Exercices Fiche 1

Exercice 1:

Résoudre les équations suivantes:

a. $\sqrt{x}>2$ b. $\sqrt{x}<4$ c. $\sqrt{x-5}<2$ d. $\sqrt{3-x}>1$

e. $3\sqrt{x}+1\geq 2$.

Exercice 2:

Exprimer sans racine carrée au dénominateur.

a. $\dfrac{1}{\sqrt{2}-3}$ b. $\dfrac{1-\sqrt{3}}{1+\sqrt{3}}$ c. $\dfrac{2-\sqrt{x}}{\sqrt{x}+3}$ d. $\dfrac{2}{\sqrt{x+1}-1}$

Exercice 3:

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=\sqrt{x^2+2x+5}$.

1. Démontrer que, pour tout réel x, $f(x)-2=\dfrac{(x+1)^2}{\sqrt{x^2+2x+5}+2}$.
2. En déduire que $f(x)\geqslant 2$ pour tout réel x.

En déduire le minimum de f sur $\mathbb{R}$

Exercice 4:

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}\{0\}$ par $f(x)=\dfrac{1}{x}$, de courbe représentative $\mathscr{C}$, et d la droite d'équation $y=4x$.

Étudier le signe de $f(x)-4x$.

En déduire les positions relatives de la courbe $\mathscr{C}$ et de la droite d.

Exercice 5:

Étudier la position relative de la parabole $\mathscr{P}$ d'équation $y=2x^2-6x+1$ et de la droite d'équation $y=-x+4$.

CORRECTION

Exercice 1:

Résoudre les équations suivantes:

a. $\sqrt{x} > 2$

L'ensemble de validité de cette inéquation est $[0;+\infty[$

$\sqrt{x} > 2$

$(\sqrt{x})^2 > 2^2$

$x > 4$

$S =]4;+\infty[$

b. $\sqrt{x} < 4$

L'ensemble de validité de cette inéquation est $[0;+\infty[$

$\sqrt{x} < 4$

$(\sqrt{x})^2 < 4^2$

$x < 16$

$S = [0;16[$

c. $\sqrt{x-5} < 2$

L'ensemble de validité de cette inéquation est $[5;+\infty[$

$\sqrt{x-5} < 2$

$(\sqrt{x-5})^2 < 2^2$

$x-5 < 4$

$x < 9$

$S = [5;9[$

d. $\sqrt{3-x} > 1$

L'ensemble de validité de cette inéquation est $]-\infty;3]$

$\sqrt{3-x} > 1$

$(\sqrt{3-x})^2 > 1^2$

$3-x > 1$

$x < 2$

$S =]-\infty;2]$

e. $3\sqrt{x}+1 \geq 2$.

L'ensemble de validité de cette inéquation est $[0;+\infty[$

$3\sqrt{x}+1 \geq 2$

$3\sqrt{x} \geqslant 1$

$(3\sqrt{x})^2 \geqslant 1^2$

$9x \geqslant 1$

$x \geqslant \frac{1}{9}$

$S = \left[\frac{1}{9};+\infty\right[$

Exercice 2:

Exprimer sans racine carrée au dénominateur.

a. $\dfrac{1}{\sqrt{2}-3}$

$$\frac{1}{\sqrt{2}-3}=\frac{\sqrt{2}+3}{(\sqrt{2}-3)(\sqrt{2}+3)}=\frac{\sqrt{2}+3}{2-9}=-\frac{\sqrt{2}+3}{7}$$

b. $\dfrac{1-\sqrt{3}}{1+\sqrt{3}}$

$$\frac{1-\sqrt{3}}{1+\sqrt{3}}=\frac{(1-\sqrt{3})(1-\sqrt{3})}{(1+\sqrt{3})(1-\sqrt{3})}=\frac{1-2\sqrt{3}+3}{1-3}=-\frac{4-2\sqrt{3}}{2}$$

c. $\dfrac{2-\sqrt{x}}{\sqrt{x}+3}$

$$\frac{2-\sqrt{x}}{\sqrt{x}+3}=\frac{(2-\sqrt{x})(\sqrt{x}-3)}{(\sqrt{x}+3)(\sqrt{x}-3)}=\frac{2\sqrt{x}-6-x+3\sqrt{x}}{x-9}=\frac{5\sqrt{x}-x-6}{x-9}$$

d. $\dfrac{2}{\sqrt{x+1}-1}$

$$\frac{2}{\sqrt{x+1}-1}=\frac{2(\sqrt{x+1}+1)}{(\sqrt{x+1}-1)(\sqrt{x+1}+1)}=\frac{2(\sqrt{x+1}+1)}{x+1-1}=\frac{2(\sqrt{x+1}+1)}{x}$$

Exercice 3:

Soit f la fonction définie sur ℝpar $f(x)=\sqrt{x^2+2x+5}$.

1. Démontrer que, pour tout réel x , $f(x)-2=\dfrac{(x+1)^2}{\sqrt{x^2+2x+5}+2}$.
2. En déduire que $f(x)\geqslant 2$ pour tout réel x .

