

Trigonométrie

1. Rappels	p1	4. Angles orientés	p4
2. Nouvelle unité des angles	p2	5. Trigonométrie	p8
3. Enroulement de la droite numérique sur le cercle trigonométrique	p2		

1. Rappels.

1.1.. Mesure en degré d'un arc de cercle.

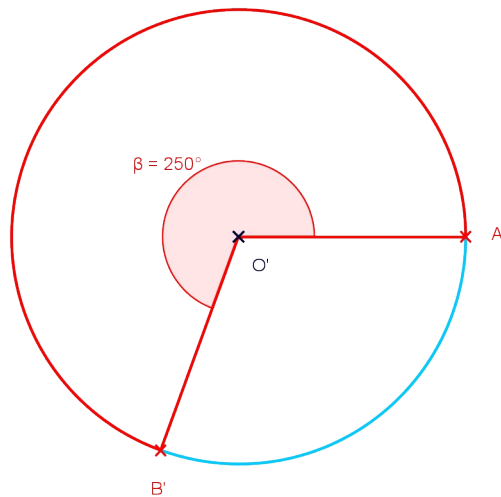
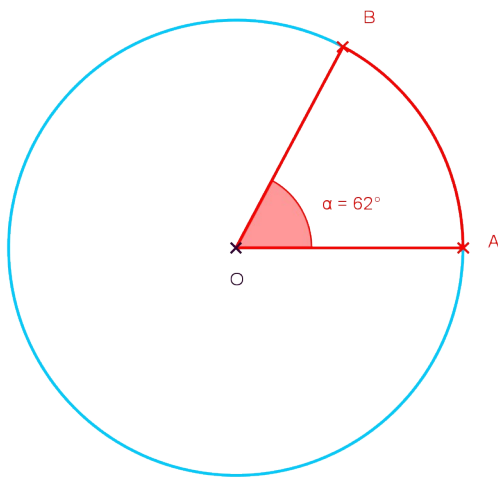
L'unité de mesure des angles est le degré.

$\mathcal{C}$ est le cercle de centre O et de rayon R.

La mesure de l'arc de cercle est la mesure de l'angle au centre qui intercepte cet arc.

(Remarque : L'angle au centre peut être rentrant.)

Exemples :



1.2. Longueur d'un arc de cercle.

$\mathcal{C}$ est le cercle de centre O et de rayon R.

La longueur du cercle est $2\pi R$, d'un demi cercle est πR et d'un quart de cercle est $\frac{\pi}{2}R$

La longueur d'un arc de cercle est proportionnelle à la mesure de l'angle au centre qui intercepte cet arc (donc la mesure de cet arc). Donc:

Si x est la mesure en degré de l'angle au centre $\widehat{AOB}$ alors x est la mesure en degré de l'arc AB. Soit l la longueur de l'arc AB (en unité de longueur), alors: $l = x \times \frac{2\pi R}{360}$

Exemples :

Si $x = 90^\circ$ alors $l = \frac{\pi}{2}R$

Si $x = 60^\circ$ alors $l = \frac{\pi}{3}R$

Si $x = 240^\circ$ alors $l = \frac{4\pi}{3}R$

Cas particulier : $R = 1$. dans ce cas: $l = x \times \frac{\pi}{180}$

Valeurs usuelles :

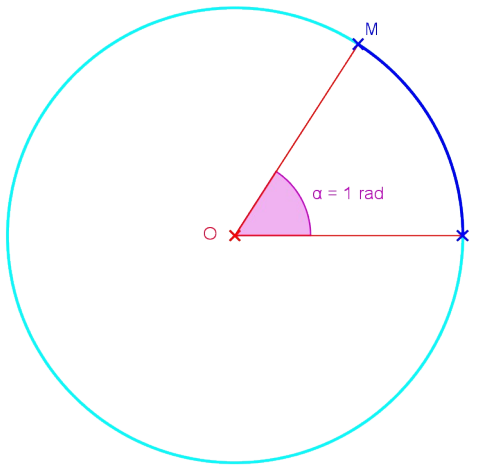
Mesure en degré des arc	0°	30°	60°	90°	120°	150°	180°
Longueurs des arcs	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{5\pi}{6}$	π

2. Nouvelle unité de mesure des angles.

2.1. Définition.

$\mathcal{C}$ est le cercle de centre O et de rayon 1.

Un angle au centre qui intercepte un arc de longueur égal au rayon du cercle a pour mesure 1 radian (symbole rad)



La mesure de l'arc IM est égale à l'unité de longueur.

La mesure d'un angle plat en radians est : π

2.2. Arc de cercle.

$\mathcal{C}$ est le cercle de centre O et de rayon R.

