.
De plus $b-a>0$ car $a<b$.
D'où $\sqrt{b}$ - $\sqrt{a}$ >0.
Par conséquent, la fonction racine carrée est strictement croissante sur [0; +∞[.

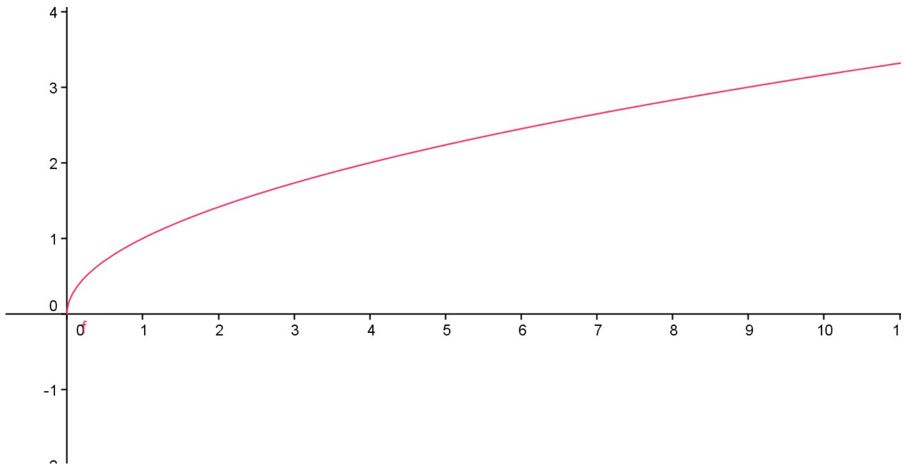
Propriété:

La fonction racine carrée est strictement croissante sur [0; +∞[.

On a donc le tableau de variation suivant:

x	0	$+\infty$
$f(x)$	$\nearrow$	

Courbe représentative:



3. Positions relatives.

3.1.. Définition.

Définition-propriété:

Soient f et g deux fonctions définies sur un intervalle I, de courbes représentatives $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ dans un repère du plan.

On dit que f est <u>supérieure</u> à g (et on note $f \geqslant g$) sur I lorsque, pour tout réel x de I, $f(x) \geqslant g(x)$.
La courbe $\mathscr{C}_f$ est au-dessus de la courbe $\mathscr{C}_g$ sur l'intervalle I.

On dit que f est <u>inférieure</u> à g (et on note $f \leq g$) sur I lorsque, pour tout réel x de I, $f(x) \leq g(x)$.
La courbe $\mathscr{C}_f$ est en-dessous de la courbe $\mathscr{C}_g$ sur l'intervalle I.

On dit que f est <u>égale</u> à g (et on note $f = g$) sur I lorsque, pour tout réel x de I, $f(x) = g(x)$.
La courbe $\mathscr{C}_f$ est confondue avec la courbe $\mathscr{C}_g$ sur l'intervalle I.

2.2. Positions relatives des courbes d'équations $y=x$, $y=x^2$ et $y=\sqrt{x}$.

On se place dans le plan muni d'un repère (O, $\vec{i}$, $\vec{j}$).
Soient $\mathscr{C}_f$, $\mathscr{C}_g$ et $\mathscr{C}_h$ les courbes représentatives des fonctions f , g et h définies sur [0; +∞[par $f(x)=x$, $g(x)=x^2$ et $h(x)=\sqrt{x}$.

Étudions les positions relatives de f et g sur [0; +∞[. Pour cela, étudions le signe de $f(x)-g(x)$.

$f(x)-g(x)=x-x^2=x(1-x)$.

On sait que $x>0$ puisqu'on s'est placé sur l'intervalle [0; +∞[.
Pour $x<1$, $1-x>0$, donc $f(x)-g(x)>0$. Par suite, $f(x)>g(x)$ pour $x<1$.
Donc $\mathscr{C}_f$ est au dessus de $\mathscr{C}_g$ sur l'intervalle [0; 1].
Pour $x>1$, $1-x<0$, donc $f(x)-g(x)<0$. Par suite, $f(x)<g(x)$ pour $x>1$.
Donc $\mathscr{C}_f$ est en dessous de $\mathscr{C}_g$ sur l'intervalle [1;+∞[.

Études les positions relatives de f et h sur [0;+∞[. Pour cela, étudions le signe de $f(x)-h(x)$.

$f(x)-h(x)$ = x - $\sqrt{x}$ = $\sqrt{x}$ ($\sqrt{x}$ -1).

On sait que $\sqrt{x}$ >0 puisqu'on s'est placé sur l'intervalle [0; +∞[.

Pour $x<1$, $\sqrt{x}-1<0$, donc $f(x)-h(x)<0$. Par suite, $f(x)<h(x)$ pour $x<1$.
Donc $\mathscr{C}_f$ est en-dessous de $\mathscr{C}_h$ sur l'intervalle [0; 1].

Pour $x>1$, $\sqrt{x}-1>0$, donc $f(x)-h(x)>0$. Par suite, $f(x)>h(x)$ pour $x>1$.
Donc $\mathscr{C}_f$ est en-dessous de $\mathscr{C}_h$ sur l'intervalle [1;+∞[.