Suites numériques

1. Généralités p1
2. Sens de variation d'une suite p2
3. Suites arithmétiques p4
4. Suites géométriques p7

Une suite est une liste ordonnée de nombres.
Exemples:

1) 0 ; 2 ; 4; 6; 8; …..
2) Température du mois de janvier: -3; -5; -2; -7; 0; 4; ….
3) Pour étudier l'évolution du prix de vente d'un produit, on note p_0 le prix initial, p_1 le prix au bout d'un mois, …, p_n le prix au bout de n mois.

1. Généralités.

1.1. Définition.

Intuitivement, on peut considérer qu'une suite réelle est une liste infinie de nombre réels dont chaque terme est numéroté: à chaque rang n (entier naturel) correspond un terme numéroté n de la suite.

Définition:

Soit p un entier naturel donné.

Une suite numérique u est une fonction qui, à tout entier naturel $n, n \geqslant p$, associe un nombre réel noté $u(n)$ ou u_n : $n \mapsto u_n$.

La suite u est la suite de terme général u_n. Elle est souvent notée (u_n).
Comme elle est définie à partir du rang p, le réel u_p est appelé le terme initial de la suite u.

Exemples:

a. u est la suite définie sur $\mathbb{N}$ par $u_n = \dfrac{1}{n+1}$.

Le terme de rang 10 de cette suite est $u_{10} = \dfrac{1}{10+1} = \dfrac{1}{11}$.

b. Pour tout entier naturel $n \geqslant 2$, on pose $v_n = \sqrt{n-2}$. La suite v est définie à partir du rang 2 (sinon, le nombre sous le radical serait négatif). On note aussi cette suite $(v_n)_{n \geqslant 2}$.

1.2. Modes de générations.

i. Suite définie par une formule explicite.

Une suite peut être définie par une formule explicite qui permet de calculer directement chaque terme d'indice n.
Si f est une fonction numérique définie sur un intervalle $[a;+\infty[$, avec a réel positif ou nul, on peut définir une suite u en posant, pour tout entier naturel $n \geqslant a$, $u_n = f(n)$.

Exemple:

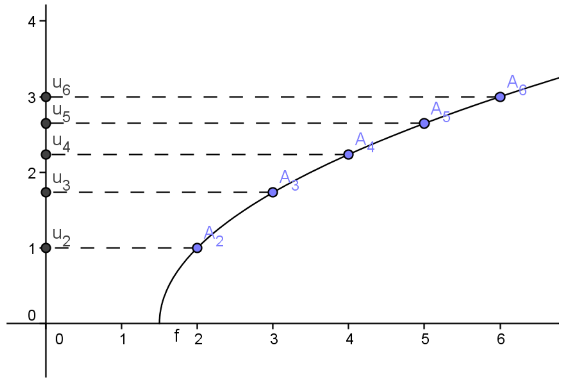
Soit u la suite définie pour $n \geqslant 2$ par $u_n = \sqrt{2n-3}$.
On a $u_2 = \sqrt{2 \times 2 - 3} = \sqrt{1} = 1$
$u_3 = \sqrt{2 \times 3 - 3} = \sqrt{3}$
$u_{20} = \sqrt{2 \times 20 - 3} = \sqrt{17}$.

Représentation graphique:

La représentation graphique de la suite (u_n) est constituée des points A_n de coordonnées $(n;u_n)$.

Pour tout $n\geqslant 2$, $u_n=f(n)$ où f est la fonction numérique définie sur l'intervalle $\left[\frac{3}{2};+\infty\right[$ par $f(x)=\sqrt{2x-3}$.

Les termes de suite (u_n) sont les ordonnées des points d'abscisses entières de la courbe représentative de la fonction f.



ii. Suite définie par un relation de récurrence.

Une suite peut être définie par son terme initial et une relation de récurrence permettant de calculer chaque terme à partir du terme précédent.