Si α est la mesure en radians d'un arc (ou de l'angle au centre qui intercepte cet arc) et l la longueur de cet arc: $l = R\alpha$

Si de plus $R=1$, alors $l = \alpha$

Conséquence :

La mesure en radians d'un arc d'un cercle de rayon 1 est égale à la longueur de cet arc.

3. Enroulement de la droite numérique sur un cercle trigonométrique.

3.1. Orientation d'un cercle.

Il existe 2 sens de parcours sur un cercle du plan.

Orienter un cercle c'est choisir sur ce cercle un sens que l'on nomme **sens direct (ou positif)**. L'autre sens est nommé **sens indirect (ou négatif)**

Par convention : le sens contraire du déplacement « des aiguilles d'une montre » est choisi comme sens direct.

Remarque :

Pour le logiciel géogébra, le sens positif est nommé sens « antihoraire ».

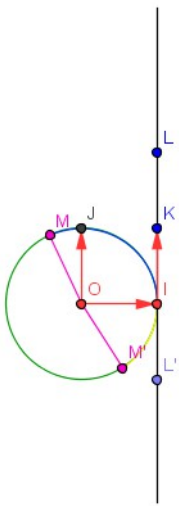
Le sens négatif est nommé sens « horaire ».

3.2. Définition d'un cercle trigonométrique.

Définition:

Un cercle trigonométrique est un cercle de centre O, de rayon 1 et orienté dans le sens direct.

3.3.. Enroulement de la droite numérique sur le cercle trigonométrique.



$\mathcal{C}$ est le cercle trigonométrique

$$\vec{OI} = \vec{i} ; \quad \vec{OJ} = \vec{j} ; \quad \vec{IK} = \vec{j}$$

$$OI = OJ = IK = 1$$

On note x l'abscisse d'un point L de (IK) c'est à dire

$$\vec{IL} = x \vec{IK} = x \vec{j}$$

ou si $L \in [IK)$ alors $x = IL$

ou si $L \notin [IK)$ alors $x = -IL$

La droite (IK) représente l'ensemble des nombres réels.

On nomme cette droite : **droite numérique**

On suppose que l'on enroule la droite numérique autour du cercle trigonométrique.

L vient en coïncidence avec le point M de $\mathcal{C}$.

$x = IL$ et la longueur de l'arc IM est x (ou la mesure en radians)

L' vient en coïncidence avec le point M' de $\mathcal{C}$

$x' = -IL'$ et la longueur de l'arc IM' est $-x'$ (ou la mesure en radians)

3.4. Remarque.

La longueur d'un cercle trigonométrique est 2π .



Si on considère le point N de (IK) d'abscisse : $x + 2\pi$, ce point vient aussi en coïncidence avec M lorsque l'on enroule la droite numérique sur $\mathcal{C}$

Soit R et S deux points de (IK) qui viennent en coïncidence avec M. Lorsque l'on enroule la droite numérique sur $\mathcal{C}$ alors

$$x_R - x_S = k \times 2\pi \quad k \text{ étant un entier relatif}$$

Conséquence

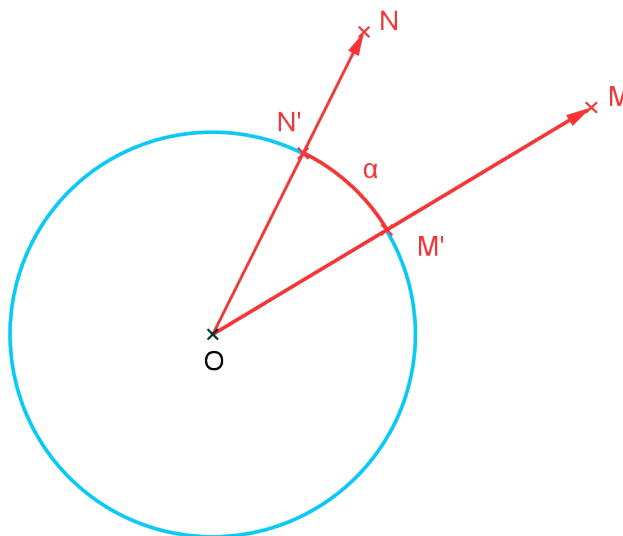
L'abscisse d'un point de (IK) venant en coïncidence avec M est :

$$x + 2k\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$$

4. Angles orientés.

4.1. Définition.

Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs non nul et $\mathcal{C}$ le cercle trigonométrique de centre O, M et N les points tels que $\vec{u} = \overrightarrow{OM}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{ON}$, M' et N' les points d'intersection de $[OM)$ et $[ON)$ avec $\mathcal{C}$. Au couple $(\overrightarrow{OM'}, \overrightarrow{ON'})$, on associe une famille de nombre de la forme $\alpha + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$ où α est la longueur de l'arc $M'N'$ parcouru de M' vers N' dans le sens direct.



