# *Exercices Fiche 3*

## Exercice 1:

Soit u la suite définie sur $\mathbb{N}$ par $u_n = n^2-6n+1$.

1. Calculer les cinq premiers termes de la suite u.
2. Quel est le sens de variation de la suite $(u_n)$? A partir de quel rang?

## Exercice 2:

Soit u la suite définie sur $\mathbb{N}$ par $u_n = n(n-1)$.

1. Exprimer $u_{n-1}$, $u_{n+1}$ et $u_{2n}$ en fonction de n.
2. Démontrer que, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = u_n + 2n$.

## Exercice 3:

On considère la suite $(u_n)$ telle que: $u_0 = \frac{1}{2}$ et, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = u_n(1-u_n)$.

1. Calculer $u_1$, $u_2$ et $u_3$.
2. Déterminer le sens de variation de la suite $(u_n)$.

## Exercice 4:

La directrice d'une entreprise décide d'allouer à ses employés une prime de Noël d'un montant de 400 €, cette prime étant revalorisée chaque année de 6 €.

On note $p_0$ la prime initiale, et $p_n$ la prime au bout de n années ($n \geq 1$).

1. Calculer $p_1$ et $p_2$. Exprimer $p_{n+1}$ en fonction de $p_n$.
2. Quelle est la nature de la suite $(p_n)$?
3. En déduire l'expression de $p_n$ en fonction de n.
4. Quel est le montant de la prime au bout de 10 ans.
5. Quel est le montant total de toutes les primes versées à une personne jusqu'à cette 10$^e$ année incluse?

## Exercice 5:

Guillaume décide d'emprunter 8 000 euros afin de s'acheter une voiture. Il décide de faire un prêt sur 24 mois. On note $u_0 = 300$ € le premier versement effectué par Guillaume, puis $u_n$ le versement effectué au n$^{ième}$ mois. Les versements augmentent de 5% chaque mois.

1. Calculer $u_1$, $u_2$ et $u_3$.
2. Quelle est la nature de la suite $(u_n)$?
3. Exprimer $u_n$ en fonction de n.
4. Calculer le montant de son dernier versement.
5. Combien aura-t-il rembourser au total?

**CORRECTION**

## Exercice 1:

Soit u la suite définie sur ℕ par $u_n = n^2-6n+1$.

1. Calculer les cinq premiers termes de la suite u.

$u_0=1$ $u_1=-4$ $u_2=4-12+1=-7$ $u_3=9-18+1=10-18=-8$
$u_4=16-24+1=17-24=-7$

2. Quel est le sens de variation de la suite $(u_n)$? A partir de quel rang?

$$u_{n+1}-u_n=(n+1)^2-6(n+1)+1-n^2+6n-1$$
$$u_{n+1}-u_n=n^2+2n+1-6n-6+1-n^2+6n-1$$
$$u_{n+1}-u_n=2n-5$$
$$2n-5>0 \Leftrightarrow n>\frac{5}{2}$$

Donc, $(u_n)$ est croissante à partir du rang 3.

## Exercice 2:

Soit u la suite définie sur ℕ par $u_n = n(n-1)$.

1. Exprimer $u_{n-1}$, $u_{n+1}$ et $u_{2n}$ en fonction de n.

$$u_{n-1}=(n-1)(n-1-1)$$
$$u_{n-1}=(n-1)(n-2)$$
$$u_{n+1}=(n+1)n$$
$$u_{2n}=2n(2n-1)$$

2. Démontrer que, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = u_n + 2n$.

$$u_n+2n=n(n-1)+2n=n^2+n$$
$$u_{n+1}=(n+1)n=n^2+n$$

Donc, pour tout entier naturel, $u_{n+1}=u_n+2n$

## Exercice 3:

On considère la suite $(u_n)$ telle que: $u_0 = \frac{1}{2}$ et, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = u_n(1-u_n)$.

1. Calculer $u_1$, $u_2$ et $u_3$.

$$u_1=u_0(1-u_0)=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{4}$$
$$u_2=u_1(1-u_1)=\frac{1}{4}\left(1-\frac{1}{4}\right)=\frac{1}{4}\times\frac{3}{4}=\frac{3}{16}$$
$$u_3=u_2(1-u_2)=\frac{3}{16}\left(1-\frac{3}{16}\right)=\frac{3}{16}\times\frac{13}{16}=\frac{39}{256}$$

2. Déterminer le sens de variation de la suite $(u_n)$.

$$u_{n+1}-u_n$$
$$=u_n-u_n^2-u_n$$
$$=-u_n^2$$

Or, pour tout entier naturel, $-u_n^2<0$ , donc la suite $(u_n)$ est décroissante.

 

## Exercice 4:

La directrice d'une entreprise décide d'allouer à ses employés une prime de Noël d'un montant de 400 €, cette prime étant revalorisée chaque année de 6 €.

On note $p_0$ la prime initiale, et $p_n$ la prime au bout de n années ($n \geq 1$).

**1.** Calculer $p_1$ et $p_2$. Exprimer $p_{n+1}$ en fonction de $p_n$.

$p_1 = 400 + 6 = 406$
$p_2 = 406 + 6 = 412$
$p_{n+1} = p_n + 6$

**2.** Quelle est la nature de la suite $(p_n)$?

La suite $(p_n)$ est la suite arithmétique de premier terme $p_0 = 400$ et de raison 6.

**3.** En déduire l'expression de $p_n$ en fonction de n.

Pour tout entier naturel n,
$p_n = p_0 + nr$
$p_n = 400 + 6n$

**4.** Quel est le montant de la prime au bout de 10 ans.

$p_{10} = 400 + 6 \times 10 = 460\,€$

**5.** Quel est le montant total de toutes les primes versées à une personne jusqu'à cette $10^e$ année incluse?

$$S = 11 \times \frac{u_0 + u_{10}}{2} = 11 \times \frac{400 + 460}{2} = 11 \times 430 = 4730\,€$$

## Exercice 5:

Guillaume décide d'emprunter 8 000 euros afin de s'acheter une voiture. Il décide de faire un prêt sur 24 mois. On note $u_0 = 300$ € le premier versement effectué par Guillaume, puis $u_n$ le versement effectué au $n^{\text{ième}}$ mois. Les versements augmentent de 5% chaque mois.

**1.** Calculer $u_1$, $u_2$ et $u_3$.

Coefficient multiplicateur associée à une augmentation de 5% est: $1 + \frac{5}{100} = 1{,}05$

$u_1 = 300 \times 1{,}05 = 315$
$u_2 = 315 \times 1{,}05 = 330{,}75$
$u_3 = 330{,}75 \times 1{,}05 \approx 347{,}29$

**2.** Quelle est la nature de la suite $(u_n)$?

La suite $(u_n)$ est la suite géométrique de premier terme $u_0 = 300$ et de raison 1,05.

**3.** Exprimer $u_n$ en fonction de n.

Pour tout entier naturel $n$,
$u_n = u_0 \times q^n$
$u_n = 300 \times 1{,}05^n$

**4.** Calculer le montant de son dernier versement.

$u_{23}=300\times1{,}05^{23}\approx921{,}46$

**5.** Combien aura-t-il rembourser au total?

$$S=300\times\frac{1-1{,}05^{24}}{1-1{,}05}\approx13350{,}60$$

 