Soit f une fonction définie sur un intervalle I telle que, pour tout x de I, $f(x)$ appartient à I et a un réel de l'intervalle de I. On peut définir une suite u définie sur ℕen posant:

-le terme initial: $u_0=a$

-la relation de récurrence: $u_{n+1}=f(u_n)$ pour tout entier naturel n. Tous les termes de la suite appartiennent alors à l'intervalle I.

Exemple:

Soit la suite u définie par les données: $u_0=-2$ et $u_n=\sqrt{u_{n-1}+3}$, pour tout entier naturel $n\geqslant 1$.

Pour tout entier naturel n, on a $u_{n+1}=f(u_n)$, où f est la fonction définie sur $[-3;+\infty[$ par $f(x)=\sqrt{x+3}$.

Pour tout x appartenant à I, $f(x)\geqslant 0$, donc $f(x)$ appartient à I. Ainsi, tous les termes de la suite u existent et appartiennent à l'intervalle I.

On a $u_0=-2$, $u_1=\sqrt{-2+3}=1$, $u_2=\sqrt{1+3}=2$, $u_3=\sqrt{2+3}=\sqrt{5}$.

2. Sens de variation d'une suite.

2.1. Définition.

Définitions:

Dire qu'une suite (u_n) est <u>croissante</u> signifie que pour tout entier naturel n, $u_n\leqslant u_{n+1}$.

Dire qu'une suite (u_n) est <u>décroissante</u> signifie que pour tout entier naturel n, $u_n\geq u_{n+1}$.

Dire qu'une suite (u_n) est <u>constante</u> signifie que pour tout entier naturel n, $u_n=u_{n+1}$.

Exemples:

a. Soit u la suite définie sur $\mathbb{N}$ par $u_n = 2n+1$.
Pour tout n appartenant à $\mathbb{N}$, $u_{n+1} = 2(n+1)+1 = 2n+3$.
On a $2n+1 < 2n+3$ donc $u_n < u_{n+1}$. Par conséquent, la suite u est croissante.

b. Soit v la suite définie sur $\mathbb{N}^*$ par $v_n = \frac{1}{n}$.

Pour tout $n \geqslant 1$, $v_{n+1} = \frac{1}{n+1}$.
Donc $v_{n+1} \leqslant v_n$ pour tout $n \geqslant 1$.
La suite v est décroissante à partir du rang 1.

c. Soit w la suite définie sur $\mathbb{N}$ par $w_n = (-1)^n$.
$w_0 = (-1)^0 = 1$
$w_1 = (-1)^1 = -1$
$w_2 = (-1)^2 = 1$
$w_3 = (-1)^3 = -1$ ....
w n'est ni croissante, ni décroissante.

Remarques:

- On dit que la suite (u_n) est strictement croissante (respectivement décroissante) si pour tout n appartenant à $\mathbb{N}$, $u_n < u_{n+1}$ (respectivement $u_n > u_{n+1}$).

- On dit que la suite (u_n) est croissante à partir du rang p si pour tout entier naturel $n \geqslant p$, on a $u_n \leqslant u_{n+1}$.

2.2. Quelques méthodes.

Soit u une suite définie sur $\mathbb{N}$. Pour étudier le sens de variation de u, on peut procéder de l'une des façons suivantes :

i. Étude de la différence $u_{n+1} - u_n$.

Règle:

-Si pour tout entier naturel n, $u_{n+1} - u_n \geqslant 0$, alors la suite u est croissante.
- Si pour tout entier naturel n, $u_{n+1} - u_n \leqslant 0$, alors la suite u est décroissante.

Exemple:

soit (u_n) la suite définie sur $\mathbb{N}$ par $u_n = n^2 - n - 2$.
$u_{n+1} = (n+1)^2 - (n+1) - 2 = n^2 + 2n + 1 - n - 1 - 2 = n^2 + n - 2$.
Donc, $u_{n+1} - u_n = 2n$. Or $2n > 0$ si $n \geqslant 1$.
Donc la suite (u_n) est strictement croissante à partir du rang 1.

ii. Comparer $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ ***à 1.***

Règle:

Lorsque les termes de la suite (u_n) sont strictement positifs,

si pour tout entier naturel n , $\frac{u_{n+1}}{u_n} \geqslant 1$, alors la suite (u_n) est croissante.

si pour tout entier naturel n , $\frac{u_{n+1}}{u_n} \leqslant 1$, alors la suite (u_n) est décroissante.