Par définition, chacun de ces nombres est une mesure en radians de l'angle orienté de vecteurs $(\vec{u}, \vec{v})$.

4.2. Mesure principale.

Propriété:

Un angle orienté $(\vec{OM}, \vec{ON})$ a une unique mesure α appartenant à l'intervalle $]-\pi; \pi]$; on l'appelle mesure principale de l'angle. On a alors $\widehat{MON} = |\alpha|$ en radians.

Notation:

$(\vec{OM}, \vec{ON}) = \alpha + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$ ou $(\vec{OM}, \vec{ON}) = \alpha(2\pi)$ (on dit que l'angle $(\vec{OM}, \vec{ON})$ mesure α modulo 2π).

4.3. Angles orientés et colinéarité.

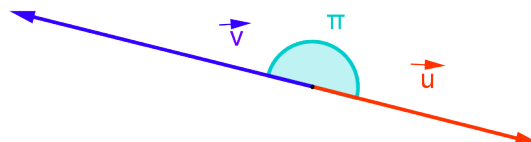
$$(\vec{u}; \vec{v}) = (\vec{OM}; \vec{ON})(2\pi)$$

Les points O; M et N sont alignés si et seulement si $\vec{OM}$ et $\vec{ON}$ sont colinéaires.

Lorsque les vecteurs $\vec{OM}$ et $\vec{ON}$ ont le même sens alors $(\vec{OM}; \vec{ON}) = 0(2\pi)$



Lorsque les vecteurs $\vec{OM}$ et $\vec{ON}$ sont de sens contraire alors $(\vec{OM}; \vec{ON}) = \pi(2\pi)$



Conclusion:

$\vec{u}$ et $\vec{v}$ étant deux vecteurs non nuls.

$\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires si et seulement si $(\vec{u}; \vec{v}) = 0(2\pi)$ ou $(\vec{u}; \vec{v}) = \pi(2\pi)$.

On peut aussi noter $(\vec{u}; \vec{v}) = 0(\pi)$

4.4. Somme de deux angles orientés.

i. Relation de Chasles.

$\vec{u}$; $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont des vecteurs non nuls.

$$(\vec{u}; \vec{v}) + (\vec{v}; \vec{w}) = (\vec{u}; \vec{w})(2\pi)$$

ii. Remarque.

Si $\vec{v}$ et $\vec{V}$ sont deux vecteurs colinéaires et de même sens donc $\vec{V} = k \vec{v}$ avec k nombre réel strictement positif.

On a :

$$(\vec{v}; \vec{V}) = 0 (2\pi)$$

$$\text{et } (\vec{u}; \vec{V}) = (\vec{u}; \vec{v}) + (\vec{v}; \vec{V}) (2\pi)$$

$$(\vec{u}; \vec{V}) = (\vec{u}; \vec{v}) (2\pi)$$

De même, si $\vec{U} = k' \vec{u}$ avec k' nombre réel strictement positif alors $(\vec{U}; \vec{V}) = (\vec{u}; \vec{v}) (2\pi)$

iii. Exemples.

$$\bullet \quad \vec{u} = \overrightarrow{AB} \quad \vec{v} = \overrightarrow{AC} \quad \vec{w} = \overrightarrow{AD}$$

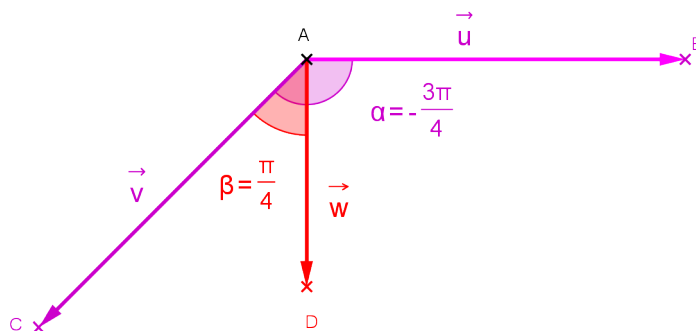
$$(\vec{u}; \vec{v}) = -\frac{3\pi}{4} (2\pi)$$

$$(\vec{v}; \vec{w}) = \frac{\pi}{4} (2\pi)$$

$$(\vec{u}; \vec{w}) = (\vec{u}; \vec{v}) + (\vec{v}; \vec{w}) (2\pi)$$

$$(\vec{u}; \vec{w}) = -\frac{3\pi}{4} + \frac{\pi}{4} (2\pi)$$

$$(\vec{u}; \vec{w}) = -\frac{\pi}{2} (2\pi)$$



$$\bullet \quad \vec{u} = \overrightarrow{AB} \quad \vec{v} = \overrightarrow{AC} \quad \vec{w} = \overrightarrow{AD}$$