En déduire le minimum de f sur ℝ

1.

$$\frac{(x+1)^2}{\sqrt{x^2+2x+5}+2}=\frac{(x+1)^2(\sqrt{x^2+2x+5}-2)}{(\sqrt{x^2+2x+5}+2)(\sqrt{x^2+2x+5}-2)}=\frac{(x+1)^2(\sqrt{x^2+2x+5}-2)}{x^2+2x+5-4}$$

$$=\frac{(x+1)^2(\sqrt{x^2+2x+5}-2)}{x^2+2x+1}=\frac{(x+1)^2(\sqrt{x^2+2x+5}-2)}{(x+1)^2}=\sqrt{x^2+2x+5}-2=f(x)-2$$

Donc,

$$f(x)-2=\frac{(x+1)^2}{\sqrt{x^2+2x+5}+2}$$

2. Pour tout réel x :

$$\frac{(x+1)^2}{\sqrt{x^2+2x+5}+2}\geq 0$$

Donc:

$f(x)-2\geqslant 2$

Par suite, pour tout réel x , $f(x)\geqslant 2$

De plus, $f(-1)=\sqrt{(-1)^2+2\times(-1)+5}=\sqrt{1-2+5}=\sqrt{4}=2$

Donc, 2 est le minimum de f sur ℝ, il est atteint pour $x=-1$

Exercice 4:

On considère la fonction f définie sur ℝ{0} par $f(x)=\dfrac{1}{x}$, de courbe représentative $\mathscr{C}$, et d la droite d'équation $y=4x$.

Étudier le signe de $f(x)-4x$.

En déduire les positions relatives de la courbe $\mathscr{C}$ et de la droite d .

$f(x)-4x$

$=\dfrac{1}{x}-4x$

$=\dfrac{1-4x^2}{x}$

$=\dfrac{(1-2x)(1+2x)}{x}$

$1-2x=0$

$x=\dfrac{1}{2}$

$1+2x=0$

$x=-\dfrac{1}{2}$

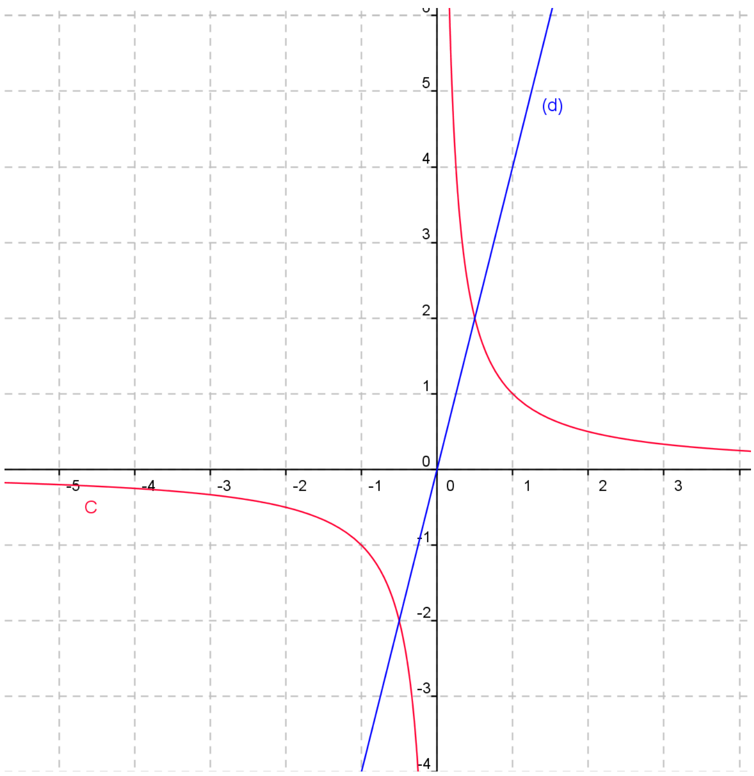
x	$-\infty$		$-\frac{1}{2}$		0		$\frac{1}{2}$		$+\infty$
1-2x		+		+		+	0	–	
1+2x		–	0	+		+		+	
x		–		–	0	+		+	
f(x)-4x		+		–		+		–	

Sur $\left]-\infty;-\dfrac{1}{2}\right[$, $\mathscr{C}$ est au-dessus de *d*.

Sur $\left]-\dfrac{1}{2};0\right[$, $\mathscr{C}$ est en-dessous de *d*.

Sur $\left]0;\dfrac{1}{2}\right[$, $\mathscr{C}$ est au-dessus de *d*.

Sur $\left]\dfrac{1}{2};+\infty\right[$, $\mathscr{C}$ est en-dessous de *d*.



Exercice 5:

Étudier la position relative de la parabole $\mathscr{P}$ d'équation $y=2x^2-6x+1$ et de la droite d'équation $y=-x+4$.

$(2x^2-6x+1)-(-x+4)$
$=2x^2-5x-3$

$\Delta=(-5)^2-4\times2\times(-3)=25+24=49$
L'équation $2x^2-5x-3=0$ admet deux solutions:
$x_1=\frac{5-7}{4}=-\frac{1}{2}$
$x_2=\frac{5+7}{4}=3$

x	$-\infty$		$-\frac{1}{2}$		3		$+\infty$
$2x^2-5x-3$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Sur $\left]-\infty;-\frac{1}{2}\right[$, la parabole est au-dessus de la droite.
Sur $\left]-\frac{1}{2};3\right[$, la parabole est en-dessous de la droite.
Sur $]3;+\infty[$, la parabole est au-dessus de la droite.