Exemple:

Soit la suite u définie pour tout entier naturel $n \geqslant 1$ par $u_n = \frac{2^n}{n}$.

$u_{n+1} = \frac{2^{n+1}}{n+1}$. On a $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{\frac{2^{n+1}}{n+1}}{\frac{2^n}{n}} = \frac{2n}{n+1}$.

$\frac{u_{n+1}}{u_n} - 1 = \frac{n-1}{n+1} \geqslant 0$ donc la suite u est croissante.

iii. Utiliser le sens de variation d'une fonction.

Théorème:

La suite (u_n) est définie par $u_n = f(n)$, avec f définie sur $[0;+\infty[$

-Si la fonction f est strictement croissante, alors la suite (u_n) est strictement croissante.

-Si la fonction f est strictement décroissante, alors la suite (u_n) est strictement décroissante.

Remarque:

Lorsque la suite (u_n) est définie par la relation de récurrence $u_{n+1} = f(u_n)$, les variations de f et de (u_n) ne sont pas nécessairement les mêmes.

3. Suites arithmétiques.

3.1. Exemple.

Un téléphérique progresse à vitesse constante: chaque seconde, son altitude augmente de 0,75 m.
La gare de départ est à une altitude de 1450 mètres.
On appelle a_n l'altitude de la cabine après n secondes de trajet.

1. Déterminer a_1 et a_2 .
2. Préciser l'expression de a_{n+1} en fonction de a_n .
3. La durée du trajet est précisément de 15 minutes. Quelle est l'altitude de la gare d'arrivée?

1. $a_1 = 1450 + 0{,}75 = 1450{,}75$, $a_2 = 1450{,}75 + 0{,}75 = 1451{,}5$.
2. $a_{n+1} = a_n + 0{,}75$
3. On remarque qu'à chaque seconde qui passe, il faut ajouter 0,75 m. Donc au bout de n secondes, on a ajouté 0,75n à l'altitude initiale. On obtient donc la formule suivante: $u_n = 1450 + 0{,}75n$.

En 15 minutes, il y a 900 secondes. On cherche donc à déterminer u_{900} .
$u_{900}=1450+0{,}75\times 900=2350$.
La gare d'arrivée est donc à une altitude de 2350 m.

3,2. Définition.

Définition:

Dire qu'une suite (u_n) est arithmétique signifie qu'il existe un réel r tel que: pour tout entier naturel n , $u_{n+1}=u_n+r$.
Le réel r est appelé la raison de la suite (u_n) .

Autrement dit, dire que la suite (u_n) est arithmétique signifie que l'on passe d'un terme de la suite au suivant en ajoutant toujours le même nombre.

Exemple:
Soit u la suite arithmétique de raison $r=-2$ et de premier terme $u_0=7$.
$u_1=7-2=5$
$u_2=5-2=3$
$u_3=3-2=1$ ….

3.3. Exprimer u_n en fonction de n.

Soit (u_n) une suite arithmétique de 1[er] terme u_0 et de raison r .
$u_1=u_0+r$
$u_2=u_1+r=u_0+r+r=u_0+2r$
…
$u_p=u_{p-1}+r=u_0+pr$
Donc, pour tout entier n , $u_n=u_0+nr$.

Théorème:

Soit (u_n) une suite arithmétique de premier terme u_0 et de raison r .
Alors, pour tout entier naturel n , $u_n=u_0+nr$.