$$(\vec{u}; \vec{v}) = \frac{5\pi}{6} (2\pi)$$

$$(\vec{v}; \vec{w}) = \frac{\pi}{3} (2\pi)$$

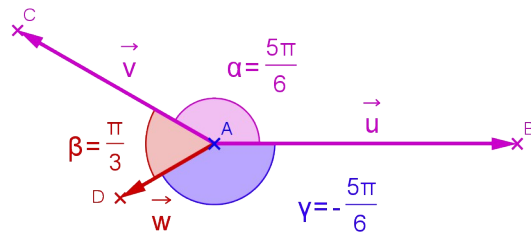
$$(\vec{u}; \vec{w}) = (\vec{u}; \vec{v}) + (\vec{v}; \vec{w}) (2\pi)$$

$$(\vec{u}; \vec{w}) = \frac{5\pi}{6} + \frac{\pi}{3} (2\pi)$$

$$(\vec{u}; \vec{w}) = \frac{7\pi}{6} (2\pi)$$

On n'obtient pas la mesure principale de $(\vec{u}; \vec{w})$

$$(\vec{u}; \vec{w}) = -\frac{5\pi}{6} (2\pi)$$



iv. Conséquences.

Exprimer: $(\vec{v}; \vec{u})$; $(\vec{u}; -\vec{v})$; $(-\vec{u}; \vec{v})$; $(-\vec{u}; -\vec{v})$ en fonction de $(\vec{u}; \vec{v})$.

x $(\vec{v}; \vec{u})$

$$(\vec{v}; \vec{u}) + (\vec{u}; \vec{v}) = (\vec{u}; \vec{u}) (2\pi)$$

$$\text{Or, } (\vec{u}; \vec{u}) = 0 (2\pi)$$

$$\text{Donc, } (\vec{v}; \vec{u}) = -(\vec{u}; \vec{v}) (2\pi)$$

x $(\vec{u}; -\vec{v})$

$$(\vec{u}; -\vec{v}) = (\vec{u}; \vec{v}) + (\vec{v}; -\vec{v}) (2\pi)$$

$$(\vec{u}; -\vec{v}) = (\vec{u}; \vec{v}) + \pi (2\pi)$$

x $(-\vec{u}; \vec{v})$

$$(-\vec{u}; \vec{v}) = (-\vec{u}; \vec{u}) + (\vec{u}; \vec{v}) (2\pi)$$

$$(-\vec{u}; \vec{v}) = \pi + (\vec{u}; \vec{v}) (2\pi)$$

x $(-\vec{u}; -\vec{v})$

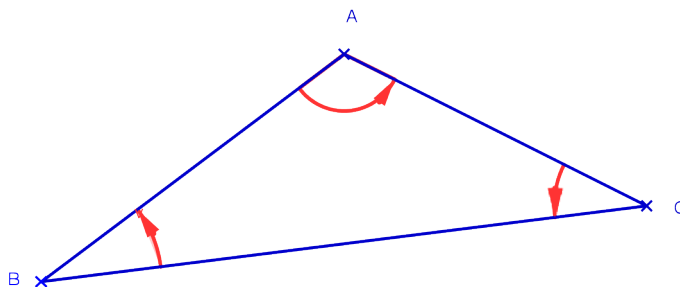
$$(-\vec{u}; -\vec{v}) = (-\vec{u}; \vec{u}) + (\vec{u}; \vec{v}) + (\vec{v}; -\vec{v}) (2\pi)$$

$$(-\vec{u}; -\vec{v}) = \pi + (\vec{u}; \vec{v}) + \pi (2\pi)$$

$$(-\vec{u}; -\vec{v}) = (\vec{u}; \vec{v}) (2\pi)$$

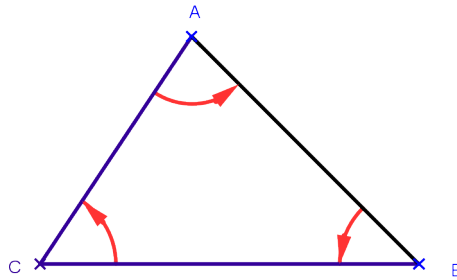
4.5.. Somme des angles d'un triangle.

x ABC est un triangle direct. (la mesure principale de $(\vec{AB}; \vec{AC})$ appartient à $[0; \pi]$)



$$\begin{aligned}
 & (\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC}) + (\overrightarrow{BC}; \overrightarrow{BA}) + (\overrightarrow{CA}; \overrightarrow{CB}) \\
 &= (\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC}) + (\overrightarrow{BC}; \overrightarrow{BA}) + (-\overrightarrow{AC}; -\overrightarrow{BC})(2\pi) \\
 &= (\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC}) + (\overrightarrow{BC}; \overrightarrow{BA}) + (\overrightarrow{AC}; \overrightarrow{BC})(2\pi) \\
 &= (\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC}) + (\overrightarrow{AC}; \overrightarrow{BC}) + (\overrightarrow{BC}; \overrightarrow{BA})(2\pi) \\
 &= (\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{BA})(2\pi) \\
 &= (\overrightarrow{AB}; -\overrightarrow{AB})(2\pi) \\
 &= \pi(2\pi)
 \end{aligned}$$

