
Exercices Fiche 2

On dit qu'un placement est à **intérêts simples** si, chaque année, il rapporte une prime d'un montant fixé qui est en général proportionnelle au montant initialement placé.

On dit qu'un placement est à **intérêts composés annuels** si, chaque année, les intérêts rapportés sont proportionnels au capital de l'année précédent et s'ajoutent au capital. Ainsi, les intérêts acquis produisent des intérêts ultérieurement.

Exercice 1:

1. Un particulier réalise un placement de 10 000 €, à intérêts simples, au taux de 5%.
Quel est le montant de la prime annuelle?
Préciser la nature de la suite (K_n) , où K_n désigne le capital acquis après n années de placement. Combien d'années sont nécessaires pour doubler le montant du capital?
2. Après un placement à intérêts simples, le capital acquis au bout de trois ans est de 38 100 €, et il sera de 48 900€ après 7 ans de placement.
Quel est le montant annuel de la prime?
Quel était le montant du capital placé initialement?

Exercice 2:

On place un capital K_0 au 1^{er} janvier 2001, au taux 3%, les intérêts étant composés annuels; K_n désigne le capital après n années de placement.

1. Exprimer K_{n+1} en fonction de K_n .
2. Quelle est la nature de la suite (K_n) ?
3. Quel montant faut-il placer pour que le capital soit de 20 000 € 10 ans après avoir été placé.

Exercice 3:

Une cuve en forme de parallélépipède rectangle à base carrée, de 0,5 m de côté contient 75 litres d'eau. On veut compléter le remplissage de la cuve à l'aide d'un robinet dont le débit est de 50 litres par minute.

H_n désigne la hauteur d'eau dans la cuve n minutes après le début du remplissage.

1. Quelle est la nature de la suite (H_n) ?
2. Quelle est la hauteur d'eau après 8 minutes de remplissage?

Exercice 4:

L'unité d'intensité du son utilisée dans l'exercice est le décibel (symbole dB).

Une source sonore émet un son d'intensité 100 décibels ($u_0 = 100$).

On appelle u_n , où n est un entier naturel ($n \geq 1$), l'intensité du son mesurée après la traversée de n plaques d'isolation phonique.

On sait que chaque plaque d'isolation absorbe 10% de l'intensité du son qui lui parvient.

1. Calculer u_1 , u_2 et u_3 .
2. Déterminer la relation de récurrence entre u_{n+1} et u_n . Puis exprimer u_n en fonction de u_0 et de n .
3. Déterminer le sens de variation de la suite (u_n) .
4. Déterminer à partir de quelle valeur de n l'intensité du son devient inférieure à 1dB.

CORRECTION

On dit qu'un placement est à **intérêts simples** si, chaque année, il rapporte une prime d'un montant fixé qui est en général proportionnelle au montant initialement placé.

On dit qu'un placement est à **intérêts composés annuels** si, chaque année, les intérêts rapportés sont proportionnels au capital de l'année précédent et s'ajoutent au capital. Ainsi, les intérêts acquis produisent des intérêts ultérieurement.

Exercice 1:

1. Un particulier réalise un placement de 10 000 €, à intérêts simples, au taux de 5%.
Quel est le montant de la prime annuelle?
Préciser la nature de la suite (K_n) , où K_n désigne le capital acquis après n années de placement. Combien d'années sont nécessaires pour doubler le montant du capital?

$$10000 \times \frac{5}{100} = 500$$

Le montant de la prime annuelle est 500€.

On appelle n le nombre d'années de placement et K_n le capital acquis. On a donc pour tout n :

$$K_n = 10000 + 500n$$

(K_n) est donc la suite arithmétique de premier terme $K_0 = 10000$ et de raison 500.

Pour doubler le capital, il faut que:

$$K_n \geq 20000$$

$$10000 + 500n \geq 20000$$

$$500n \geq 10000$$

$$n \geq 10000 \div 500 = 20$$

Il faut 20 ans pour doubler le montant du capital.

2. Après un placement à intérêts simples, le capital acquis au bout de trois ans est de 38 100 €, et il sera de 48900€ après 7 ans de placement.
Quel est le montant annuel de la prime?
Quel était le montant du capital placé initialement?