Exemple:
Soit (u_n) la suite arithmétique de premier terme $u_0=5$ et de raison $r=-2$.
Déterminer u_{1003} .
On a d'après le théorème précédent, $u_n=u_0+nr$, et donc $u_{1003}=5+(-2)\times 1003=-2001$.
Réciproquement, si u est une suite définie par $u_n=an+b$ pour tout entier naturel n , cette suite est-elle une suite arithmétique ?
Pour tout $n\in\mathbb{N}$, $u_{n+1}-u_n=a(n+1)+b-(an+b)=an+a+b-an-b=a$.
La différence entre u_{n+1} et u_n étant constante, la suite u est arithmétique de raison a et de premier terme $u_0=b$.

Théorème:

Si u est une suite telle que pour tout n appartenant à $\mathbb{N}$, $u_n=an+b$, a et b étant deux réels donnés, alors u est la suite arithmétique de raison a et de premier terme $u_0=b$.

Remarque:
Dire qu'une suite u est arithmétique signifie que pour tout n appartenant à $\mathbb{N}$, $u_n = f(n)$ où f est une fonction affine.

Il en résulte que, dans un repère (O; $\vec{i}$, $\vec{j}$), les points de la représentation graphique d'une suite arithmétique sont alignés.

On souhaite établir une relation entre deux termes d'indices quelconques.
Soit (u_n) une suite arithmétique de raison r et de premier terme u_0.
Soit p et m deux entiers, $u_m = u_0 + mr$
$u_p = u_0 + pr$
d'où $u_m - u_p = u_0 + mr - (u_0 + pr) = (m-p)r$.

Théorème:
Soit (u_n) une suite arithmétique de raison r.
Alors, quels que soient les entiers naturels m et p, $u_m - u_p = (m-p)r$.

3.4. Sens de variation.

Théorème:
Soit (u_n) une suite arithmétique de raison r.
Si $r > 0$, alors la suite (u_n) est strictement croissante.
Si $r < 0$, alors la suite (u_n) est strictement décroissante.
Si $r = 0$, alors la suite (u_n) est constante.

3.5. Somme de termes consécutifs.

i. Nombre de termes.

Le nombre de termes de la somme $S = u_m + u_{m+1} + .. + u_p$ est $p - m + 1$.

Exemple:
Il y a 6 termes dans la somme $u_0 + u_1 + .. + u_5$.
Il y a 19 termes dans la somme $u_2 + \ldots + u_{19}$.

ii. Somme des n premiers entiers naturels.

Calculons la somme des n premiers entiers naturels non nuls. $S = 1 + 2 + .. + n$.

Nous allons calculer $2S$.
$S = 1 + 2 + .. + n - 1 + n$
$S = n + n - 1 + .. + 2 + 1$
d'où $2S = (n+1) + (n+1) + .. + (n+1) + (n+1)$
d'où $2S = n(n+1)$.

Donc, $S=\frac{n(n+1)}{2}$.

Propriété:

La somme des entiers de 1 à n , notée $\sum_{k=1}^{n} k$, est égale à $\frac{n(n+1)}{2}$.

iii. Cas général.

Calculons la somme S de n termes consécutifs d'une suite arithmétique de raison r et de premier terme u_0 . Les termes s'écrivent $u_0, u_0+r, .., u_0+(n-1)r$.

Donc $S=u_0+(u_0+r)+(u_0+2r)+..+(u_0+(n-1)r)$

$$
\begin{aligned}
&= nu_0+r(1+2+..+n-1)\\
&= nu_0+r\left(\frac{(n-1)n}{2}\right)\\
&= n\left(u_0+\frac{r(n-1)}{2}\right)\\
&= n\left(\frac{2u_0+(n-1)r}{2}\right)\\
&= n\frac{u_0+u_0+(n-1)r}{2}\\
&= n\frac{u_0+u_{n-1}}{2}.
\end{aligned}
$$

Théorème:

Soit u une suite arithmétique de premier terme u_0 et de raison r . La somme des n premiers termes de la suite u est:

$$\sum_{k=0}^{n-1} u_k=n\frac{u_0+u_{n-1}}{2}$$

Exemple:

Soit (u_n) la suite arithmétique de premier terme $u_0=-3$ et de raison 3,5.
Nous souhaitons déterminer la somme des vingt premiers termes de cette suite.

$$S=\sum_{k=0}^{19} u_k=u_0+..+u_{19}=20\times\frac{u_0+u_{19}}{2}.$$

Or, $u_{19}=-3+3{,}5\times 19=63{,}5$

d'où $S=20\times\frac{-3+63{,}5}{2}=605$.