✕ ABC est un triangle indirect. (la mesure principale de $(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC})$ appartient à $] -\pi; 0[$)

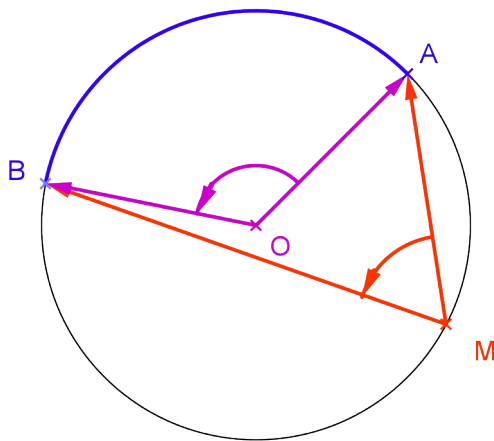


$$(\overrightarrow{AC}; \overrightarrow{AB}) + (\overrightarrow{BA}; \overrightarrow{BC}) + (\overrightarrow{CB}; \overrightarrow{CA}) = \pi(2\pi)$$

4.6-. Théorème de l'angle inscrit.

Si M, A et B ($M \neq A$ et $M \neq B$) trois points d'un cercle de centre O alors:

$$(\overrightarrow{OA}; \overrightarrow{OB}) = 2(\overrightarrow{MA}; \overrightarrow{MB})(2\pi)$$



5. Trigonométrie.

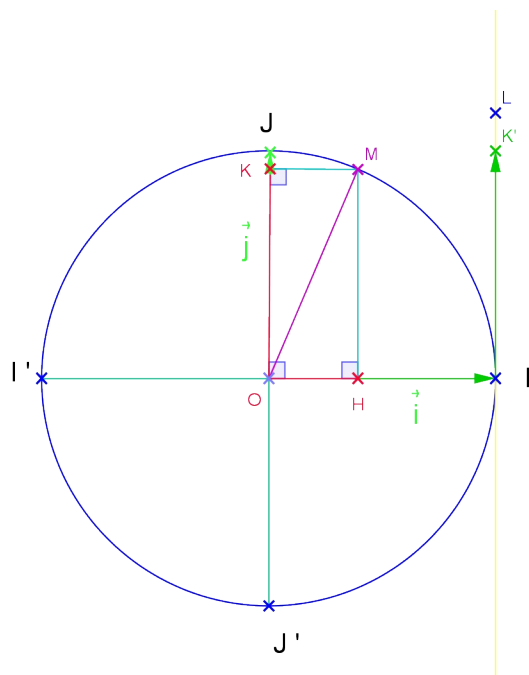
5.1. Cosinus et sinus d'un nombre réel.

$\mathcal{C}$ est le cercle trigonométrique. $\overrightarrow{OI} = \vec{i}$; $\overrightarrow{OJ} = \vec{j}$; $(O; \vec{i}; \vec{j})$ est un repère orthonormé direct du plan.

x est un nombre réel quelconque.

L est le point d'abscisse x de (IK') : $\overrightarrow{IL} = x \overrightarrow{IK'}$

Une mesure de l'angle $\widehat{IOM}$ en radians est x



(ou l'abscisse de K dans le repère $(O; \vec{j})$ de la droite (OK))

$$K(0; \sin x) \quad \overrightarrow{OK} = (\sin x) \vec{j}$$
$$\cos \frac{\pi}{2} = 0 \quad \text{et} \quad \sin \frac{\pi}{2} = 1$$

✓ Nous savons aussi que :

- $\cos \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ et $\sin \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$
- $\cos \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ et $\sin \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$
- $\cos \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$ et $\sin \frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

✓ On donne souvent ces résultats sous le forme de tableau.

Mesure des angles	0°	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
cosinus	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
sinus	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1

5.3. Propriétés.

Pour tout réel x on a :

$$-1 \leq \cos x \leq 1 \quad \text{et} \quad -1 \leq \sin x \leq 1$$

$$\cos^2 x + \sin^2 x = 1 \quad (a)$$

$$\cos(x + 2\pi) = \cos x \quad (b)$$

$$\sin(x + 2\pi) = \sin x \quad (c)$$

(a)

✓ Le triangle rectangle OMH est rectangle en H

Donc $OH \leq OM$ (OM est l'hypoténuse du triangle rectangle)

$$OH \leq 1$$

Donc l'abscisse de H dans le repère $(O; \vec{i})$ est comprise entre -1 et 1

C'est à dire $-1 \leq \cos x \leq 1$

✓ De même le triangle OMK est rectangle en K.