On appelle K_n désigne le capital acquis après n années de placement.

$$K_3 = 38100 \text{ et } K_7 = 48900$$

$$K_7 - K_3 = (7 - 3)r$$

$$48900 - 38100 = 4r$$

$$r = \frac{10800}{4}$$

$$r = 2700$$

Le montant de la prime annuelle est 2700€.

$$K_3 = K_0 + 2700 \times 3$$

$$38100 = K_0 + 8100$$

$$K_0 = 38100 - 8100$$

$$K_0 = 30000$$

Le montant du capital placé initialement est 30000€.

Exercice 2:

On place un capital K_0 au 1^{er} janvier 2001, au taux 3%, les intérêts étant composés annuels; K_n désigne le capital après n années de placement.

1. Exprimer K_{n+1} en fonction de K_n .

Le coefficient multiplicateur lié à une augmentation de 3% est: $1 + \frac{3}{100} = 1,03$

$$K_{n+1} = K_n \times 1,03$$

2. Quelle est la nature de la suite (K_n) ?

La suite (K_n) est une suite géométrique de raison 1,03.

3. Quel montant faut-il placer pour que le capital soit de 20 000 € 10 ans après avoir été placé.

$$K_{10} = 20000$$

$$K_{10} = K_0 \times (1,03)^{10}$$

$$20000 = K_0 \times (1,03)^{10}$$

$$K_0 = \frac{20000}{(1,03)^{10}}$$

$$K_0 \approx 14881,88$$

Il faut placer environ 14881,88€ pour que le capital soit de 20 000 € 10 ans après avoir été placé.

Exercice 3:

Une cuve en forme de parallélépipède rectangle à base carrée, de 0,5 m de côté contient 75 litres d'eau. On veut compléter le remplissage de la cuve à l'aide d'un robinet dont le débit est de 50 litres par minute.

H_n désigne la hauteur d'eau dans la cuve n minutes après le début du remplissage.

1. Quelle est la nature de la suite (H_n) ?

$$0,5\text{m} = 5\text{dm}$$

$$5 \times 5 \times H_0 = 75$$

$$H_0 = \frac{75}{25} = 3 \text{ dm}$$

$$5 \times 5 \times H_n = 75 + 50n$$

$$H_n = \frac{75}{25} + \frac{50n}{25}$$

$$H_n = 3 + 2n$$

La suite (H_n) est la suite arithmétique de premier terme $H_0 = 3 \text{ dm}$ et de raison 2.

2. Quelle est la hauteur d'eau après 8 minutes de remplissage?

$$H_8 = 3 + 2 \times 8$$

$$H_8 = 19 \text{ dm}$$

La hauteur d'eau après 8 minutes de remplissage est 19 dm .

Exercice 4:

L'unité d'intensité du son utilisée dans l'exercice est le décibel (symbole dB).

Une source sonore émet un son d'intensité 100 décibels ($u_0 = 100$).

On appelle u_n , où n est un entier naturel ($n \geq 1$), l'intensité du son mesurée après la traversée de n plaques d'isolation phonique.

On sait que chaque plaque d'isolation absorbe 10% de l'intensité du son qui lui parvient.

1. Calculer u_1 , u_2 et u_3 .

Le coefficient multiplicateur lié à une réduction de 10% est: $1 - \frac{10}{100} = 0,90$

$$u_1 = 100 \times 0,9 = 90$$

$$u_2 = 90 \times 0,9 = 81$$

$$u_3 = 81 \times 0,9 = 72,9$$

2. Déterminer la relation de récurrence entre u_{n+1} et u_n . Puis exprimer u_n en fonction de u_0 et de n .

$$u_{n+1} = u_n \times 0,9$$

$$u_n = u_0 \times (0,9)^n$$

3. Déterminer le sens de variation de la suite (u_n) .

$$u_0 = 100 > 0$$

$$0 < q = 0,9 < 1$$

Donc, la suite géométrique (u_n) est décroissante.

4. Déterminer à partir de quelle valeur de n l'intensité du son devient inférieure à 1dB.

$$u_n < 1$$

$$\Leftrightarrow u_0 \times (0,9)^n < 1$$

$$\Leftrightarrow (0,9)^n < \frac{1}{100}$$

$$\Leftrightarrow n > 43,7$$

$$u_{43} \approx 1,08$$

$$u_{44} \approx 0,97$$

A partir de 44 plaques d'isolation phonique, l'intensité du son devient inférieure à 1dB.