Remarque:

Si on ne part pas de u_0 , mais de u_p , on a la formule suivante:

$$\sum_{k=p}^{n} u_k=(n-p+1)\frac{u_p+u_n}{2}$$

On peut donc résumer les choses de la façon suivante:
$u_p+..+u_n=\textit{nombre de termes}\times\frac{\textit{premier terme}+\textit{dernier terme}}{2}$.

4. Suites géométriques.

4.1. Exemple.

La matière vivante retient dans ses tissus du carbone 14. Après la mort, le carbone 14 radioactif se désintègre à raison de 12 pour 1000 tous les 100 ans. C'est en mesurant cette désintégration que les archéologues procèdent à des datations.
Un échantillon de matière contient 5000 milligrammes de carbone 14.
On note u_n la quantité (en milligrammes) de carbone 14 contenue dans l'échantillon après 100×n années.
a. Calculer u_1 , u_2 , u_3 .
b. Exprimer u_{n+1} en fonction de u_n .
c. Combien l'échantillon contiendra-t-il de carbone 14 dans 1000 ans?

a. $u_1=5000\times\left(1-\frac{12}{1000}\right)=5000\times 0{,}988=4940$.

$u_2=4940\times\left(1-\frac{12}{1000}\right)=4940\times 0{,}988=4880{,}72$

$u_3=4880{,}72\times\left(1-\frac{12}{1000}\right)=4880{,}72\times 0{,}988=4822{,}15$.

b. D'une année sur l'autre, la quantité de carbone 14 diminue de 12 pour 1000, il faut donc de multiplier par $1-\frac{12}{1000}=0{,}988$.
Donc $u_{n+1}=u_n\times 0{,}988$.
c. Pour savoir combien l'échantillon contiendra de carbone 14 dans 1000 ans, il faudra déterminer u_{10} .
En 100×n années, il faut multiplier n fois par 0,988 la quantité de carbone 14.
On obtient donc la formule suivante: $u_n=5000\times 0{,}988^n$.
D'où, $u_{10}=5000\times 0{,}988^{10}=4431{,}38$.
Au bout de 1000 ans, il reste 4431,38 milligrammes de carbone 14 dans notre échantillon

4.2.Définition

Définition:

Dire qu'une suite (u_n) est géométrique signifie qu'il existe un réel q tel que:
pour tout entier naturel n , $u_{n+1}=u_n\times q$.
Le réel q est appelé la raison de la suite (u_n) .

Autrement dit: dire que la suite (u_n) est géométrique signifie que l'on passe d'un terme de la suite au suivant en multipliant par le même nombre q .

Exemple:

Soit u la suite géométrique de raison $q=\frac{1}{3}$ et de premier terme $u_0=6$.

$u_1=\frac{1}{3}\times 6=\frac{6}{3}=2$

$u_2=\frac{1}{3}\times 2=\frac{2}{3}$

$u_3=\frac{1}{3}\times\frac{2}{3}=\frac{2}{9}$

4.3. Exprimer u_n en fonction de n.

Soit (u_n) une suite géométrique de premier terme u_0 et de raison q .

$u_1=u_0\times q$

$u_2=u_1\times q=u_0\times q\times q=u_0\times q^2$

$\ldots.$

$u_p=u_{p-1}\times q=u_0\times q^{p-1}\times q=u_0\times q^p$.

Donc, pour tout entier n , $u_n=u_0\times q^n$.

Théorème:

Soit (u_n) une suite géométrique de premier terme u_0 et de raison q .
Alors, pour tout entier naturel n , $u_n=u_0\times q^n$.

Exemple:

(u_n) est la suite géométrique de premier terme $u_0=\frac{1}{32}$ et de raison $q=2$.