Donc $OK \leq OM$

$$OK \leq 1$$

Donc l'abscisse de K dans le repère $(O; \vec{j})$ est comprise entre -1 et 1

C'est à dire $-1 \leq \sin x \leq 1$

(b)

Nous avons vu $\cos x = OH$ ou $-OH$ et $\sin x = OK$ ou $-OK$

Donc $\cos^2 x = OH^2$ et $\sin^2 x = OK^2$

Le triangle rectangle OHM est rectangle en H

$$OH^2 + MH^2 = OM^2 \text{ or } MH = OK$$

$$OH^2 = \cos^2 x \quad MH^2 = OK^2 = \sin^2 x \quad \text{et} \quad OM^2 = 1$$

$$\text{Donc} \quad \cos^2 x + \sin^2 x = 1$$

(c)

Les points L d'abscisse x sur (IK') et N d'abscisse $x + 2\pi$ coïncident avec le même point de $\mathcal{C}$

$$\cos(x + 2\pi) = \cos x \quad \text{et} \quad \sin(x + 2\pi) = \sin x$$

On dit que cos et sin sont des fonctions périodiques de période 2π

5.4.. Cosinus et sinus d'angles orientés.

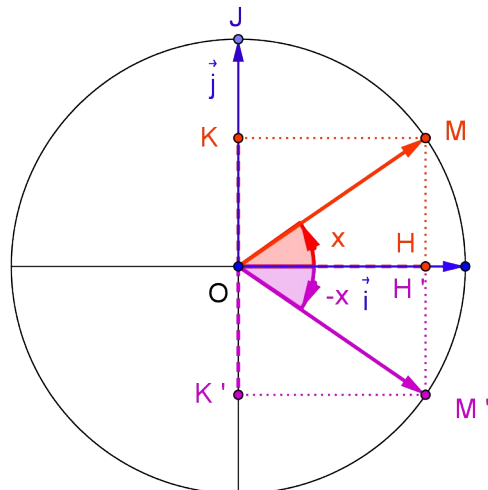
i. Définition.

Dans le plan orienté, si $(\vec{u}; \vec{v})$ est un angle orienté dont une mesure en radian est x alors on a $\cos(\vec{u}; \vec{v}) = \cos x$ et $\sin(\vec{u}; \vec{v}) = \sin x$

ii. Angles opposés.

Les angles $(\vec{OI}; \vec{OM})$ et $(\vec{OI}; \vec{OM}')$ sont opposés si et seulement si leur somme est égale à l'angle nul.

Si $(\vec{OI}; \vec{OM}) = x(2\pi)$ et $(\vec{OI}; \vec{OM}') = x'(2\pi)$



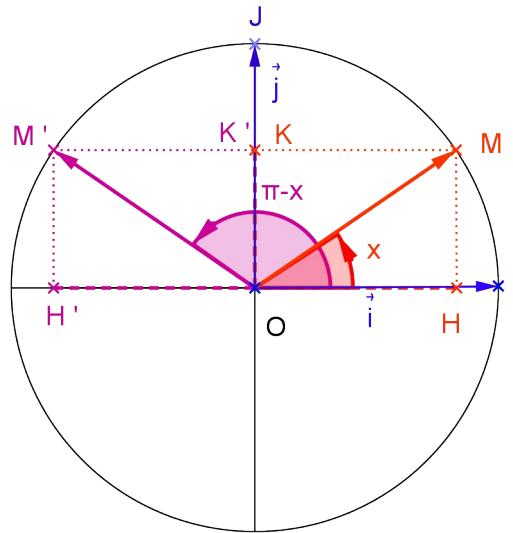
Les points M et M' sont symétriques par rapport à (OI). $H=H'$ et $K=K'$ sont symétriques par rapport à O.

$$\cos(-x) = \cos x \qquad \sin(-x) = -\sin x$$

iii. Angles supplémentaires.

Les angles $(\vec{OI}; \vec{OM})$ et $(\vec{OI}; \vec{OM}')$ sont supplémentaires si et seulement si leur somme est égale à l'angle plat.