On a pour tout entier naturel n , $u_n=\frac{1}{32}\times 2^n$.

Donc $u_5=\frac{1}{32}\times 2^5=32$.

Réciproquement: si u est une suite définie par $u_n=ab^n$ pour tout entier naturel n , avec a et b deux réels donnés non nuls, cette suite est-elle une suite géométrique ?

Pour tout $n\in\mathbb{N}$, $u_{n+1}=ab^{n+1}$ et donc $\frac{u_{n+1}}{u_n}=\frac{ab^{n+1}}{ab^n}=b$.

Donc la suite u est géométrique de raison b et de premier terme $u_0=a$.

Théorème:

Si u est une suite telle que pour tout n appartenant à $\mathbb{N}$, $u_n=ab^n$, a et b étant deux réels donnés non nuls, alors u est la suite arithmétique de raison b et de premier terme $u_0=a$.

On souhaite établir une relation entre deux termes d'indices quelconques.

Soit p et m deux entiers, $u_m=u_0\times q^m$

$u_p=u_0\times q^p$.

D'où $\frac{u_m}{u_p}=\frac{u_0q^m}{u_0q^p}=q^{m-p}$.

Théorème:

Soit (u_n) une suite géométrique de raison $q \neq 0$, alors quelques soient les entiers naturels m et p, $u_m = q^{m-p} u_p$.

4.4. Sens de variation.

Théorème:

Soit (q^n) la suite géométrique définie sur ℕ de raison q, avec $q \neq 0$.
1) (q^n) est strictement croissante si et seulement si $q > 1$.
2) (q^n) est strictement décroissante si et seulement si $0 < q < 1$.
3) (q^n) est strictement croissante si et seulement si $q = 1$.

Remarque:
Une suite géométrique peut-être ni croissante, ni décroissante comme la suite géométrique u de premier terme $u_0 = 1$ et de raison -2.

$u_0 = 1$, $u_1 = -2$, $u_2 = 4$, ….

4.5. Somme de termes consécutifs.

i. Cas particulier.

Calculons la somme S des n premiers termes d'une suite géométrique de premier terme 1 et de raison $q (q \neq 1)$.

$S = 1 + q + \ldots + q^{n-1}$
$qS = q + q^2 + .. + q^n$
Donc, $S - qS = (1 + q + .. + q^{n-1}) - (q + q^2 + .. + q^n) = 1 - q^n$.
$S(1-q) = 1 - q^n$
Puisque $q \neq 1$, alors $1 - q \neq 0$, donc $S = \frac{1-q^n}{1-q}$.

Propriété:

Pour tout réel q différent de 1: $1 + q + .. + q^{n-1} = \frac{1-q^n}{1-q}$.

ii. Cas général.

Calculons la somme S de n termes consécutifs, de premier terme a, d'une suite géométrique de raison q, $q \neq 1$. Les autres termes s'écrivent aq, aq^2, .., aq^{n-1}.

D'où, $S = a + aq + aq^2 + .. + aq^{n-1} = a(1 + q + .. + q^{n-1}) = a\frac{1-q^n}{1-q}$.

Théorème:

La somme de n termes consécutifs, de premier terme a, d'une suite géométrique de raison q $(q \neq 1)$ est égale à $a\frac{1-q^n}{1-q}$.

Exemple:

Soit (u_n) la suite géométrique de premier terme $u_0 = -3$ et de raison $\frac{1}{2}$.

La somme des douze premiers termes est: $\sum_{k=0}^{11} u_k = -3 \times \frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{12}}{1-\frac{1}{2}} = -\frac{12285}{2048}$.

Remarques:

- Si on ne part pas de u_0 mais de u_p, on a la formule suivante: $\sum_{k=p}^{n} u_k = u_p \times \frac{1-q^{n-p+1}}{1-q}$.
- Si $q=1$, alors $\sum_{k=0}^{n-1} aq^k = a(1+q+\ldots+q^{n-1}) = a(1+1+..+1) = an$.