Si $(\vec{OI}; \vec{OM}) = x(2\pi)$ et $(\vec{OI}; \vec{OM}') = x'(2\pi)$ alors $x' = \pi - x(2\pi)$

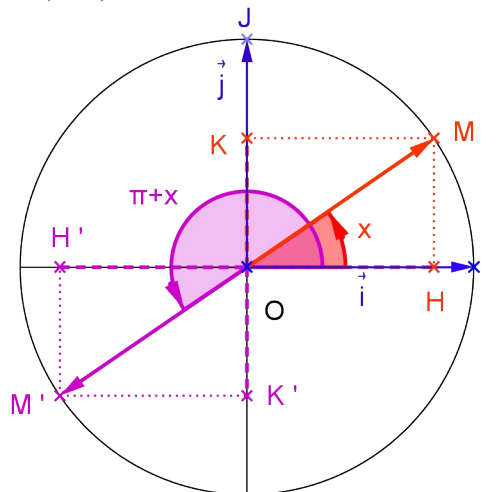


Les points M et M' sont symétriques par rapport à (OJ). H et H' ont symétriques par rapport à O et K=K'.

$\cos(\pi - x) = -\cos x$	$\sin(\pi - x) = \sin x$
---------------------------	--------------------------

iv. Angles dont la différence est l'angle plat.

Si $(\vec{OI}; \vec{OM}) = x(2\pi)$ et $(\vec{OI}; \vec{OM}') = x'(2\pi)$ alors $x' = \pi + x(2\pi)$



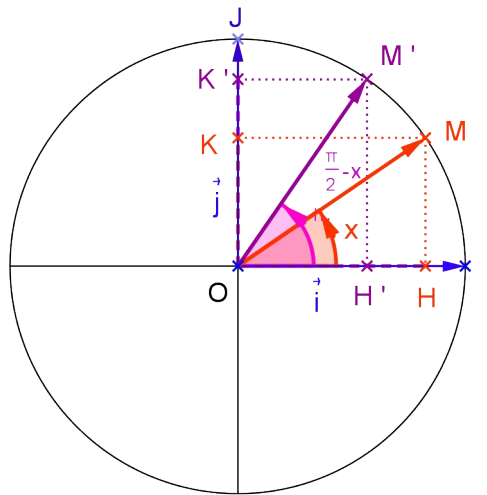
Les points M et M' sont symétriques par rapport à O, de même pour les points H et H' et les points K et K'.

$\cos(\pi + x) = -\cos x$	$\sin(\pi + x) = -\sin x$
---------------------------	---------------------------

iv. Angles complémentaires.

Les angles $(\vec{OI}; \vec{OM})$ et $(\vec{OI}; \vec{OM}')$ sont complémentaires si et seulement si leur somme est égale à l'angle droit positif.

Si $(\vec{OI}; \vec{OM}) = x(2\pi)$ et $(\vec{OI}; \vec{OM}') = x'(2\pi)$ alors $x' = \frac{\pi}{2} - x(2\pi)$

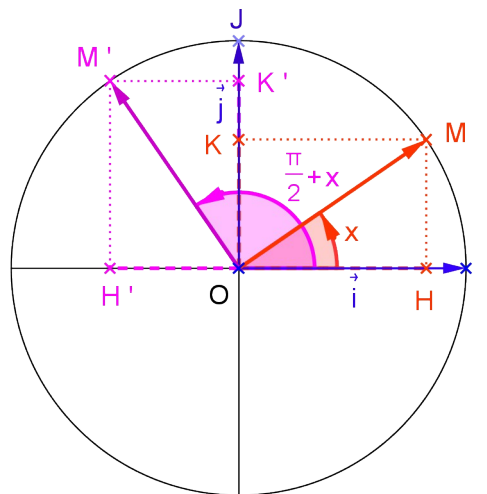


Les angles $(\vec{OI}; \vec{OM})$ et $(\vec{OM}'; \vec{OJ})$ sont égaux. On a $OH=OK'$ et $OK=OH'$

$\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin x$	$\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos x$
---	---

v. Angles dont la différence est l'angle droit positif.

Si $(\vec{OI}; \vec{OM}) = x (2\pi)$ et $(\vec{OI}; \vec{OM}') = x' (2\pi)$ alors $x' = \frac{\pi}{2} + x (2\pi)$



Les angles $(\vec{OI}; \vec{OM})$ et $(\vec{OJ}; \vec{OM}')$ sont égaux. On a $OH=OK'$ et $OK=OH'$

$\cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = -\sin x$	$\sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = \cos x$
--	---

5.5. Équations: $\cos x = \cos a$ et $\sin x = \sin a$.

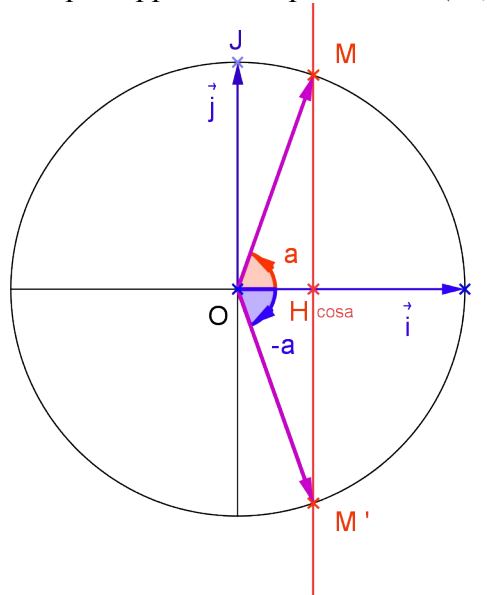
i. Remarque.

Pour tout nombre réel x , on a $-1 \leq \cos x \leq 1$ donc l'ensemble de solutions de l'équation $\cos x = k$ avec k réel strictement supérieur à 1 ou k strictement inférieur à -1 est l'ensemble vide.

ii. $\cos x = \cos a$.

Si $k \in [-1; 1]$ alors on détermine une valeur de a vérifiant $\cos a = k$. On obtient une valeur exacte pour a lorsque k est une valeur remarquable (ou son opposé) pour cosinus.

On considère alors un cercle trigonométrique rapporté au repère direct $(O; \vec{OI}, \vec{OJ})$.



On place le point $H(\cos a; 0)$ puis on trace la perpendiculaire à (OI) en H . Cette droite coupe le cercle en deux points (lorsque $\cos a \neq 1$ et $\cos a \neq -1$) que l'on note M et M' .

Sur le dessin, on suppose que a est une mesure de $(\vec{OI}; \vec{OM})$, dans ce cas $-a$ est une mesure de $(\vec{OI}; \vec{OM}')$; si a était une mesure de $(\vec{OI}; \vec{OM}')$ alors $-a$ serait une mesure de $(\vec{OI}; \vec{OM})$.

Conclusion:

$$\cos x = \cos a \Leftrightarrow \begin{cases} x = a(2\pi) \\ \text{ou} \\ x = -a(2\pi) \end{cases}$$

Donc, les solutions de cette équation sont les nombres: $a + 2k\pi$ et $-a + 2k\pi$ avec k entier relatif.

Exemple:

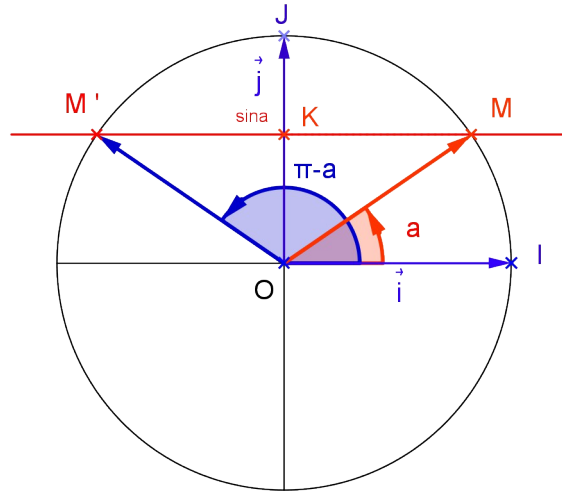
Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $\cos x = \frac{1}{2}$

On sait que $\cos \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$

$$\cos x = \cos \frac{\pi}{3} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{3}(2\pi) \\ \text{ou} \\ x = -\frac{\pi}{3}(2\pi) \end{cases}$$

iii. $\sin x = \sin a$.

On considère un cercle trigonométrique rapporté au repère direct $(O; \vec{OI}, \vec{OJ})$.



On place le point $K(0; \sin a)$ puis on trace la perpendiculaire à (OJ) en K . Cette droite coupe le cercle en deux points (lorsque $\sin a \neq 1$ et $\sin a \neq -1$) que l'on note M et M' .

Sur le dessin, on suppose que a est une mesure de $(\vec{OI}; \vec{OM})$, dans ce cas $\pi - a$ est une mesure de $(\vec{OI}; \vec{OM}')$; si a était une mesure de $(\vec{OI}; \vec{OM}')$ alors $\pi - a$ serait une mesure de $(\vec{OI}; \vec{OM})$.

Conclusion:

$$\sin x = \sin a \Leftrightarrow \begin{cases} x = a + 2k\pi \\ \text{ou} \\ x = \pi - a + 2k\pi \end{cases}$$

Donc, les solutions de cette équation sont les nombres: $a + 2k\pi$ et $\pi - a + 2k\pi$ avec k entier relatif.

Exemple:

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $\sin x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

On sait que $\sin \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$. Donc, $\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

$$\sin x = \sin\left(-\frac{\pi}{4}\right) \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{\pi}{4} + 2k\pi \\ \text{ou} \\ x = \pi + \frac{\pi}{4} + 2k\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{\pi}{4} + 2k\pi \\ \text{ou} \\ x = \frac{5\pi}{4} + 2k\pi \end{cases}$$